УДК 519.216

МОДЕЛЬ ТЕЛЕТРАФИКА, ОБЪЕДИНЯЮЩАЯ УСТОЙЧИВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЛЕВИ И ДРОБНОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Галактионова О.В., Хохлов Ю.С.[1]
Кафедра математической статистики и эконометрики

Предлагается новая модель телетрафика. Эта модель имеет две компоненты. Показано, что можно так подобрать параметры этой модели, что будут выполнены условия медленного роста и быстрого роста для первой и второй компонент и при некоторой общей нормировке процесс агрегированного трафика сходится к некоторому предельному процессу, который есть сумма устойчивого движения Леви и дробного броуновского движения. Это обобщает некоторые результаты Микоша и др.

The new model of teletraffic is proposed. This model has two components. It is shown that it is possible to select the parameters of this model in such way that the conditions of Slow Growth and Fast Growth for the first and second components hold and under some common normalization the process of aggregated traffic converges to some limit process which is the sum of Stable Levy Motion and Fractional Brownian Motion. This is some generalization of the results of Mikosch et al.

Ключевые слова: телетрафик; устойчивое движение Леви; дробное броуновское движение.
Keywords: teletraffic; Stable Levy Motion; Fractional Brownian Motion.

Введение. Анализ потоков трафика современных высокоскоростных телекоммуникационных сетей показывает, что они обладают тремя важными характерными особенностями: *тяжелые хвосты* распределений вероятностей, они являются *самоподобными* и обладают свойством *долговременной зависимости.* В традиционных моделях трафика, для которых интервалы времени между появлением последовательных заявок независимы, а их распределения имеют экпоненциально убывающие хвосты, зависимость трафика в разные моменты времени является быстро убывающей. Из такого быстрого убывания корреляций следует, что после агрегирования мы получаем процесс, свойства которого близки к свойствам процесса с независимыми и однородными приращениями, т.е. белого шума.

Исследования трафика реальных телекоммуникационных сетей (см. [3], [9]) показывают, что он обладает свойством статистического *самоподобия.* Самоподобие означает, грубо говоря, что трафик статистически выглядит одинаково на разных временных шкалах. Кроме того, самоподобие тесно связано с другим свойством, а именно, долговременной зависимостью.

[1]Работа поддержана РФФИ, проекты 04-01-00671 и 06-01-00626

Существование свойств самоподобия и долговременной зависимости было обнаружено во многих эмпирических исследованиях. Обычно, наличие этих свойств пытаются объяснить тем, что времена передачи сообщений имеют распределения с тяжелыми хвостами. Аналитики, в основном, пришли к согласию о наличии самоподобного характера агрегированного трафика, по-крайней мере, для достаточно крупных временных шкал. Некоторые эмпирические и теоретические результаты подтверждают то, что самоподобие связано с наличием тяжелых хвостов у распределений вероятностей. Но нет единого мнения по поводу того, каким является это распределение. Наиболее популярными моделями являются Дробное Броуновское Движение (ДБД) и Устойчивое Движение Леви (УДЛ) ([4]-[7]). При этом неявно предполагается, что предельный процесс должен быть либо ДБД, либо УДЛ.

В то же время, имеются недавние исследования, связанные с измерениями TCP/IP трафика, которые показывают, что он обладает более сложным поведением, более похожим на поведение мультифрактала (см., например, [2] и [8]). Это показывает, что актуальной является задача построения новых моделей, которые будут обладать такими свойствами.

В данной работе мы строим новую модель, которая содержит в качестве аддитивных компонент и ДБД и УДЛ. Эта работа является продолжением наших исследований, начатых в работе [1], где предложена модель, объединяющая в едином процессе несколько независимых УДЛ с различными показателями устойчивости.

1. Описание модели. Мы начнем с описания стандартной пуассоновской модели с бесконечным числом источников, следуя работе [5]. Пусть $(\Gamma_k, -\infty < k < \infty)$ есть точечный процесс, порожденный однородным процессом Пуассона на R^1 с параметром λ. Точки этого процесса занумерованы таким образом, что $\Gamma_0 < 0 < \Gamma_1$, случайные величины $\{\Gamma_0, \Gamma_1, (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k, k \neq 0)\}$ независимы и одинако распределены и имеют показательное распределение с параметром λ. Мы предполагаем, что система имеет бесконечное число источников и в момент времени Γ_k происходит соединение и источник с номером k начинает передачу данных на сервер в течение некоторого времени X_k с постоянной скоростью, которую без потери общности можно считать равной единице. Предполагается, что случайные величины $(X_k, k \in Z)$ независимы и одинаково распределены и не зависят от процесса моментов включения (появления) источников. Мы будем предполагать, что их общая функция распределения $F(x)$ обладает следующим свойством:

$$\bar{F}(x) := P(X_k > x) = x^{-\alpha} L(x)\ ,\ x > 0\ , \tag{1}$$

где $L(x)$ есть медленно меняющаяся при $x \to \infty$ функция, $1 < \alpha < 2$. Определим также функцию $b(t)$, которая является непрерывной слева обобщенной обратной функцией к функции $1/\bar{F}(x)$ и определяется по правилу

$$b(t) = \inf(x : 1/\bar{F}(x) \geqslant t)\ .$$

Функция $b(t)$ не убывает и является правильно меняющейся с показателем $1/\alpha$.

Обозначим через $N(t)$ число активных источников в момент времени t, т.е.

$$N(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{\Gamma_k \leqslant t < \Gamma_k + X_k}\ .$$

Эта величина имеет смысл мгновенной нагрузки на сервер.

В этой модели все источники одного типа, то есть распределение длины активного периода каждого источника имеет одно и то же распределение.

В нашей работе мы будем рассматривать пуассоновскую модель с бесконечным числом источников, зависящую от некоторого параметра $T > 0$. Этот параметр имеет смысл параметра масштаба для исследуемой системы. Источники в модели бывают двух типов. Интенсивность появления сообщения от источника первого типа есть $\lambda_1(T)$, от источника второго типа – $\lambda_2(T)$. Пусть длины сообщений $X_j^{(k)}$ $(k = 1, 2)$ от источников первого и второго типа имеют функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$, причем

$$\begin{aligned} \bar{F}_1(x) &= P(X^{(1)} > x) = x^{-\alpha_1} L_1(x) \ , \ x > 0 \ , \ 1 < \alpha_1 < 2 \ , \\ \bar{F}_2(x) &= P(X^{(2)} > x) = x^{-\alpha_2} L_2(x) \ , \ x > 0 \ , \ 1 < \alpha_2 < 2 \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Если выполнено условие (2), то существуют конечные $\mu_k = E(X_j^{(k)})$.

Пусть $b_k(t)$ есть обобщенная обратная функция к $1/\bar{F}_k(x)$ $(k = 1, 2)$. Тогда

$$\begin{aligned} b_1(t) &= t^{1/\alpha_1} \bar{L}_1(t) \ , \ t > 0 \ , \\ b_2(t) &= t^{1/\alpha_2} \bar{L}_2(t) \ , \ t > 0 \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Функции $L_1(x)$, $L_2(x)$, $\bar{L}_1(t)$, $\bar{L}_2(t)$ есть медленно меняющиеся функции при $x \to \infty$ и $t \to \infty$.

Обозначим через $A(t) = A_T(t) = \int_0^t N(s)ds$ полную работу, приносимую в систему входящим потоком, описанного выше типа. $A(t)$ естественным образом разбивается в сумму $A(t) = A^{(1)}(t) + A^{(2)}(t)$, где $A^{(k)}(t)$ есть полная работа, приходящая в систему от источников k-го типа $(k = 1, 2)$. Далее нас будет интересовать предельное поведение случайного процесса $(B_T(t) := A_T(T \cdot t), t \geqslant 0)$ при $T \to \infty$. Фактически это означает, что мы рассматриваем агрегированный процесс. Этот процесс также разбивается в сумму $B_T(t) = B_T^{(1)}(t) + B_T^{(2)}(t)$.

2. Результаты. Предположим, что для первой компоненты $B_T^{(1)}(t)$ агрегированного процесса выполнено *условие медленного соединения* (SGC):

$$\frac{b_1(\lambda_1(T) \cdot T)}{T} \to 0 \ , \ T \to \infty \ . \tag{4}$$

В работе ([5]) доказана следующая

Теорема 1. *Если выполнено условие (4), то для процесса* $(B_T^{(1)}(t), t \geqslant 0)$ *имеет место следующая сходимость*

$$\frac{B_T^{(1)}(t) - T \cdot \lambda_1(T) \cdot \mu_1 \cdot t}{b_1(\lambda_1(T) \cdot T)} \Rightarrow Y_\alpha(t) \ , \ T \to \infty \ ,$$

где $(Y_\alpha(t), t \geqslant 0)$ *есть* α*-устойчивое движение Леви,* $\alpha = \alpha_1$.

Пусть теперь для второй компоненты $B_T^{(2)}(t)$ выполнено *условие быстрого соединения* (FGC):

$$\frac{b_2(\lambda_2(T) \cdot T)}{T} \to \infty \ , \ T \to \infty \ . \tag{5}$$

В этом случае доказана (см. [5]) следующая

Теорема 2. *Если выполнено условие (5), то для процесса* $(B_T^{(2)}(t), t \geqslant 0)$ *имеет место следующая сходимость*

$$\frac{B_T^{(2)}(t) - T \cdot \lambda_2(T) \cdot \mu_2 \cdot t}{(\lambda_2(T) \cdot T^3 \cdot \bar{F}_2(T) \cdot \sigma^2)^{1/2}} \Rightarrow B_H(t)\ ,\ T \to \infty\ ,$$

где $(B_H(t), t \geqslant 0)$ *есть стандартное дробное броуновское движение,* $H = (3 - \alpha_2)/2$ *и*

$$\sigma^2 = \frac{1}{3-\alpha_2}\left[\frac{\alpha_2}{2-\alpha_2} + \frac{2}{\mu_2}\right]\ .$$

Мы хотим, чтобы при некоторой общей нормировке $C(T)$ процесс $B_T(t), t \geqslant 0$ сходился при $T \to \infty$ к некоторому предельному процессу, причем обе компоненты допредельного процесса вносили бы нетривиальный вклад. Для этого потребуем, чтобы нормировки в теоремах 1 и 2 совпадали, т.е.

$$C(T) = b_1(\lambda_1(T) \cdot T) = (\lambda_2(T) \cdot T^3 \cdot \bar{F}_2(T) \cdot \sigma^2)^{1/2} \tag{6}$$

и, кроме того, выполнялись бы одновременно условия (4) и (5).

Многочисленные попытки подобрать интенсивности $\lambda_1(T)$ и $\lambda_2(T)$ таким образом, чтобы одновременно выполнялись свойства (4)-(6) при одном и том же T в этих условиях, показали, что это невозможно. Поэтому мы поступим несколько по другому. Пусть $\lambda_1(T)$ и $\lambda_2(T)$ уже выбраны, причем $\lambda_1(T) \nearrow \infty$, $\lambda_2(T) \nearrow \infty$ при $T \to \infty$ и для них выполнены условия (4) и (5). Для заданного $T > 0$ найдем $T_1 = T_1(T) > 0$ такое, что выполнено равенство

$$b_1(\lambda_1(T_1) \cdot T_1) = (\lambda_2(T) \cdot T^3 \cdot \bar{F}_2(T) \cdot \sigma^2)^{1/2}\ . \tag{7}$$

В силу того, что $b_1(t)$ является неубывающей функцией, которая неограниченно возрастает, такое T_1 существует и $T_1(T) \nearrow \infty$ при $T \to \infty$.

Определим теперь $B_T^{(1)}(t) = A_T^{(1)}(T_1(T) \cdot t)$, $B_T^{(2)}(t) = A_T^{(2)}(T \cdot t)$, $B_T(t) = B_T^{(1)}(t) + B_T^{(2)}(t)$. Это означает, что в такой модели источники первого типа привносят в систему за время T работу, которая в старой модели привносилась за время $T_1(T)$.

Проведенный выше анализ показывавает, что имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть случайный процесс* $(B_T(t), t \geqslant 0)$ *определяется описанным выше образом, интенсивности* $\lambda_1(T)$ *и* $\lambda_2(T)$ *появления источников первого и второго типа таковы, что выполнены условия (4) и (5), а величина* $T_1 = T_1(T)$ *определяется из уравнения (7). Тогда имеет место следующая сходимость*

$$\frac{B_T(t) - T_1 \cdot \lambda_1(T_1) \cdot \mu_1 \cdot t - T \cdot \lambda_2(T) \cdot \mu_2 \cdot t}{(\lambda_2(T) \cdot T^3 \cdot \bar{F}_2(T) \cdot \sigma^2)^{1/2}} \Rightarrow Y_\alpha(t) + B_H(t)\ ,\ T \to \infty\ , \tag{8}$$

где $Y_\alpha = (Y_\alpha(t), t \geqslant 0)$ *есть* α*-устойчивое движение Леви,* $\alpha = \alpha_1$, $B_H = (B_H(t), t \geqslant 0)$ *есть стандартное дробное броуновское движение,* $H = (3-\alpha_2)/2$, *процессы* B_H *и* Y_α *независимы, а сходимость в (7) понимается как сходимость конечномерных распределений.*

Список литературы

[1] D'Apice C., Manzo R., Khokhlov Yu., Sidirova O. Convergence of superpositions of scaled renewal processes with finite number of different distributions // J. Math. Sciences. 2006. V. 132, N. 5, P. 602 - 609.

[2] Feldmann A., Gilbert A.C. and Willinger W. Data networks as cascades: Investigating the multifractal nature of Internet WAN traffic. // Computer Communication Review. 1998. V. 28, N. 4, P. 42-55.

[3] Leland W.E., Taqqu M. S., Willinger W. and Willson D. V. On the self-similar nature of Ethernet traffic (Extended version) // IEEE/ACM Trans. Networking 1994. V. 2, P. 1-15.

[4] Levy J. B. and M. S. Taqqu M. S. Renewal reward processes with heavy-tailed inter-aarival times and heavy tailed rewards // Bernoulli 2000. V. 6, N. 1, P. 23-44.

[5] Mikosch Th., Resnick S., Rootzen H., Stegeman A. Is network traffic approximated by stable Levy motion or fractional Brownian motion? // Ann. Appl. Probab. 2002. V. 12, N. 1, P. 23-68.

[6] Taqqu M. S. and Levy J. B. Using renewal processes to generate long-range dependence and high variability. // In: E. Eberlein and M. S. Taqqu, eds. Dependence in Probability and Statistics. Boston: Birkhauser, 1986. P. 73-89.

[7] Taqqu M. S., Willinger W. and Sherman R. Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling // Computor Communications Review 1997. V. 27, N. 2, P. 5-23.

[8] Taqqu M. S., Teverovsky V. and Willinger W. Is network traffic self-similar or multifractal? // Fractals 1997. V. 5, P. 63-73.

[9] Willinger W. and Paxson V. Where mathematics meets the Internet // Notices of the AMS 1998. V. 45, N. 8, P. 961-970.