ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УДК 519.2

О ПОВЕДЕНИИ МАКСИМУМА В СЛУЧАЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БЁРРА[1]

Бенинг В.Е.
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва
Институт проблем информатики Российской академии наук, г. Москва

Поступила в редакцию 09.07.2024, после переработки 19.08.2024.

В работе рассмотрено асимптотическое поведение моментов максимальной порядковой статистики в случае распределения Бёрра [1]. Проведено асимптотическое сравнение деятельности страховых организаций, рассматривающих моменты максимальных потерь в качестве общих потерь. Деятельность таких организаций оценивается в терминах асимптотического дефекта. Рассмотрен случай, когда число клиентов страховой компании случайно. В качестве примера рассматриваются усечённые биномиальное распределение и распределение Пуассона, описывающие число случайных факторов (или клиентов), приводящих к потерям.

Ключевые слова: резерв страховой компании, выборка случайного объёма, распределение Бёрра, асимптотические разложения, усечённые биномиальное распределение и распределение Пуассона, максимальная порядковая статистика, асимптотический дефект.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 3. С. 18–32.
https://doi.org/10.26456/vtpmk714

1. Введение

В работе развивается подход, предложенный в [2,3]. Напомним кратко основные понятия и определения.

Всюду ниже под организацией, подверженной риску, будем понимать страховую компанию (фирму), а под факторами риска ее клиентов, страхующих свои потери. Хотя, например, под такой организацией можно рассматривать лечебное учреждение, а под факторами риска — ее больных (в случайном числе, например, в условиях пандемии). В таких ситуациях «число клиентов, которые доступны

[1]Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

страховой компании», и заранее не известно, разумно считать случайной величиной. В силу указанных обстоятельств вполне естественным становится изучение асимптотического поведения деятельности страховой компании в случае, когда число клиентов случайно. На естественность такого подхода, в частности, обратили внимание авторы работ [4–15].

В работе [1] рассматривалось распределение с функцией распределения (ф.р.) вида (распределение Бёрра)

$$F(x) \ = \ 1 \ - \ \frac{1}{(1 \ + \ x^r)^\gamma}, \ \ x \ > \ 0, \ \ r \ > \ 0, \ \ \gamma \ > \ 0.$$

При этом постоянные r и γ характеризуют скорость убывания «хвостов» этого распределения (она может быть достаточно медленной, то есть с большой вероятностью возможны «большие» риски). При малых r и γ у этого распределения отсутствуют моменты достаточно высоких порядков и плотность. Применению этого распределения, например, посвящены раздел 6 работы [1], работа [16], оно также рассмотрено в книге [17] (стр. 242).

Для случая распределения Бёрра в работе изучается асимптотическое поведение моментов максимального ущерба страховой компании в случае, когда число клиентов страховой фирмы детерминировано или случайно. Получены асимптотические разложения (а.р.) таких моментов. Проведено асимптотическое сравнение деятельности страховых компаний в терминах необходимого добавочного числа клиентов (асимптотический дефект). Рассмотрены два примера, описывающие распределения случайного числа клиентов. Первый пример касается усечённого распределения Пуассона, а второй - усечённого биномиальное распределения. Проведено асимптотическое сравнение деятельности страховых компаний в терминах асимптотического дефекта. Напомним кратко это понятие.

Рассмотрим две статистические процедуры Π_n^* и Π_n с мерами качества π_n^* и π_n соответственно. Здесь n – число наблюдений $X_1, \ldots, X_n$, на которых основаны эти процедуры. При этом предполагается, что статистическая процедура Π_n^* является в некотором смысле "оптимальной», а процедура Π_n – конкурирующей. Например, в задаче статистического оценивания в качестве меры качества обычно выступает среднеквадратичное отклонение оценки от оцениваемой функции, при этом $\pi_n^* \ \leq \ \pi_n$, а в задаче проверки статистических гипотез в качестве меры качества критериев рассматривают их мощность и тогда $\pi_n^* \ \geq \ \pi_n$.

Обозначим через $m(n)$ необходимое число наблюдений, которое требуется процедуре $\Pi_{m(n)}$, основанной на наблюдениях $X_1, \ldots, X_{m(n)}$, для достижения такого же качества, что и «лучшей» процедуре Π_n^*, основанной на n наблюдениях $X_1, \ldots, X_n$. Ниже рассматривается асимптотический подход, означающий, что $n \ \to \ \infty$. Под асимптотической относительной эффективностью (АОЭ) процедуры $\Pi_{m(n)}$ по отношению к процедуре Π_n^* понимается предел (в случае его существования и независимости от последовательности $m(n)$) вида (см., например, [18])

$$e \ \equiv \ \lim_{n \to \infty} \ \frac{n}{m(n)}.$$

Вместо отношения необходимого числа наблюдений, естественно, можно было бы рассматривать разность вида $m(n) \ - \ n$, которая тоже имеет наглядный смысл необходимого дополнительного числа наблюдений, требующихся процедуре $\Pi_{m(n)}$

для достижения того же качества, что и процедуре Π_n^*. Однако, исторически сложилось так, что многие авторы сначала исследовали асимптотические свойства отношения $n/m(n)$ (возможно, в силу относительной простоты его поведения).

Впервые общее асимптотическое исследование поведения разности $m(n) - n$ было предпринято в 1970 году Ходжесом и Леманом (см. работу [19]). Они назвали разность $m(n) - n$ дефектом (deficiency) конкурирующей процедуры $\Pi_{m(n)}$ относительно процедуры Π_n^* и предложили обозначение

$$d_n = m(n) - n. \tag{1.1}$$

Если предел $\lim_{n\to\infty} d_n$ существует, то он называется *асимптотическим дефектом* процедуры $\Pi_{m(n)}$ относительно процедуры Π_n^* и обозначается символом d. Часто d называют просто дефектом $\Pi_{m(n)}$ относительно Π_n^*. Заметим, что если АОЭ $e \neq 1$, то $d = \infty$ и этот случай малоинтересен. В работе [19] также было отмечено, что существуют статистические задачи, в которых типичным образом возникает случай $e = 1$ (см., например, книгу [20] и работы [9,10]), то есть в этом случае понятие АОЭ не даёт ответа на вопрос какая процедура лучше и понятие дефекта проясняет эту ситуацию, поскольку в этом случае асимптотический дефект может, в принципе, быть любым.

Таким образом дефект процедуры $\Pi_{m(n)}$ относительно процедуры Π_n^* показывает сколько добавочных наблюдений примерно требуется, если мы настаиваем на использовании процедуры $\Pi_{m(n)}$ вместо процедуры Π_n^*, и поэтому создаёт естественный базис для их асимптотического сравнения в случае $e = 1$. Исследование асимптотического поведения дефекта d_n технически более сложно, чем нахождение предела e. Часто оно требует построения асимптотических разложений (а.р.) для соответствующих функций, характеризующих качество оценок (см., например, книги [18], [20] и [21]).

Напомним, что статистические процедуры Π_n^* и Π_n имеют меры качества π_n^* и π_n соответственно, тогда по определению величины $d_n = m(n) - n$, для каждого n должно выполняться равенство

$$\pi_n^* = \pi_{m(n)}. \tag{1.2}$$

Типичным образом функции π_n^* и π_n неизвестны точно и используются их аппроксимации. Предположим, что справедливы асимптотические разложения вида

$$\pi_n^* = \frac{a}{n^l} + \frac{b}{n^{l+s}} + o\big(n^{-l-s}\big), \tag{1.3}$$

$$\pi_n = \frac{a}{n^l} + \frac{c}{n^{l+s}} + o\big(n^{-l-s}\big), \tag{1.4}$$

где $a,\ b$ и c – некоторые постоянные не зависящие от n, а $l > 0,\ s > 0$ – некоторые константы, определяющие порядок убывания по n этих критериев качества. Первый член в этих асимптотических разложениях одинаков и это отражает тот факт, что АОЭ этих процедур равна единице. Из соотношений (1.1) – (1.4) легко получить, что (см. работу [19] или книгу [20])

$$d_n = \frac{c - b}{l\ a}\, n^{1-s} + o\big(n^{1-s}\big). \tag{1.5}$$

Таким образом асимптотический дефект имеет вид

$$d = \begin{cases} \pm\infty, & 0 < s < 1, \\ \dfrac{c - b}{l\ a}, & s = 1, \\ 0, & s > 1. \end{cases} \tag{1.6}$$

Случай, когда выполняется равенство $s = 1$, представляется наиболее интересным, поскольку в этом случае асимптотический дефект конечен. Ходжес и Леман в работе [19] привели ряд простых примеров, показывающих естественность возникновения этого случая в математической статистике (см., также книгу [20] и работы [9], [10]).

В работе приняты следующие обозначения: $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

В разделе 2 приведены результаты в случае неслучайного числа клиентов, в разделе 3 проведено асимптотическое сравнение деятельности страховых компаний в этом случае, в разделе 4 рассмотрена ситуация, когда число клиентов страховой фирмы случайно, в разделе 5 рассмотрены примеры.

2. Асимптотическое поведение моментов максимальных потерь страховой организации в случае большого неслучайного числа клиентов

Рассмотрим страховую компанию, занимающуюся страхованием $n \in \mathbb{N}$ клиентов, риски которых описываются случайными величинами $X_1, \ldots, X_n$ (не обязательно независимыми и одинаково распределёнными). Обозначим через

$$S_n = S_n(X_1, \cdots, X_n)$$

потери страховой компании при страховании этих n клиентов. В частном случае эти потери могут иметь вид максимума отдельных исков клиентов

$$S_n = \max_{1 \le i \le n} X_i \equiv X_{(n)}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим случай, когда страховая компания страхует однотипных и независимых клиентов, а потери представлены нормированной величиной (2.1).

Итак, пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимые одинаково распределённые с.в., имеющие функцию распределения (распределение Бёрра)

$$F(x) = \mathsf{P}\big(X_1 < x\big) = 1 - \frac{1}{(1 + x^r)^\gamma}, \quad x > 0, \ r > 0, \ \gamma > 0 \tag{2.2}$$

и для каждого n общие потери страховой компании имеют вид нормированной максимальной порядковой статистики (или максимальной потери)

$$S_n = n^{-\frac{1}{r\gamma}}\, X_{(n)}. \tag{2.3}$$

Обозначим функцию распределения с.в. S_n через

$$F_n(x) = \mathsf{P}\big(S_n < x\big). \tag{2.4}$$

Рассмотрим здесь только случай $0 < \gamma < 1/2$ (другие случаи рассматриваются аналогично). В работе [3] доказан следующий результат (см. [3], Следствие 2.1).

Теорема 2.1. *Пусть независимые одинаково распределённые с.в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют функцию распределения (2.2) с $0 < \gamma < 1/2$, тогда для функции распределения $F_n(x)$ (см. (2.4)) статистики S_n справедливо асимптотическое разложение вида*

$$\Big| F_n(x) - e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}} + \frac{e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}}}{2nx^{2r\gamma}} + \frac{e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}}}{n^2 x^{3r\gamma}} \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{8x^{r\gamma}} \Big) \Big| \le$$

$$\le \frac{C\, e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}}}{n^{\min(1/\gamma,3)} h_1(x)}, \qquad C > 0,\ x > 0,\ n \in \mathbb{N},$$

где функция $h_1(x)$ имеет вид

$$h_1(x) = \begin{cases} x^{4r\gamma}, & x \ge 1, \\ x^{8r\gamma}, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Предположим, что страховая компания для некоторого $p > 0$ рассматривает величину

$$\pi_n^* \equiv \mathsf{E}\, S_n^p = n^{-\frac{p}{r\gamma}}\, \mathsf{E}\, X_{(n)}^p, \quad p > 0$$

как меру качества своей деятельности.

Теперь из этой Теоремы 2.1 и формулы

$$\mathsf{E}\, S_n^p = p \int_0^\infty x^{p-1} \big(1 - F_n(x)\big)\, dx$$

непосредственно следует а.р. для π_n^*.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия Теоремы 2.1 и $0 < p < r\gamma$, тогда для π_n^* справедливо а.р.*

$$\pi_n^* = v_0 + \frac{v_1}{n} + \frac{v_2}{n^2} + o(n^{-2}),$$

где

$$v_0 = p \int_0^\infty x^{p-1} \Big(1 - e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}}\Big)\, dx,$$

$$v_1 = -\frac{p}{2} \int_0^\infty x^{p-1-2r\gamma}\, e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}}\, dx,$$

$$v_2 = -p \int_0^\infty x^{p-1-3r\gamma}\, e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}} \Big(1 - \frac{1}{8x^{r\gamma}}\Big)\, dx.$$

3. Сравнение деятельности страховых компаний при неслучайном числе клиентов

В этом разделе будет проведено асимптотическое сравнение деятельности двух страховых компаний в терминах необходимого добавочного числа клиентов (асимптотический дефект).

Рассмотрим теперь другую страховую компанию, суммарный ущерб которой имеет вид $T_n = T_n(Y_1, \cdots, Y_n)$, и зависит от n 'потерь' $Y_1, \ldots, Y_n$, представляющих собой с.в.(с произвольным совместным распределением), описывающих страховые требования n клиентов этой страховой фирмы. Здесь будет рассмотрен случай, когда $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ независимые одинаково распределённые с.в., имеющие функцию распределения (см.(2.2))

$$G_n(x) = \mathsf{P}\big(Y_1 < x\big) = F(x - \theta_n), \tag{3.1}$$

где

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(1 + x^r)^\gamma}, \quad x > 0, \quad r > 0, \quad \gamma > 0$$

$$\theta_n = \frac{f}{n^2} + o(n^{-2}), \quad x - \theta_n > 0, \ f \in \mathbb{R}$$

и для каждого n общие потери страховой компании имеют вид нормированной максимальной порядковой статистики (или максимальной потери)

$$T_n = n^{-\frac{1}{r\gamma}}\, Y_{(n)}, \quad Y_{(n)} = \max_{1\le i\le n} Y_i. \tag{3.2}$$

Предположим, что страховая компания для некоторого $p > 0$ рассматривает величину

$$\pi_n \equiv \mathsf{E}\, T_n^p = n^{-\frac{p}{r\gamma}}\, \mathsf{E}\, Y_{(n)}^p, \quad p > 0 \tag{3.3}$$

как меру качества своей деятельности.

Из Леммы 2.3 работы [3] непосредственно следует

Теорема 3.1. *Пусть независимые одинаково распределённые с.в. $Y_1, \ldots, Y_n$ имеют функцию распределения (3.1) и $0 < \gamma < 1/2$, тогда справедливо а.р.*

$$\mathsf{P}(T_n < x) = e^{-1/x^{r\gamma}} - \frac{e^{-1/x^{r\gamma}}}{2nx^{2r\gamma}} - \frac{e^{-1/x^{r\gamma}}}{n^2x^{3r\gamma}}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8x^{r\gamma}} + fr\gamma x^{2r\gamma-1}\right) + o\big(n^{-2}\big)$$

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия Теоремы 3.1, тогда для π_n (см. (3.3)) справедливо а.р.*

$$\pi_n = v_0 + \frac{v_1}{n} + \frac{\bar{v}_2}{n^2} + o(n^{-2}),$$

где величины v_0 и v_1 определены в Теореме 2.2, а

$$\bar{v}_2 = -p\int_0^\infty x^{p-1-3r\gamma}\, e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}}\left(1 - \frac{1}{8x^{r\gamma}} + fr\gamma x^{2r\gamma-1}\right) dx.$$

Рассматривая теперь меры качества страховых компаний в виде π_n^* и π_n, из Теорем 2.2, 2.3 и формулы (1.6) получается формула для асимптотического дефекта.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия Теорем 2.2 и 3.2, тогда, если $0 < \gamma < 1/2$ и $0 < p < r\gamma$, то асимптотический дефект (добавочное число клиентов) имеет вид*

$$d = \frac{\bar{v}_2 - v_2}{v_1} = 2r\gamma f\, \frac{\int_0^\infty x^{p-2-r\gamma}\, e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}}\, dx}{\int_0^\infty x^{p-1-2r\gamma}\, e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}}\, dx}.$$

4. Случайное число клиентов

Рассмотрим случайные величины $N_1,\ N_2,\ \ldots$ и $X_1,\ X_2,\ \ldots$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathsf{P})$. В рассматриваемом случае страхования с.в. $X_1,\ X_2,\ \ldots\ X_n$ интерпретируются как страховые требования клиентов, n – неслучайное число клиентов страховой фирмы, а с.в. N_n – случайное число клиентов страховой компании, зависящее от натурального параметра $n \in \mathbb{N}$. Например, если с.в. N_n имеет геометрическое распределение вида

$$\mathsf{P}(N_n\ =\ k)\ =\ \frac{1}{n}\left(1\ -\ \frac{1}{n}\right)^{k-1},\ k \in \mathbb{N},$$

то

$$\mathsf{E}\ N_n\ =\ n \tag{4.1}$$

и значит среднее число клиентов, обратившихся в страховую компанию, равно n. Условие (4.1) далее будет предполагаться всегда выполненным.

Предположим, что для каждого $n\ \in\ \mathbb{N}$ с.в. N_n принимает только натуральные значения (то есть, $N_n\ \in \mathbb{N}$) и не зависит от последовательности с.в. $X_1,\ X_2,\ \ldots$.

Для каждого $n\ \in\ \mathbb{N}$, как и выше, обозначим через $S_n\ =\ S_n(X_1, \cdots, X_n)$ обобщенные потери страховой компании, то есть действительную измеримую функцию, зависящую от страховых требований $X_1,\ \ldots,\ X_n$. Для каждого n определим потери страховой компании, обслуживающей случайное число клиентов N_n, как S_{N_n}

$$S_{N_n}(\omega)\ \equiv\ S_{N_n(\omega)}(X_1(\omega), \cdots, X_{N_n(\omega)}(\omega)),\quad \omega\ \in\ \Omega.$$

Асимптотическое разложение для ф.р. случайных потерь S_{N_n} описывается следующей Теоремой (см. [3], Лемма 4.1).

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия Теоремы 2.1, тогда*

$$\left|\mathsf{P}(S_{N_n}\ <\ x)\ -\ e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}}\ +\ \frac{e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}}\ \mathsf{E}N_n^{-1}}{2x^{2r\gamma}}\ +\ \frac{e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}}\ \mathsf{E}N_n^{-2}}{x^{3r\gamma}}\left(\frac{1}{3}\ -\ \frac{1}{8x^{r\gamma}}\right)\right|\ \le$$

$$\le\ \frac{C\ e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}}\ \mathsf{E}N_n^{-\min(1/\gamma,3)}}{h_1(x)},\qquad C\ >\ 0,\ x\ >\ 0,$$

где функция $h_1(x)$ имеет вид

$$h_1(x)\ =\ \begin{cases} x^{4r\gamma}, & x\ \ge\ 1,\\ x^{8r\gamma}, & 0\ <\ x\ <\ 1.\end{cases}$$

Следствие 4.1. *Пусть справедливы формулы*

$$\mathsf{E}\ N_n\ =\ n,\quad \mathsf{E}\ N_n^{-1}\ =\ \frac{1}{n}\ +\ \frac{a_1}{n^2}\ +\ o(n^{-2}),\quad a_1\ \in\ \mathbb{R},$$

$$\mathsf{E}\ N_n^{-2}\ =\ \frac{a_2}{n^2}\ +\ o(n^{-2}),\quad \mathsf{E}\ N_n^{-3}\ =\ o(n^{-2}),\quad a_2\ \in\ \mathbb{R}$$

и выполнены условия Теоремы 2.1, тогда

$$\mathsf{P}\big(S_{N_n}\ <\ x\big)\ =\ e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}}\ -\ \frac{e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}}}{2nx^{2r\gamma}}\ -$$

$$- \frac{e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}}}{n^2 x^{3r\gamma}} \left(a_2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8x^{r\gamma}} \right) + \frac{a_1 x^{r\gamma}}{2} \right) + o(n^{-2}), \quad x > 0.$$

Если же выполнены условия Теоремы 2.1, то справедливо а.р.

$$\bar{\pi}_n \equiv v_0 + v_1 \mathsf{E}\, N_n^{-1} + v_2\, \mathsf{E}\, N_n^{-2} + o(n^{-2}) =$$

$$= v_0 + \frac{v_1}{n} + \frac{v_2\, a_2 + v_1\, a_1}{n^2} + o(n^{-2}).$$

Пусть теперь меры качества деятельности страховой компании в случае неслучайного и случайного числа клиентов имеют вид

$$\pi_n^* = \mathsf{E}\, S_n^p = n^{-\frac{p}{r\gamma}}\, \mathsf{E}\, X_{(n)}^p$$

и

$$\bar{\pi}_n = \mathsf{E}\, S_{N_n}^p = N_n^{-\frac{p}{r\gamma}}\, \mathsf{E}\, X_{(N_n)}^p, \quad p > 0. \tag{4.2}$$

Теперь непосредственно из Следствия 4.1, Теоремы 2.2 и формулы (1.6) получается формула для асимптотического дефекта.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия Следствия 4.1 и Теоремы 2.2, тогда для асимптотического дефекта (добавочное число клиентов) при мерах качества (4.2) справедлива формула*

$$d = \frac{v_2\, (a_2 - 1)}{v_1} + a_1.$$

5. Случай усеченных биномиального распределения и распределения Пуассона

Пусть с.в. N имеет усечённое в нуле биномиальное распределение с параметрами n и $p \in (0, 1)$, то есть

$$\mathsf{P}\big(N = i\big) = \frac{1}{1 - q^n} \binom{n}{i} p^i\, q^{n-i}, \quad q = 1 - p, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.1}$$

тогда

$$\mathsf{E}\, N = \frac{np}{1 - q^n}$$

и в работе [22] (см. (2.18) - (2.20)) получены следующие асимптотические формулы

$$\mathsf{E}\, N^{-1} = \frac{1}{1 - q^n} \left(\frac{1}{np} + \frac{q}{(np)^2} + O\big((np)^{-3}\big) \right),$$

$$\mathsf{E}\, N^{-2} = \frac{1}{1 - q^n} \left(\frac{1}{(np)^2} + O\big((np)^{-3}\big) \right),$$

$$\mathsf{E}\, N^{-3} = \frac{1}{1 - q^n} \left(\frac{1}{(np)^3} + O\big((np)^{-4}\big) \right).$$

Определим теперь случайный индекс N_n как с.в. N с параметрами $nm, \quad n, m \in \mathbb{N}, m$ - фиксировано и $p = 1/m, \ n \to \infty$. Тогда из последних формул получаем

$$\mathsf{E}\, N_n^{-1} = \frac{1}{1 - (1-1/m)^{nm}} \left(\frac{1}{n} + \frac{1-1/m}{n^2} + O\big(n^{-3}\big)\right) =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1-1/m}{n^2} + O\big(n^{-3}\big),$$

аналогично

$$\mathsf{E}\, N_n^{-2} = \frac{1}{n^2} + O\big(n^{-3}\big),$$

$$\mathsf{E}\, N_n^{-3} = \frac{1}{n^3} + O\big(n^{-4}\big).$$

В работе [3] (Теорема 5.1) доказана следующая

Теорема 5.1. *Пусть случайный индекс N_n имеет распределение(5.1) с параметрами $nm, \quad n, \ m \in \mathbb{N}, \ m$ - фиксировано и $p = 1/m, \ n \to \infty$, тогда при выполнении условий Теоремы 2.1, справедливо а. р.*

$$\mathsf{P}\big(S_{N_n} < x\big) = e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}} - \frac{e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}}}{2nx^{2r\gamma}} -$$

$$- \frac{e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}}}{n^2 x^{3r\gamma}} \left(\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8x^{r\gamma}}\right) + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right) x^{r\gamma}}{2}\right) + o(n^{-2}), \quad x > 0.$$

Теперь непосредственно из Теоремы 4.2, формул (4.2) и (1.6) получается формула для асимптотического дефекта.

Следствие 5.1. *Пусть выполнены условия Теоремы 5.1, тогда для асимптотического дефекта (добавочное число клиентов) при мере качеств (4.2) справедлива формула*

$$d = 1 - \frac{1}{m}.$$

Пусть теперь с.в. M имеет усечённое в нуле распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, то есть

$$\mathsf{P}\big(M = i\big) = \frac{e^{-\lambda}\, \lambda^i}{i!\, (1 - e^{-\lambda})}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{5.2}$$

тогда

$$\mathsf{E}\, M = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}$$

и в работе [22] (см. (3.7)) получены следующие асимптотические формулы

$$\mathsf{E}\, M^{-g} = \frac{1}{\lambda^g\, (1 - e^{-\lambda})} \left(1 + \frac{g(g+1)}{2\lambda} + \frac{g(10 + 21g + 14g^2 + 3g^3)}{24\lambda^2} + O\big(\lambda^{-3}\big)\right), \quad g > 0.$$

В этом случае определим случайный индекс N_n как с.в. M с параметрами $\lambda = n \in \mathbb{N}, \ n \to \infty$. Тогда из последней формулы получаем

$$\mathsf{E}\, N_n^{-g} = \frac{1}{n^g} \left(1 + \frac{g(g+1)}{2n} + \frac{g(10 + 21g + 14g^2 + 3g^3)}{24n^2} + O\big(n^{-3}\big)\right), \quad g > 0.$$

В работе [3] (Теорема 5.2) доказано следующее утверждение

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия Теоремы 2.1 и случайный индекс N_n имеет распределение(5.2) с параметром $\lambda = n$, тогда справедливо а. р.*

$$\mathsf{P}\big(S_{N_n} \ < \ x\big) \ = \ e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}} \ - \ \frac{e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}}}{2nx^{2r\gamma}} \ -$$

$$- \ \frac{e^{-\frac{1}{x^{r\gamma}}}}{n^2x^{3r\gamma}}\Big(\Big(\frac{1}{3} \ - \ \frac{1}{8x^{r\gamma}}\Big) \ + \ \frac{x^{r\gamma}}{2}\Big) \ + \ o(n^{-2}), \quad x \ > \ 0.$$

Теперь непосредственно из Теоремы 4.2, формул (4.2) и (1.6) получается формула для асимптотического дефекта.

Следствие 5.2. *Пусть выполнены условия Теоремы 5.2, тогда для асимптотического дефекта при мере качеств (4.2) справедлива формула*

$$d \ = \ 1.$$

Заключение

В работе рассмотрено конкретное распределение Бёрра (см. работы [1], [16] и, например, книгу [17], стр. 243) в применении к описанию деятельности организации, подверженной риску. Исследовано асимптотическое поведение моментов максимума потерь страховой компании (организации, подверженной риску) в простейшей модели страхования в случае, когда число факторов, приводящих к убытку (число клиентов), как случайно, так и детерминировано. Проведено асимптотическое сравнение деятельности таких организаций в терминах необходимого добавочного числа таких факторов (клиентов). Приведены явные формулы для асимптотического дефекта. Рассмотрены два конкретных примера, иллюстрирующие полученные результаты. Примеры касаются усеченных биномиальных и пуассоновских распределений, характеризующих случайное число клиентов.

Список литературы

[1] Burr I.W. Cumulative frequency functions // Annals of Mathematical Statistics. 1942. Vol. 13. Pp. 215–232.

[2] Бенинг В.Е. Об асимптотическом поведении резерва организации, подверженной риску // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 4. С. 25–42. https://doi.org/10.26456/vtpmk696

[3] Бенинг В.Е. О применении распределения Бёрра к асимптотическому исследованию поведения резерва страховой компании // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2024. № 3. С. 42–56.

[4] Гнеденко Б.В. Об оценке неизвестных параметров распределения при случайном числе независимых наблюдений // Труды Тбилисского Математического института. 1989. Т. 92. С. 146–150.

[5] Гнеденко Б.В., Фахим Х. Об одной теореме переноса // Доклады Академии наук СССР. 1969. Т. 187. С. 15–17.

[6] Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Об использовании распределения Стьюдента в задачах теории вероятностей и математической статистики // Теория вероятностей и ее применения. 2004. Т. 49, № 3. С. 417–435. https://doi.org/10.1137/S0040585X97981159

[7] Bening V.E., Korolev V.Yu. Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance. Utrecht: VSP, 2002. 434 p.

[8] Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Некоторые статистические задачи, связанные с распределением Лапласа // Информатика и ее применения. 2008. Т. 2, № 2. С. 19–34.

[9] Bening V.E. Transfer theorems concerning asymptotic expansions for the distribution functions of statistics based on samples with random sizes // Advanced Studies in Contemporary Mathematics. 2018. Vol. 28, № 2. Pp. 187–200.

[10] Bening V.E. On the asymptotic deficiency of some statistical estimators based on samples with random sizes // Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society. 2018. Vol. 21, № 2. Pp. 185–193.

[11] Бенинг В.Е. Об асимптотическом поведении квантилей распределений статистик, основанных на выборках случайного объема // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 5–12. https://doi.org/10.26456/vtpmk175

[12] Бенинг В.Е. О поведении асимптотического дефекта квантилей распределений статистик, основанных на выборках случайного объема // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 42–57. https://doi.org/10.26456/vtpmk509

[13] Бенинг В.Е. Об асимптотическом поведении резерва страховой компании // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 2. С. 35–48. https://doi.org/10.26456/vtpmk594

[14] Бенинг В.Е. О сравнении необходимых резервов организаций, подверженных риску, с помощью понятия дефект // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 3. С. 5–26.

[15] Bening V., Korolev V., Sukhareva N., Xiaoyang H., Khaydarpashich R. The Burr distribution as an asymptotic law for extreme order statistics and its application to the analysis of statistical regularities in the interplanetary magnetic field // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2024. Vol. 39, № 2. Pp. 61–74.

[16] Hakim A.R., Fithriani M., Novita M. Properties of Burr distribution and its application to heavy - tailed survival time data // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1725. ID 012016. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1725/1/012016

[17] Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. М.: Наука, 1966. 588 с.

[18] Lehmann E.L., Casella G. Theory of Point Estimation. Berlin: Springer, 1998. 589 p.

[19] Hodges J.L., Lehmann E.L. Deficiency // The Annals of Mathematical Statistics. 1970. Vol. 41, № 5. Pp. 783–801.

[20] Bening V.E. Asymptotic Theory of Testing Statistical Hypotheses: Efficient Statistics, Optimality, Power Loss, and Deficiency. Berlin: Walter de Gruyter, 2011. 277 p.

[21] Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1976. 648 с.

[22] Znidaric M. Asymptotic expansion for inverse moments of binomial and Poisson distributions. 2005. https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0511226

Образец цитирования

Бенинг В.Е. О поведении максимума в случае распределения Бёрра // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 3. С. 18–32. https://doi.org/10.26456/vtpmk714

Сведения об авторах

1. **Бенинг Владимир Евгеньевич**
профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова; старший научный сотрудник ИПИ РАН.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: bening@yandex.ru

ON THE BEHAVIOR OF EXTREME VALUES IN THE CASE OF BURR DISTRIBUTION

Bening V.E.
Lomonosov Moscow State University, Moscow
Institute of Informatics Problems of the Russian Academy of Sciences, Moscow

Received 09.07.2024, revised 19.08.2024.

The paper considers the asymptotic behavior of the moments of extreme values of an organization subjected to risk in the case when the number of factors leading to loss is random. Burr distribution is considered as loss distribution. An asymptotic comparison of the activities of such organizations is carried out in terms of the necessary additional number of such factors (asymptotic deficiency). Two examples illustrating tne obtained results are presented. These examples concern truncated Poisson and binomial distributions.

Keywords: reserve of insurance company, sample of random size, Burr distribution, asymptotic expansions, truncated Poisson and binomial distributions, extreme order statistics, asymptotic deficiency.

Citation

Bening V.E., "On the behavior of extreme values in the case of Burr distribution", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2024, № 3, 18–32 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk714

References

[1] Burr I.W., "Cumulative frequency functions", *Annals of Mathematical Statistics*, **13** (1942), 215–232.

[2] Bening V.E., "On the asymptotic behavior of the reserve of an organization at risk", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2023, №4, 25–42 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk696.

[3] Bening V.E., "On the application of the Burr distribution to an asymptotic study of the behavior of an insurance company's reserve", *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 15: Vychislitelnaya matematika i kibernetika [Bulletin of the Moscow University. Series 15: Computational Mathematics and Cybernetics]*, 2024, №3, 42–56 (in Russian).

[4] Gnedenko B.V., "On the estimation of unknown distribution parameters for a random number of independent observations", *Trudy Tbilisskogo Matematicheskogo instituta [Proceedings of the Tbilisi Mathematical Institute]*, **92** (1989), 146–150 (in Russian).

[5] Gnedenko B.V., Fakhim Kh., "On a transfer theorem", *Doklady Mathematics*, **187** (1969), 15–17 (in Russian).

[6] Bening V.E., Korolev V.Y., "On an application of the Student distribution in the theory of probability and mathematical statistics", *Theory of Probability and its Applications*, **49**:3 (2005), 377–391, https://doi.org/10.1137/S0040585X97981159.

[7] Bening V.E., Korolev V.Yu., *Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance*, VSP, Utrecht, 2002, 434 pp.

[8] Bening V.E., Korolev V.Yu., "Some statistical problems related to the Laplace distribution", *Informatics and Applications*, **2**:2 (2008), 19–34 (in Russian).

[9] Bening V.E., "Transfer theorems concerning asymptotic expansions for the distribution functions of statistics based on samples with random sizes", *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **28**:2 (2018), 187–200.

[10] Bening V.E., "On the asymptotic deficiency of some statistical estimators based on samples with random sizes", *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, **21**:2 (2018), 185–193.

[11] Bening V.E., "On asymptotic behavior of quantiles of the distributions of statistics based on the samples with random sizes", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 3, 5–12 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk175.

[12] Bening V.E., "On asymptotic behavior of quantiles deficiencies of the distributions of statistics based on the samples with random sizes", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2018, № 3, 42–57 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk509.

[13] Bening V.E., "On the asymptotic behavior of insurance company reserve", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 2, 35–48 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk594.

[14] Bening V.E., "On the organizations' risk reserves comparison based on the deficiency concept", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 3, 5–26 (in Russian).

[15] Bening V., Korolev V., Sukhareva N., Xiaoyang H., Khaydarpashich R., "The Burr distribution as an asymptotic law for extreme order statistics and its application to the analysis of statistical regularities in the interplanetary magnetic field", *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, **39**:2 (2024), 61–74.

[16] Hakim A.R., Fithriani M., Novita M., "Properties of Burr distribution and its application to heavy - tailed survival time data", *Journal of Physics: Conference Series*, **1725** (2021), 012016, https://doi.org/10.1088/1742-6596/1725/1/012016.

[17] Kendall M., Stuart A., *The Advanced Theory of Statistics*, Charles Griffin, London, 1945, 457 pp.

[18] Lehmann E.L., Casella G., *Theory of Point Estimation*, Springer, Berlin, 1998, 589 pp.

[19] Hodges J.L., Lehmann E.L., “Deficiency”, *The Annals of Mathematical Statistics*, **41**:5 (1970), 783–801.

[20] Bening V.E., *Asymptotic Theory of Testing Statistical Hypotheses: Efficient Statistics, Optimality, Power Loss, and Deficiency*, Walter de Gruyter, Berlin, 2011, 277 pp.

[21] Kramer G., *Matematicheskie metody statistiki [Mathematical methods of statistics]*, Mir Publ., Moscow, 1976 (in Russian), 648 pp.

[22] Znidaric M., *Asymptotic expansion for inverse moments of binomial and Poisson distributions*, 2005, https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0511226.

Author Info

1. **Bening Vladimir Evgenyevich**
Professor in the Department of Mathematical Statistics,
Lomonosov Moscow State University; Senior Researcher, Institute of Informatics Problems
of the Russian Academy of Sciences.

Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
E-mail: *bening@yandex.ru*