МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О БРАУЭРОВЫХ РЕШЕТКАХ ω-ВЕЕРНЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Максаков С.П., Сорокина М.М.
БГУ имени И.Г. Петровского, г. Брянск

Поступила в редакцию 13.02.2022, после переработки 20.08.2024.

Рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп. Классом групп называется всякая совокупность групп, содержащая с каждой группой G и все группы изоморфные G. В работе изучаются формации, т.е. классы групп, замкнутые относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Цель работы — исследование решеточных свойств ω-веерных формаций, где ω — непустое множество простых чисел. В работе установлены достаточные условия, при которых брауэрова решетка $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ всех ω-веерных подформаций с произвольным направлением δ заданной формации $\mathfrak{F}$ является стоуновой решеткой. В качестве следствий из основной теоремы вытекают результаты для ω-локальных, локальных и других видов формаций.

Ключевые слова: конечная группа, класс групп, формация, ω-веерная формация, решетка, брауэрова решетка, стоунова решетка.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 3. С. 5–17.
https://doi.org/10.26456/vtpmk674

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Важное место в теории классов групп занимают формации, т.е. классы групп, замкнутые относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Понятие формации было введено в рассмотрение В. Гашюцем в 1963 году в работе [1], в которой были определены локальные формации групп, в настоящее время являющиеся наиболее изученными (см., например, [2,3]). В дальнейшем, в качестве естественного обобщения локальных формаций Л.А. Шеметковым были построены ω-локальные формации, где ω — непустое множество простых чисел [4]. ω-Локальные формации являются одним из видов ω-веерных формаций, введенных в рассмотрение В.А. Ведерниковым в 1999 году (см., например, [5]). Различные свойства ω-веерных формаций изучались в работах [6–8] и др. Настоящая работа посвящена исследованию решеточных свойств ω-веерных формаций.

Решеточный подход к изучению формаций групп впервые был предложен А.Н. Скибой в 1986 году [9]. В 1987 году А.Н. Скиба в работе [10] ввел в рассмотрение концепцию кратной локальности для формаций. В монографии [11] Л.А. Шеметков и А.Н. Скиба установили некоторые важные свойства решетки всех формаций конечных групп, а также решетки всех n-кратно локальных формаций, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Решеточные свойства τ-замкнутых n-кратно локальных формаций, где τ — произвольный (регулярный) подгрупповой функтор, представлены в монографии [3]. Основные свойства решеток n-кратно ω-локальных формаций получены в работе [12]. Подробное изложение решеточных свойств локальных (насыщенных), ω-локальных (или, иначе, ω-насыщенных), разрешимо ω-насыщенных формаций представлено в монографии [13]. Некоторые свойства (модулярность, дистрибутивность и др.) решетки ω-веерных формаций получены в работах [14, 15].

Одним из важных видов брауэровых решеток являются стоуновы решетки. Исследованию n-кратно насыщенных формаций со стоуновой решеткой подформаций посвящена работа [16]. Описание τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций со стоуновой решеткой τ-замкнутых n-кратно насыщенных подформаций получено в [17]. Целью настоящей работы является установление условий, при которых брауэрова решетка ω-веерных формаций конечных групп является стоуновой.

1. Предварительные сведения

Символ := означает равенство по определению. Используемые определения и обозначения для групп и классов групп стандартны (см., например, [2,3,18]). Приведем лишь некоторые из них. Запись $N \lhd G$ означает, что N — нормальная подгруппа группы G.

Классом групп называется совокупность групп, содержащая с каждой своей группой и все группы, ей изоморфные. Через $\mathfrak{G}$ обозначается класс всех конечных групп; $\mathfrak{E}$ — класс всех единичных групп. Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $p \in \mathbb{P}$. Через $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{G}_{p'}$ обозначаются соответственно классы всех p-групп и всех p'-групп; $\mathfrak{S}_{cp}$ — класс всех групп, у которых каждый главный p-фактор централен; $\mathfrak{G}_{(Z_p)'}$ — класс всех групп, у которых нет композиционных факторов, изоморфных Z_p, где Z_p — группа порядка p. Через $(\mathfrak{X})$ обозначается класс групп, порожденный совокупностью групп $\mathfrak{X} \neq \varnothing$, т.е. $(\mathfrak{X})$ — пересечение всех классов групп, содержащих $\mathfrak{X}$, в частности (G) — класс всех групп, изоморфных группе G. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность непустых подклассов класса $\mathfrak{F}$. Тогда полагают $\mathfrak{F} := \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, если для любых различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{E}$ и каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $G = A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_t}$, где $A_{i_1} \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, A_{i_t} \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, \ldots, i_t \in I$ [3].

Операцией на классах групп называется всякое отображение множества всех классов групп в себя. Операции Q, S_n, R, R_0 определяются следующим образом: для любого класса групп $\mathfrak{X}$ имеет место

$Q(\mathfrak{X}) := (H \in \mathfrak{G} \mid H \cong G/N$, где $G \in \mathfrak{X})$;

$S_n(\mathfrak{X}) := (H \in \mathfrak{G} \mid H \lhd G$, где $G \in \mathfrak{X})$;

$R(\mathfrak{X}) := (H \in \mathfrak{G} \mid H = N_1 N_2 \cdot \ldots \cdot N_k$, где $N_i \lhd H$, $N_i \in \mathfrak{X}, i = \overline{1,k})$;

$R_0(\mathfrak{X}) := (H \in \mathfrak{G} \mid H \cong G/(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_k)$, где $G/N_i \in \mathfrak{X}, i = \overline{1,k})$.

Пусть U — произвольная операция на классах групп. Класс $\mathfrak{X}$ называется *U-замкнутым*, если $U(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{X}$. Класс $\mathfrak{X}$ называется: *формацией*, если $\mathfrak{X}$ Q-замкнут и R_0-замкнут; *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{X}$ S_n-замкнут и R-замкнут; *формацией Фиттинга*, если $\mathfrak{X}$ является формацией и классом Фиттинга. Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, то $G_{\mathfrak{F}}$ — *$\mathfrak{F}$-радикал* группы G, т.е. наибольшая нормальная подгруппа группы G, принадлежащая $\mathfrak{F}$ [2]. Через $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ обозначается произведение классов групп $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$, т.е. $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2 = (\ G \in \mathfrak{G} \mid$ существует $N \lhd G$ такая, что $N \in \mathfrak{X}_1, G/N \in \mathfrak{X}_2\ )$ (см., например, [18]).

Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G; для совокупности групп $\mathfrak{X}$ полагают $\pi(\mathfrak{X}) := \cup_{G\in\mathfrak{X}}\pi(G)$. Пусть ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$. Группа G называется *ω-группой*, если $\pi(G) \subseteq \omega$; $\mathfrak{G}_\omega$ — класс всех ω-групп; $O_\omega(G) := G_{\mathfrak{G}_\omega}$. Группа G называется *ω-отделимой*, если для каждого главного фактора A/B группы G справедливо $|\pi(A/B) \cap \omega| \leq 1$; *$\omega$-разрешимой*, если каждый главный фактор группы G является либо ω'-группой, либо абелевой p-группой для некоторого $p \in \omega$ [2].

Функции $\delta : \mathbb{P} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$, $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$формации$\}$, где $f(\omega') \neq \varnothing$, называются соответственно $\mathbb{P}FR$-функцией и ωF-функцией (здесь символ ω' обозначает элемент, не принадлежащий ω). Формация

$$\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \ \text{ и } \ G/G_{\delta(p)} \in f(p) \ \text{ для всех } \ p \in \omega \cap \pi(G))$$

называется *ω-веерной формацией с направлением δ* (коротко, *$\omega\delta$-веерной формацией*) *с ω-спутником* f и обозначается $\mathfrak{F} := \omega F(f, \delta)$ [6].

Согласно лемме 5 [6], пересечение любой совокупности $\omega\delta$-веерных формаций также является $\omega\delta$-веерной формацией. Пересечение всех $\omega\delta$-веерных формаций, содержащих непустую совокупность групп $\mathfrak{X}$, обозначается $\omega F(\mathfrak{X}, \delta)$ и называется *$\omega\delta$-веерной формацией, порожденной* $\mathfrak{X}$; в частности, при $\mathfrak{X} = \{G\}$ пишут $\omega F(G, \delta)$.

Пусть f_1 и f_2 — произвольные ωF-функции ($\mathbb{P}FR$-функции). Запись $f_1 \leq f_2$ означает, что $f_1(x) \subseteq f_2(x)$ для всех $x \in \omega \cup \{\omega'\}$ (для всех $x \in \mathbb{P}$). Направление δ ω-веерной формации называется *b-направлением*, если $\delta(p) = \delta(p)\mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \mathbb{P}$ [5]. $\mathbb{P}FR$-функции $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ определяются соответственно следующими равенствами: $\delta_0(p) = \mathfrak{G}_{p'}$, $\delta_1(p) = \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$, $\delta_2(p) = \mathfrak{G}_{(Z_p)'}\mathfrak{N}_p$, $\delta_3(p) = \mathfrak{S}_{cp}$, для любого $p \in \mathbb{P}$. ω-Веерная формация с направлением δ_0 называется *ω-полной*; с направлением δ_1 — *ω-локальной*; с направлением δ_2 — *ω-специальной*; с направлением δ_3 — *ω-центральной* [5].

В соответствии с терминологией монографии [19], *решеткой* называется множество Θ с заданным на нем отношением частичного порядка $\leq$, в котором любые два элемента x и y имеют точную нижнюю грань $x \wedge^\Theta y$, называемую *решеточным пересечением*, и точную верхнюю грань $x \vee^\Theta y$, называемую *решеточным объединением*. Решеточное пересечение и решеточное объединение элементов $x_i \in \Theta$, $i \in I$, обозначают соответственно $\wedge^\Theta_{i\in I} x_i$ и $\vee^\Theta_{i\in I} x_i$. *Нуль* (*единица*) решетки — наименьший (наибольший) элемент рассматриваемой решетки. Пусть Θ — решетка с нулем O. Элемент $a \in \Theta$ называется *атомом* решетки Θ, если $a \neq O$ и не существует такого элемента $x \in \Theta$, что $O < x < a$ [19].

Пусть Θ — непустое множество формаций, частично упорядоченное относительно включения $\subseteq$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *Θ-формацией*, если $\mathfrak{F} \in \Theta$. Для множества групп $\mathfrak{X}$ через $\Theta form\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех Θ-формаций, содержащих $\mathfrak{X}$ [3]. Следуя [11], для любых Θ-формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ полагаем:

$$\mathfrak{F}_1 \wedge^{\Theta} \mathfrak{F}_2 \ := \ \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2, \quad \mathfrak{F}_1 \vee^{\Theta} \mathfrak{F}_2 \ := \ \Theta form(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

Аналогично, для $\mathfrak{F}_i \in \Theta$, $i \in I$:

$$\wedge^{\Theta}_{i\in I}\mathfrak{F}_i \ := \ \cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i, \quad \vee^{\Theta}_{i\in I}\mathfrak{F}_i \ := \ \Theta form(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i).$$

Если пересечение любой совокупности Θ-формаций является Θ-формацией, то множество Θ относительно введенных операций образует решетку. В таком случае формация $\Theta form\mathfrak{X}$ является наименьшей Θ-формацией, содержащей множество групп $\mathfrak{X}$, и называется Θ-*формацией, порожденной множеством* $\mathfrak{X}$. Непустая совокупность формаций Θ называется *полной решеткой формаций*, если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ и в Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{M} \in \Theta$ [3].

2. Брауэровы решетки ω-веерных формаций

Через $\theta_{\mathfrak{G}}$ обозначим совокупность всех формаций конечных групп. Поскольку $\varnothing, \mathfrak{G} \in \theta_{\mathfrak{G}}$ и по лемме 1.1 [2] пересечение любой совокупности формаций является формацией, то множество $\theta_{\mathfrak{G}}$ является полной решеткой формаций с нулем $\varnothing$ и единицей $\mathfrak{G}$.

Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция. Через $\omega\delta F$ обозначим множество всех $\omega\delta$-веерных формаций. Из определения $\omega\delta$-веерной формации следует, что $\varnothing \notin \omega\delta F$. Как отмечено ранее, согласно лемме 5 [6], пересечение любой совокупности $\omega\delta$-веерных формаций является $\omega\delta$-веерной формацией. Это, ввиду $\mathfrak{E}, \mathfrak{G} \in \omega\delta F$, означает, что множество $\omega\delta F$ является полной решеткой формаций с нулем $\mathfrak{E}$ и единицей $\mathfrak{G}$.

Для произвольной формации $\mathfrak{F}$ через $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ обозначим множество всех ее $\omega\delta$-веерных подформаций. Если $\mathfrak{F}$ является $\omega\delta$-веерной формацией, то, ввиду леммы 5 [6], множество $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ является полной решеткой формаций с нулем $\mathfrak{E}$ и единицей $\mathfrak{F}$.

Пусть Θ — решетка, $a, b \in \Theta$. Через $\mathcal{X}_{a,b}$ обозначим совокупность всех элементов из Θ, удовлетворяющих условию $a \wedge_{\Theta} x \leq b$, т.е.

$$\mathcal{X}_{a,b} := \{x \in \Theta \mid a \wedge_{\Theta} x \leq b\}.$$

Замечание 1. Для любой решетки формаций Θ и любых $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \Theta$, ввиду $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_2$, справедливо $\mathfrak{F}_2 \in \mathcal{X}_{\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2}$.

Замечание 2. Поскольку для любых формаций $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2 \in \theta_{\mathfrak{G}}$ имеет место $\mathfrak{F}_1 \cap \varnothing = \varnothing \subseteq \mathfrak{F}_2$, то $\varnothing \in \mathcal{X}_{\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2}$, т.е. в решетке $\theta_{\mathfrak{G}}$ для любых формаций $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ множество $\mathcal{X}_{\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2}$ имеет наименьший элемент, равный $\varnothing$. Аналогично, в решетке $\Theta = \omega\delta F$ $(\Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ — непустая формация) для любых $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2 \in \Theta$ множество $\mathcal{X}_{\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2}$ обладает наименьшим элементом, равным $\mathfrak{E}$.

Определение 1. *Пусть* Θ *— решетка,* $a, b \in \Theta$. *Наибольший элемент множества* $\mathcal{X}_{a,b} = \{x \in \Theta \mid a \wedge^{\Theta} x \leq b\}$ *называется относительным псевдодополнением* a *в* b *и обозначается* $b : a$ *или* $b|a$ *(* [19], с. 67*).*

Замечание 3. Пусть Θ — решетка формаций, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2 \in \Theta$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}_2|\mathfrak{F}_1$ — относительное псевдодополнение $\mathfrak{F}_1$ в $\mathfrak{F}_2$. Тогда по определению 1 $\mathfrak{M}$ — наибольший элемент в $\mathcal{X}_{\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_2\}$, т.е.

(1) $\mathfrak{M} \in \Theta$;

(2) $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}_2$;

(3) если $\mathfrak{X} \in \Theta$ и $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_2$, то $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$.

Пример 1. Пусть G — простая ω-разрешимая группа, δ — b-направление $\omega\delta$-веерной формации, $\delta_0 \leq \delta$, $\mathfrak{F} := \omega F(G, \delta)$ и $\Theta := \omega\delta F(\mathfrak{F})$. Согласно следствию 1 теоремы 2 [15], $\Theta = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}\}$. Тогда

$\mathcal{X}_{\mathfrak{F},\mathfrak{E}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}\} = \{\mathfrak{E}\}$ и поэтому $\mathfrak{E}|\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{F}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{E} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}\}$ и $\mathfrak{F}|\mathfrak{E} = \mathfrak{F}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{F},\mathfrak{F}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}\}$ и $\mathfrak{F}|\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{E}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{E} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}\} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}\}$ и $\mathfrak{E}|\mathfrak{E} = \mathfrak{F}$.

Пример 2. Пусть G — простая ω-отделимая группа, не являющаяся ω-разрешимой, δ — b-направление $\omega\delta$-веерной формации, $\delta_0 \leq \delta$, $\mathfrak{F} := \omega F(G, \delta)$ и $\Theta := \omega\delta F(\mathfrak{F})$. Тогда, ввиду теоремы 1 [15], $\Theta = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{F}\}$, где $\mathfrak{H}$ — единственная максимальная $\omega\delta$-веерная подформация формации $\mathfrak{F}$. Поскольку

$\mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{E}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{E} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}\} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{F}\}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{H}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{E} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}\} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{F}\}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{F}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{E} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{F}\}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{H},\mathfrak{H}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}\} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{F}\}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{H},\mathfrak{F}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{F}\}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{F},\mathfrak{F}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{F}\}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{F},\mathfrak{H}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}\} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}\}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{H},\mathfrak{E}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}\} = \{\mathfrak{E}\}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{F},\mathfrak{E}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}\} = \{\mathfrak{E}\}$,

то $\mathfrak{E}|\mathfrak{E} = \mathfrak{H}|\mathfrak{E} = \mathfrak{F}|\mathfrak{E} = \mathfrak{H}|\mathfrak{H} = \mathfrak{F}|\mathfrak{H} = \mathfrak{F}|\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, $\quad \mathfrak{H}|\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$, $\quad \mathfrak{E}|\mathfrak{H} = \mathfrak{E}|\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$.

Определение 2. *Решетка Θ называется браэуровой, если для любых элементов $a, b \in \Theta$ в Θ существует относительное псевдодополнение a в b* ([19], с. 67).

Согласно определению 2, решетки из примеров 1 и 2 являются брауэровыми. В частности, для простого числа $p \in \omega$, с учетом равенства $\mathfrak{N}_p = \omega F(Z_p, \delta)$ (см., например, [15]), получаем тот факт, что решетка $\omega\delta F(\mathfrak{N}_p)$ всех $\omega\delta$-веерных подформаций формации $\mathfrak{N}_p$ является брауэровой.

Пример 3. Пусть δ — b-направление $\omega\delta$-веерной формации, $p, q \in \omega$, $p \neq q$, $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{N}_p \cup \mathfrak{N}_q, \delta)$, Θ_1 — совокупность всех собственных $\omega\delta$-веерных подформаций формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{E}, \mathfrak{N}_p, \mathfrak{N}_q \in \Theta_1$. Рассмотрим $\mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{N}_p}$:

$$\mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{N}_p} = \{\mathfrak{X} \in \Theta_1 \mid \mathfrak{E} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}_p\}.$$

Так как $\mathfrak{E} \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{N}_p$ для любой формации $\mathfrak{X} \in \Theta_1$, то $\mathfrak{E}, \mathfrak{N}_p, \mathfrak{N}_q \in \mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{N}_p}$. Кроме того, поскольку $\mathfrak{F} \notin \Theta_1$, то $\mathfrak{F} \notin \mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{N}_p}$.

Допустим, что множество $\mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{N}_p}$ обладает наибольшим элементом. Пусть, например, $\mathfrak{H}$ — наибольший элемент в $\mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{N}_p}$. Тогда $\mathfrak{H}$ — собственная $\omega\delta$-веерная подформация формации $\mathfrak{F}$, причем $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{H}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{N}_p \cup \mathfrak{N}_q, \delta) \subseteq \mathfrak{H}$. С другой стороны, $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Таким образом, множество $\mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{N}_p}$ не имеет наибольшего элемента, т.е. в Θ_1 не существует относительного псевдодополнения $\mathfrak{E}$ в $\mathfrak{N}_p$. Это означает, что решетка Θ_1 всех собственных $\omega\delta$-веерных подформаций формации $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{N}_p \cup \mathfrak{N}_q, \delta)$ не является брауэровой.

3. Стоуновость решетки $\omega\delta F(\mathfrak{F})$

Определение 3. *Пусть Θ — брауэрова решетка с нулем O, $a \in \Theta$. Элемент $O|a$ называется псевдодополнением элемента a и обозначается a^** ([19], с. 67).

Замечание 4. Пусть Θ — брауэрова решетка формаций с нулем $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F} \in \Theta$, $\mathfrak{F}^*$ — псевдодополнение формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{E}|\mathfrak{F}$ — наибольший элемент множества $\mathcal{X}_{\mathfrak{F},\mathfrak{E}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}\}$, т.е.
(1) $\mathfrak{F}^* \in \Theta$;
(2) $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}^* = \mathfrak{E}$;
(3) если $\mathfrak{X} \in \Theta$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{E}$, то $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}^*$.

Определение 4. *Брауэрова решетка Θ с нулем O и единицей I называется стоуновой решеткой, если $a^* \vee^{\Theta} (a^*)^* = I$ для всех $a \in \Theta$* ([19], с. 173).

Замечание 5. В монографии [19] указано несколько условий, определяющих стоунову решетку, эквивалентных условию из определения 4.

Пример 4. Пусть $\Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ — формация из примера 1. Напомним, что $\Theta = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}\}$ является брауэровой решеткой формаций с нулем $\mathfrak{E}$ и единицей $\mathfrak{F}$. По определению 3 $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{E}$. Тогда $(\mathfrak{E}^*)^* = \mathfrak{F}^* = \mathfrak{E}$ и $\mathfrak{E}^* \vee^{\Theta} (\mathfrak{E}^*)^* = \mathfrak{F} \vee^{\Theta} \mathfrak{E} = \omega F(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{E}, \delta) = \mathfrak{F}$. Далее, из $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{E}$ следует $(\mathfrak{F}^*)^* = \mathfrak{E}^* = \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{F}^* \vee^{\Theta} (\mathfrak{F}^*)^* = \mathfrak{E} \vee^{\Theta} \mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{E} \cup \mathfrak{F}, \delta) = \mathfrak{F}$. Таким образом, по определению 4 решетка $\Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F})$ является стоуновой.

Пример 5. Пусть $\Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ — формация из примера 2. Напомним, что $\Theta = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{F}\}$ является брауэровой решеткой формаций с нулем $\mathfrak{E}$ и единицей $\mathfrak{F}$. По определению 3 $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{E}$. Тогда $(\mathfrak{E}^*)^* = \mathfrak{F}^* = \mathfrak{E}$ и $(\mathfrak{F}^*)^* = \mathfrak{E}^* = \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{E}^* \vee^{\Theta} (\mathfrak{E}^*)^* = \mathfrak{F} \vee^{\Theta} \mathfrak{E} = \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}^* \vee^{\Theta} (\mathfrak{F}^*)^* = \mathfrak{E} \vee^{\Theta} \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Далее, $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{E}$ и $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{F}$. Тогда $(\mathfrak{H}^*)^* = \mathfrak{E}^* = \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{H}^* \vee^{\Theta} (\mathfrak{H}^*)^* = \mathfrak{E} \vee^{\Theta} \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Таким образом, по определению 4 решетка $\Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F})$ является стоуновой.

В следующей теореме установлены условия, при которых брауэрова решетка ω-веерных формаций с произвольным направлением δ является стоуновой.

Теорема 1. *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, $\mathfrak{F}$ — неединичная $\omega\delta$-веерная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$ и $\Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F})$ — брауэрова решетка. Поскольку $\mathfrak{F} \in \Theta$, то $\mathfrak{F}$ — единица решетки Θ. Ввиду определения 4, достаточно установить, что для любой формации $\mathfrak{B} \in \Theta$ имеет место равенство $\mathfrak{B}^* \vee^{\Theta} (\mathfrak{B}^*)^* = \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — произвольная формация из Θ и $\mathfrak{B}_1 := \mathfrak{B}^* \vee^{\Theta} (\mathfrak{B}^*)^*$, т.е. $\mathfrak{B}_1 = \omega F(\mathfrak{B}^* \cup (\mathfrak{B}^*)^*, \delta)$ — наименьшая $\omega\delta$-веерная формация, содержащая множество $\mathfrak{B}^* \cup (\mathfrak{B}^*)^*$. Покажем, что $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Согласно замечанию 4 (1), $\mathfrak{B}^* \in \Theta$ и

$(\mathfrak{B}^*)^* \in \Theta$. Тогда $\mathfrak{B}^* \subseteq \mathfrak{F}$ и $(\mathfrak{B}^*)^* \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{B}^* \cup (\mathfrak{B}^*)^* \subseteq \mathfrak{F}$ и, следовательно, $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{F}$ и G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{B}_1$. Поскольку $\mathfrak{B}_1 \neq \varnothing$, то $G \neq 1$. Так как $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, то $G = \times_{j\in J} A_j$, где $A_j \in \mathfrak{F}_j$, $j \in J \subseteq I$. С учетом того, что классы $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{B}_1$ являются формациями, заключаем, что группа G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой. Поэтому $G = A_k$, для некоторого $k \in I$, т.е. $G \in \mathfrak{F}_k$. Следовательно, $\omega F(G, \delta) \subseteq \mathfrak{F}_k$. Так как $\mathfrak{F}_k$ — атом решетки Θ и $\omega F(G, \delta) \neq \mathfrak{E}$, то $\omega F(G, \delta) = \mathfrak{F}_k$. Для группы G возможны 2 случая: а) $G \in \mathfrak{B}$; б) $G \notin \mathfrak{B}$. Рассмотрим каждый из случаев.

а) Пусть $G \in \mathfrak{B}$. Тогда $\mathfrak{F}_k \subseteq \mathfrak{B}$. Допустим, что $\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{B}^* \neq \mathfrak{E}$. Тогда в $\mathfrak{F}_k$ существует группа $H \neq 1$ такая, что $H \in \mathfrak{B}^*$. Поскольку $\mathfrak{F}_k \subseteq \mathfrak{B}$, то $H \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}^* = \mathfrak{E}$. Ввиду замечания 4 (2), получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{B}^* = \mathfrak{E}$. Из того, что $\mathfrak{F}_k \in \Theta$ и $\mathfrak{B}^* \cap \mathfrak{F}_k = \mathfrak{E}$, по замечанию 4 (3) следует, что $\mathfrak{F}_k \subseteq (\mathfrak{B}^*)^*$ и, значит, $G \in \mathfrak{B}_1$, что, в силу выбора группы G, невозможно.

б) Пусть $G \notin \mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{F}_k = \mathfrak{E}$, то по замечанию 4 (3) $\mathfrak{F}_k \subseteq \mathfrak{B}^*$ и, следовательно, $G \in \mathfrak{B}^*$. Тогда $G \in \mathfrak{B}_1$. Получили противоречие. Если $\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{B} \neq \mathfrak{E}$, то, с учетом $\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}_k$, заключаем, что $\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{F}_k$. Следовательно, $\mathfrak{F}_k \subseteq \mathfrak{B}$. Таким образом, $\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{B}^* \subseteq \mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}^*$. По замечанию 4 (2) имеет место равенство $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}^* = \mathfrak{E}$ и поэтому $\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{B}^* = \mathfrak{E}$. Согласно замечанию 4 (3), получаем $\mathfrak{F}_k \subseteq (\mathfrak{B}^*)^* \subseteq \mathfrak{B}_1$. Это означает, что $G \in \mathfrak{B}_1$, что невозможно.

Таким образом, $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{F}$ и, значит, $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{B}^* \cup (\mathfrak{B}^*)^*, \delta)$ для любой формации $\mathfrak{B} \in \Theta$. Это, по определению 4, означает, что решетка Θ является стоуновой. Теорема доказана. □

Заключение

Для произвольной $\mathbb{P}FR$-функции δ в теореме 1 установлены достаточные условия, при которых брауэрова решетка всех $\omega\delta$-веерных подформаций заданной формации $\mathfrak{F}$ является стоуновой решеткой. Рассматривая в качестве δ функции δ_0, δ_1, δ_2, δ_3, из теоремы 1 получаем результаты для основных видов ω-веерных формаций.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная ω-полная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \omega\delta_0 F(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная ω-локальная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \omega\delta_1 F(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная ω-специальная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \omega\delta_2 F(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная ω-центральная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \omega\delta_3 F(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция. Формация $\mathfrak{H} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\delta(p)} \in h(p)$ для всех $p \in \pi(G))$ называется *веерной формацией с направлением* δ (коротко, δ*-веерной формацией*) со *спутником* h и обозначается $\mathfrak{H} := \mathbb{P}F(h, \delta)$, где $h : \mathbb{P} \to \{$формации групп$\}$ — функция, называемая $\mathbb{P}F$*-функцией* [6]. Через δF обозначим множество всех δ-веерных формаций групп. Множество δF является полной решеткой формаций с нулем $\mathfrak{E}$ и единицей $\mathfrak{G}$. Через $\delta F(\mathfrak{F})$ обозначим множество всех δ-веерных подформаций формации $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ — δ-веерная формация, то множество $\delta F(\mathfrak{F})$ является полной решеткой формаций с нулем $\mathfrak{E}$ и единицей $\mathfrak{F}$.

В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$, из теоремы 1 вытекает результат для δ-веерных формаций.

Следствие 5. *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, $\mathfrak{F}$ — нееденичная δ-веерная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \delta F(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Рассматривая в качестве δ функции δ_0, δ_1, δ_2, δ_3, из следствия 5 получаем соответственно результаты для полных, локальных, специальных и центральных формаций.

Следствие 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — нееденичная полная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \delta_0 F(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Следствие 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — нееденичная локальная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \delta_1 F(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Следствие 8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — нееденичная специальная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \delta_2 F(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Следствие 9. *Пусть $\mathfrak{F}$ — нееденичная центральная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \delta_3 F(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Замечание 6. По мнению авторов, интерес представляет задача установления условий, при которых решетка $\omega\delta$-веерных (δ-веерных) формаций является брауэровой.

Список литературы

[1] Gaschutz W. Zur Theorie der endlichen auflosbaren Gruppen // Mathematische Zeitschrift. 1963. Vol. 80, № 4. Pp. 300–305.

[2] Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.

[3] Скиба А.Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997. 240 с.

[4] Шеметков Л.А. О произведении формаций // Доклад АН БССР. 1984. Т. 28, № 2. С. 101–103.

[5] Ведерников В.А. О новых типах ω-веерных формаций конечных групп // Труды «Український математичний конгрес – 2001». Киев, 2002. С. 36–45.

[6] Ведерников В.А., Сорокина М.М. ω-Веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки. 2002. Т. 71, № 1. С. 43–60.

[7] Корпачева М.А., Сорокина М.М. Критические ω-веерные τ-замкнутые формации конечных групп // Дискретная математика. 2011. Т. 23, № 1. С. 94–101.

[8] Sorokina M.M., Maksakov S.P. On the Directions of ω-Fibered and Ω-Foliated Formations and Fitting Classes of Finite Groups // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41, № 2. Pp. 273–279.

[9] Скиба А.Н. О локальных формациях длины 5 // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск: Наука и техника, 1986. С. 135–149.

[10] Скиба А.Н. Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины // Вопросы алгебры. 1987. Т. 3. С. 21–31.

[11] Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989. 256 с.

[12] Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.

[13] Воробьев Н.Н. Алгебра классов конечных групп. Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2012. 322 с.

[14] Maksakov S.P. On the lattices of the ω-fibered formations of finite groups // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. 2021. Vol. 27, № 1. Pp. 258–267.

[15] Maksakov S.P., Sorokina M.M. The Arithmetic Properties of Lattices of ω-Fibered Formations of Finite Groups // American Scientific Journal. 2021. Vol. 1, № 48. Pp. 45–49.

[16] Воробьев Н.Н. О кратно локальных формациях со стоуновой решеткой подформаций // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. 2008. № 3. С. 23–27.

[17] Воробьев Н.Н., Мехович А.П. О стоуновых решетках кратно насыщенных формаций // Веснік Віцебскага дзяржайнага універсітэта. 2012. Т. 70, № 4. С. 20–23.

[18] Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992. 901 p.

[19] Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984. 568 с.

Образец цитирования

Максаков С.П., Сорокина М.М. О брауэровых решетках ω-веерных формаций конечных групп // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 3. С. 5–17. https://doi.org/10.26456/vtpmk674

Сведения об авторах

1. **Максаков Серафим Павлович**
аспирант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского.

Россия, 241036, Брянская область, г. Брянск, улица Бежицкая, д. 14. БГУ им. И.Г. Петровского. E-mail: msp222@mail.ru

2. **Сорокина Марина Михайловна**
профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского.

Россия, 241036, Брянская область, г. Брянск, улица Бежицкая, д. 14. БГУ им. И.Г. Петровского. E-mail: mmsorokina@yandex.ru

ON THE BROUWER LATTICES OF ω-FIBERED FORMATIONS OF FINITE GROUPS

Maksakov S.P., Sorokina M.M.
Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky, Bryansk

Received 13.02.2022, revised 20.08.2024.

Only finite groups and classes of finite groups are considered. A class of groups is a set of groups that, with each group G, contains all groups isomorphic to G. In this paper we study formations, i.e. classes of groups that are closed under homomorphic images and subdirect products. The purpose of this paper is to research the lattice properties of ω-fibered formations where ω is a non-empty set of primes. Sufficient conditions, under which the Brouwer lattice $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ of all ω-fibered subformations with an arbitrary direction δ of a given formation $\mathfrak{F}$ is a Stone lattice, are established. As corollaries of the main theorem, results for ω-local, local formations and other types of formations imply.

Keywords: finite group, class of groups, formation, ω-fibered formation, lattice, Brouwer lattice, Stone lattice.

Citation

Maksakov S.P., Sorokina M.M., "On the Brouwer lattices of ω-fibered formations of finite groups", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2024, № 3, 5–17 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk674

References

[1] Gaschutz W., "Zur Theorie der endlichen auflosbaren Gruppen", *Mathematische Zeitschrift*, **80**:4 (1963), 300–305.

[2] Shemetkov L.A., *Formatsii konechnykh grupp [Formations of finite groups]*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (in Russian), 272 pp.

[3] Skiba A.N., *Algebra formatsij [The algebra of formations]*, Belaruskaya Navuka Publ., Minsk, 1997 (in Russian), 240 pp.

[4] Shemetkov L.A., "About the product of formations", *Doklad AN BSSR [Report of the Academy of Sciences of the BSSR]*, **28**:2 (1984), 101–103 (in Russian).

[5] Vedernikov V.A., "On new types of ω-fan formations of finite groups", *Trudy "Ukrainskij matematichnij kongres – 2001" [Proceedings "Ukrainian mathematical Congress – 2001"]*, Kiev, 2002, 36–45 (in Russian).

[6] Vedernikov V.A., Sorokina M.M., "ω-Fibered formations and Fitting classes of finite groups", *Mathematical Notes*, **71**:1 (2002), 39–55.

[7] Korpacheva M.A., Sorokina M.M., “The critical ω-foliated τ-closed formations of finite groups”, *Discrete Mathematics and Applications*, **21**:1 (2011), 69–77.

[8] Sorokina M.M., Maksakov S.P., “On the Directions of ω-Fibered and Ω-Foliated Formations and Fitting Classes of Finite Groups”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **41**:2 (2020), 273–279.

[9] Skiba A.N., “On local formations of length 5”, *Arifmeticheskoe i podgruppovoe stroenie konechnykh grupp [Arithmetic and subgroup structure of finite groups]*, Nauka i Tekhnika, Minsk, 1986, 135–149 (in Russian).

[10] Skiba A.N., “Characterization of finite solvable groups of a given nilpotent length”, *Voprosy algebry [Algebra questions]*, **3** (1987), 21–31 (in Russian).

[11] Shemetkov L.A., Skiba A.N., *Formatsii algebraicheskikh sistem [Formations of algebraic systems]*, Nauka Publ., Moscow, 1989 (in Russian), 256 pp.

[12] Skiba A.N., Shemetkov L.A., “Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups”, *Siberian Advances in Mathematics*, **10**:2 (2000), 112–141.

[13] Vorobev N.N., *Algebra klassov konechnykh grupp [Algebra of classes of finite groups]*, VSU named after P.M. Masherov, Vitebsk, 2012 (in Russian), 322 pp.

[14] Maksakov S.P., “On the lattices of the ω-fibered formations of finite groups”, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*, **27**:1 (2021), 258–267.

[15] Maksakov S.P., Sorokina M.M., “The Arithmetic Properties of Lattices of ω-Fibered Formations of Finite Groups”, *American Scientific Journal*, **1**:48 (2021), 45–49.

[16] Vorobev N.N., “On multiple local formations with a stock grid of sub-formations”, *Vestsi NAN Belarusi. Ser. fiz.-matem. navuk [Vesti NAS of Belarus. Ser. phys.-matem. sciences']*, 2008, № 3, 23–27 (in Russian).

[17] Vorobev N.N., Mekhovich A.P., “On wall lattices of multiple saturated formations”, *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhajnaga universiteta [Bulletin of the Vitebsk State University]*, **70**:4 (2012), 20–23 (in Russian).

[18] Doerk K., Hawkes T., *Finite soluble groups*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1992, 901 pp.

[19] Birkhoff G., *Lattice Theory*, American Mathematical Society, New York, 1973, 423 pp.

Author Info

1. **Maksakov Seraphim Pavlovich**
   Postgraduate student of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky.

   Russia, 241036, Bryansk region, Bryansk, 14 Bezhitskaya str., Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky. E-mail: msp222@mail.ru

2. **Sorokina Marina Mikhaylovna**
Professor of Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry,
Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky.

Russia, 241036, Bryansk region, Bryansk, 14 Bezhitskaya str., Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky.
E-mail: mmsorokina@yandex.ru