УДК 519.64

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Бештоков М.Х.
Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик

Поступила в редакцию 28.06.2024, после переработки 01.08.2024.

Исследована первая краевая задача для модифицированного уравнения влагопереноса с двумя операторами дробного дифференцирования Герасимова-Капуто разных порядков α, β. Построена разностная схема повышенного порядка точности на равномерной сетке. Методом энергетических неравенств для решения разностной задачи получены априорные оценки при различных значениях α, β. Из полученных оценок следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью равной порядку аппроксимации.

Ключевые слова: первая краевая задача, априорная оценка, модифицированного уравнение влагопереноса, дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Герасимова-Капуто.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 3. С. 42–54.
https://doi.org/10.26456/vtpmk713

Введение

Важной задачей вычислительной математики является построение и исследование разностных схем высокого порядка точности, аппроксимирующих уравнения математической физики. В последнее время для построения указанных разностных схем используются компактно-разностные схемы, т. е. схемы повышенных порядков аппроксимации и/или точности, записывающиеся на стандартных для данного уравнения шаблонах.

Построению и исследованию схем повышенного порядка точности посвящены работы авторов [1-5].

Вопросы передачи тепла в гетерогенной среде [6], переноса влаги в почвогрунтах [7-8], фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах [9]-[10], приводят к дифференциальному уравнению в частных производных гиперболического типа

$$u_t = (k(x,t)u_x)_x + (\eta(x,t)u_x)_{xt} + r(x,t)u_x - q(x,t)u(x,t) + f(x,t). \qquad (*)$$

Уравнение (*) принято называть псевдопараболическим уравнением [11] или уравнением соболевского типа [12,13].

Целью и новизной настоящей работы является построение и исследование разностной схемы высокого порядка точности для решения первой начально-краевой задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с двумя операторами дробного дифференцирования Герасимова-Капуто разных порядков α, β. Разностная схема повышенного порядка аппроксимации построена на равномерной сетке. Методом энергетических неравенств для решения разностной задачи получены априорные оценки при различных значениях α, β. Из полученных оценок следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью равной порядку аппроксимации.

Исследованию различных краевых задач для модифицированного уравнения влагопереноса посвящены работы автора [14-17].

1. Постановка задачи

В замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим первую начально-краевую задачу для модифицированного уравнения влагопереноса с двумя операторами дробного дифференцирования Герасимова-Капуто разных порядков [18,19]

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = k(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\partial_{0t}^{\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(t)u(x,t) + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t \le T, \qquad (1)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 \le x \le l, \qquad (3)$$

где

$$0 < c_0 \le k(t) \le c_1, \quad A = const > 0, \quad |q(t)| \le c_2,$$
$$u(x,t) \in C^{6,3}(\overline{Q}_T), \quad k(t), q(t) \in C^1[0,T], \quad f(x,t) \in C^{6,1}(\overline{Q}_T), \qquad (4)$$

$\partial_{0t}^{\gamma} u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int\limits_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\gamma}d\tau,$ − дробная производная в смысле Капуто порядка γ, $0 < \alpha < 1$, $c_i = const > 0, i = 0,1,2$, $\partial_{0t}^{\gamma} u = D_{0t}^{\gamma} u - \frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\gamma}, D_{0t}^{\gamma} u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{u d\tau}{(t-\tau)^\gamma}$− дробная производная в смысле Римана-Лиувилля порядка γ.

По ходу изложения будем также использовать положительные постоянные числа $M_i,\ i = 1,2,...$, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

2. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Для решения задачи (1)-(3) применим метод конечных разностей. Для этого на равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, где $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = \overline{0,N},\ h = l/N\}$, $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0,1,...,j_0,\ \tau = T/j_0\}$ дифференциальной задаче (1)-(3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^4+\tau^2)$ при $\alpha=\beta$ и $O(h^4+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}})$ при $\alpha\neq\beta$ [5, 20–22]:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\mathcal{H}_h y = a y^{(\sigma)}_{\bar{x}x} + A\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}} y_{\bar{x}x} - d\mathcal{H}_h y^{(\sigma)} + \mathcal{H}_h\varphi, \quad i=\overline{1,N-1}, j=\overline{0,M-1}, \tag{5}$$

$$y^{(\sigma)}_0 = y^{(\sigma)}_N = 0,\ t\in\bar{\omega}_\tau, \tag{6}$$

$$y(x_i,0) = u_0(x_i),\ x\in\bar{\omega}_h, \tag{7}$$

где $\Delta^{\gamma}_{0t_{j+\sigma}} y = \frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)}\sum\limits_{s=0}^{j} c^{(\gamma,\sigma)}_{j-s} y^s_t$ — дискретный аналог дробной производной Герасимова-Капуто порядка $\gamma,\ 0<\alpha<1$, обеспечивающий порядок точности $O(\tau^{3-\gamma})$ [21].

$$\mathcal{H}_h y^j_i = \frac{1}{12}\left(y^j_{i+1} + 10y^j_i + y^j_{i-1}\right) = y^j_i + \frac{h^2}{12}y^j_{\bar{x}x,i}, \quad i=1,\ldots,N-1,$$

$$a^{(\gamma,\sigma)}_0 = \sigma^{1-\gamma},\ a^{(\gamma,\sigma)}_l = \Big(l+\sigma\Big)^{1-\gamma} - \Big(l-1+\sigma\Big)^{1-\gamma},\ l\geq 1,$$

$$b^{(\gamma,\sigma)}_l = \frac{1}{2-\gamma}\Big[(l+\sigma)^{2-\gamma} - (l-1+\sigma)^{2-\gamma}\Big] - \frac{1}{2}\Big[(l+\sigma)^{1-\gamma} + (l-1+\sigma)^{1-\gamma}\Big],\ l\geq 1,$$

$$\text{при } j=0, \quad c^{(\gamma,\sigma)}_0 = a^{(\gamma,\sigma)}_0;$$

$$\text{при } j>0, \quad c^{(\gamma,\sigma)}_s = \begin{cases} a^{(\gamma,\sigma)}_0 + b^{(\gamma,\sigma)}_1,\ s=0,\\ a^{(\gamma,\sigma)}_s + b^{(\gamma,\sigma)}_{s+1} - b^{(\gamma,\sigma)}_s,\ 1\leq s\leq j-1,\\ a^{(\gamma,\sigma)}_j - b^{(\gamma,\sigma)}_j,\ s=j,\end{cases}$$

$$c^{(\gamma,\sigma)}_s > \frac{1-\gamma}{2}(s+\sigma)^{-\gamma} > 0,\ \sigma = 1-\frac{\gamma}{2},$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j,\ a^j = k\big(t_{j+\sigma}\big),\ d^j = q(t_{j+\sigma}),\ \varphi^j_i = f(x_i,t_{j+\sigma}).$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия ограниченности и гладкости (4), а также выполнены условия сопряжения граничных и начальных условий (2), (3) с уравнением (1), тогда существует такое τ_0, что если $\tau\leq\tau_0$, то для решения разностной задачи (5)-(7) справедливы априорные оценки:*

1. В случае, когда $\alpha>\beta$;

$$\|y^{j+1}\|^2_0 \leq M_1\bigg(\|y^0\|^2_0 + \max_{0\leq j'\leq j}\|\varphi\|^2_0\bigg). \tag{8}$$

2. В случае, когда $\alpha=\beta$

$$\|y^{j+1}\|^2_{W^1_2(0,l)} \leq M_2\bigg(\|y^0\|^2_{W^1_2(0,l)} + \max_{0\leq j'\leq j}\|\varphi\|^2_0\bigg), \tag{9}$$

где $\|y^{j+1}\|^2_{W_2^1(0,l)} = \|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\overline{x}}^{j+1}]|_0^2$.

3. В случае, когда $\alpha < \beta$

$$\|y_{\overline{x}}^{j+1}]|_0^2 \le M_3\left(\|y_{\overline{x}}^0]|_0^2 + \max_{0\le j'\le j}\|\varphi\|_0^2\right), \tag{10}$$

где $M_1, M_2, M_3 = const > 0$, *не зависящие от* h *и* τ.

Доказательство. Априорные оценки найдем методом энергетических неравенств. Для этого введем скалярные произведения и норму:

$$(u,v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad (u,v] = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i h, \quad (u,u) = (1,u^2) = \|u(\cdot,t)\|_0^2 = \|u\|_0^2.$$

Справедлива следующая [20, с. 109, лемма 3]

Лемма 1. *Для всякой функции* $y(x)$, *заданной на равномерной сетке*

$$\bar\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 0,1,...,N, x_0 = 0, x_N = l\}$$

и обращающейся в нуль при $x = 0$ *и* $x = l$, *справедливы оценки*

$$\frac{h^2}{4}\|y_{\bar x}]|_0^2 \le \|y\|_0^2 \le \frac{l^2}{8}\|y_{\bar x}]|_0^2.$$

Получим некоторые вспомогательные неравенства с учетом этой леммы:

$$(y, \mathcal{H}_h y) = \left(y, y + \frac{h^2}{12}y_{\bar x x}\right) = (y,y) - \left(1, \frac{h^2}{12}(y_{\bar x})^2\right) \ge \left(1, y^2 - \frac{1}{3}y^2\right) =$$

$$= \left(1, \frac{2}{3}y^2\right) = \frac{2}{3}\|y\|_0^2. \tag{11}$$

$$\left(1, \left(y + \frac{h^2}{12}y_{\bar x x}\right)^2\right) = \left(1, y^2 + \frac{2h^2}{12}yy_{\bar x x} + \frac{h^4}{144}y^2_{\bar x x}\right) = \left(1, y^2 - \frac{2h^2}{12}(y_{\bar x})^2 + \frac{h^4}{144}y^2_{\bar x x}\right).$$

Из этого следует

$$(1,y^2) - \left(1, \frac{2h^2}{12}(y_{\bar x})^2\right) \le \left(1, \left(y + \frac{h^2}{12}y_{\bar x x}\right)^2\right) \le (1,y^2) + \left(1, \frac{h^4}{144}y^2_{\bar x x}\right).$$

Тогда из последнего получим неравенство

$$(1,y^2) - \frac{2}{3}(1,y^2) \le \left(1, \left(y + \frac{h^2}{12}y_{\bar x x}\right)^2\right) \le (1,y^2) + \frac{1}{9}(1,y^2).$$

Итак,

$$\frac{1}{3}\|y\|_0^2 \le \|\mathcal{H}_h y\|_0^2 \le \frac{10}{9}\|y\|_0^2. \tag{12}$$

Найдём теперь априорную оценку, для этого воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим тогда уравнение (5) скалярно на $\mathcal{H}_h y^{(\sigma)}$:

$$\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\mathcal{H}_h y, \mathcal{H}_h y^{(\sigma)}\right) = \left(a y^{(\sigma)}_{\bar{x}x}, \mathcal{H}_h y^{(\sigma)}\right) + \left(A\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}} y_{\bar{x}x}, \mathcal{H}_h y^{(\sigma)}\right) -$$

$$- \left(d\mathcal{H}_h y^{(\sigma)}, \mathcal{H}_h y^{(\sigma)}\right) + \left(\mathcal{H}_h \varphi, \mathcal{H}_h y^{(\sigma)}\right). \tag{13}$$

Преобразуем суммы, входящие в тождество (13), с учетом (6), (11), (12), леммы 1 и леммы 1 из [21]

$$\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\mathcal{H}_h y, \mathcal{H}_h y^{(\sigma)}\right) \geq \frac{1}{2}\left(1, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\left(\mathcal{H}_h y\right)^2\right) \geq \frac{1}{2}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|\mathcal{H}_h y\|_0^2; \tag{14}$$

$$\left(a y^{(\sigma)}_{\bar{x}x}, \mathcal{H}_h y^{(\sigma)}\right) = \left(a y^{(\sigma)}_{\bar{x}x}, y^{(\sigma)} + \frac{h^2}{12} y^{(\sigma)}_{\bar{x}x}\right) = -\left(a, \left(y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\right)^2\right] + \left(\frac{ah^2}{12}, \left(y^{(\sigma)}_{\bar{x}x}\right)^2\right) \leq$$

$$\leq -c_0\|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2 + \frac{c_0}{3}\|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2 = -\frac{2c_0}{3}\|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2; \tag{15}$$

$$\left(A\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}} y_{\bar{x}x}, \mathcal{H}_h y^{(\sigma)}\right) = \left(A\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}} y_{\bar{x}x}, y^{(\sigma)} + \frac{h^2}{12} y^{(\sigma)}_{\bar{x}x}\right) \leq -\left(\frac{A}{2}, \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\left(y_{\bar{x}}\right)^2\right] +$$

$$+\left(\frac{Ah^2}{24}, \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\left(y_{\bar{x}x}\right)^2\right) \leq -\frac{A}{2}\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \frac{Ah^2}{24}\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar{x}x}\|_0^2 \leq$$

$$\leq -\frac{A}{2}\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \frac{A}{6}\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar{x}}]|_0^2 = -\frac{A}{3}\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar{x}}]|_0^2; \tag{16}$$

$$-\left(d\mathcal{H}_h y^{(\sigma)}, \mathcal{H}_h y^{(\sigma)}\right) \leq \left(d, \left(\mathcal{H}_h y^{(\sigma)}\right)^2\right) \leq c_2\|\mathcal{H}_h y^{(\sigma)}\|_0^2; \tag{17}$$

$$\left(\mathcal{H}_h \varphi, \mathcal{H}_h y^{(\sigma)}\right) \leq \frac{1}{2}\|\mathcal{H}_h y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{2}\|\mathcal{H}_h \varphi\|_0^2. \tag{18}$$

Принимая во внимание преобразования (14)-(18), из (13) находим

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|\mathcal{H}_h y\|_0^2 + \|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2 + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar{x}}]|_0^2 \leq M_1\|\mathcal{H}_h y^{(\sigma)}\|_0^2 + M_2\|\mathcal{H}_h \varphi\|_0^2. \tag{19}$$

Перепишем (19) в другой форме

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|\mathcal{H}_h y\|_0^2 + \|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2 + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar{x}}]|_0^2 \leq M_3^{\sigma}\|\mathcal{H}_h y^{j+1}\|_0^2 + M_4^{\sigma}\|\mathcal{H}_h y^j\|_0^2 + M_2\|\mathcal{H}_h \varphi\|_0^2. \tag{20}$$

Случай 1. Пусть $\alpha > \beta$, тогда на основании леммы 7 [17] из (20) получаем

$$\|\mathcal{H}_h y^{j+1}\|_0^2 \leq M_5\left(\|\mathcal{H}_h y^0\|_0^2 + \max_{0\leq j'\leq j}\|\mathcal{H}_h \varphi^{j'}\|_0^2\right),$$

из последнего с учетом (12) находим

$$\|y^{j+1}\|_0^2 \leq M_6\left(\|y^0\|_0^2 + \max_{0\leq j'\leq j}\|\varphi^{j'}\|_0^2\right), \tag{21}$$

где $M_6 = const > 0$, не зависящая от h и τ.
Случай 2. Пусть $\alpha = \beta$, тогда на основании леммы 7 [17] и (12) из (20) получаем

$$\|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}]|_0^2 \le M_7\left(\|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0]|_0^2 + \max_{0\le j'\le j}\|\varphi^{j'}\|_0^2\right), \tag{22}$$

где $M_7 = const > 0$, не зависящая от h и τ.
Случай 3. Пусть $\alpha < \beta$, тогда с учетом леммы и (12) из (20) получаем

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta}\|y_{\bar{x}}]|_0^2 \le M_8^{\sigma}\|y_{\bar{x}}^{j+1}]|_0^2 + M_9^{\sigma}\|y_{\bar{x}}^{j}]|_0^2 + M_{10}\|\varphi\|_0^2. \tag{23}$$

Из (23) на основании леммы 7 [17] получаем

$$\|y_{\bar{x}}^{j+1}]|_0^2 \le M_{11}\left(\|y_{\bar{x}}^0]|_0^2 + \max_{0\le j'\le j}\|\varphi^{j'}\|_0^2\right), \tag{24}$$

где $M_{11} = const > 0$, не зависящая от h и τ.

Из полученных оценок (21), (22), (24) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (5)-(7) по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи (5)-(7) к решению дифференциальной задачи (1)-(3) так, что существует такое τ_0, что при $\tau \le \tau_0$ справедливы оценки:

1. в случае, когда $\alpha > \beta$: $\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_0^2 \le M_{12}\left(h^4 + \tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\right)$;
2. в случае, когда $\alpha = \beta$: $\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1} - u_{\bar{x}}^{j+1}]|_0^2 \le M_{13}\left(h^4 + \tau^2\right)$;
3. в случае, когда $\alpha < \beta$: $\|y_{\bar{x}}^{j+1} - u_{\bar{x}}^{j+1}]|_0^2 \le M_{14}\left(h^4 + \tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\right)$,

где $M_{12}, M_{13}, M_{14} = const > 0$ зависят только от входных данных задачи (1)-(3) и не зависят от параметров сетки h и τ. □

3. Тестовая задача и численные результаты

Коэффициенты уравнения и граничных условий дифференциальной задачи (1)-(3) подбираются таким образом, чтобы были выполнены условия ограниченности и гладкости (4) и точным решением задачи была функция $u(x,t) = t^3(x^4 - lx^3)$.

Ниже в Таблице 1 при уменьшении шагов сетки приведены максимальные значения погрешности ($z = y - u$) и вычислительный (апостериорный) порядок сходимости (ПС) в нормах $\|\cdot\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(\bar{w}_{h\tau})} = \max\limits_{(x_i,t_j)\in\bar{w}_{h\tau}}|y|$, когда $h^2 = \tau$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации $O(h^4 + \tau^2)$.

Вычислительный (апостериорный) порядок сходимости будем определять по известному принципу Рунге [23]. Для этого будем проводить вычисления с шагом $2h$, а затем с шагом h, после чего вычислять порядок сходимости (ПС) по формуле

$$\text{ПС} = \log_2\frac{||z_1||}{||z_2||},$$

где z_1 и z_2 – погрешности, соответствующие шагам $2h$, h.

Таблица 1: *Изменение погрешности и порядка сходимости в нормах* $\|\cdot\|_0$ *и* $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ *для задачи (1)–(3) при уменьшении размера сетки при различных значениях* $\alpha = 0.01; 0.5; 0.99$, $\beta = 0.01; 0.5; 0.99$ *на* $t = 1$, *когда* $h^2 = \tau$

α	β	h	$\max\limits_{0<j<m} \|z^j\|_0$	ПС в $\|\cdot\|_0$	$\|z\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$
0.01	0.01	$\frac{1}{5}$	1.1147720e-6		1.8157917e-6	
		$\frac{1}{10}$	7.0577809e-8	3.981390	1.1509852e-7	3.979658
		$\frac{1}{20}$	4.4159141e-9	3.998431	7.3571537e-9	3.967578
		$\frac{1}{40}$	2.7625905e-10	3.998618	4.6024932e-10	3.998660
0.5		$\frac{1}{5}$	8.1008049e-5		1.3052182e-4	
		$\frac{1}{10}$	5.5550412e-6	3.866196	8.9662825e-6	3.863637
		$\frac{1}{20}$	4.0374892e-7	3.782267	6.4279658e-7	3.802076
		$\frac{1}{40}$	3.2362414e-8	3.641067	5.0381249e-8	3.673403
0.99		$\frac{1}{5}$	7.5828512e-5		1.2434066e-4	
		$\frac{1}{10}$	5.0285336e-6	3.914531	8.1861441e-6	3.924970
		$\frac{1}{20}$	3.7358899e-7	3.750614	6.0240715e-7	3.764373
		$\frac{1}{40}$	3.8244762e-8	3.288118	5.8650888e-8	3.360514
0.01	0.5	$\frac{1}{5}$	1.4839443e-4		2.4828071e-4	
		$\frac{1}{10}$	1.5228455e-5	3.284595	2.5407919e-5	3.288622
		$\frac{1}{20}$	1.6896338e-6	3.171987	2.8854297e-6	3.138420
		$\frac{1}{40}$	1.9789472e-7	3.093906	3.3854540e-7	3.091365
0.5		$\frac{1}{5}$	4.0022071e-5		6.5145234e-5	
		$\frac{1}{10}$	2.4982921e-6	4.001782	4.0729747e-6	3.999505
		$\frac{1}{20}$	1.5508567e-7	4.009805	2.5818429e-7	3.979610
		$\frac{1}{40}$	9.6520489e-9	4.006086	1.6066538e-8	4.006270
0.99		$\frac{1}{5}$	1.4869749e-4		2.4862575e-4	
		$\frac{1}{10}$	1.5502640e-5	3.261794	2.5741587e-5	3.271803
		$\frac{1}{20}$	1.7664823e-6	3.133563	2.9937346e-6	3.104083
		$\frac{1}{40}$	2.1706163e-7	3.024703	3.6551126e-7	3.033959
0.01	0.99	$\frac{1}{5}$	7.3954608e-5		1.2097144e-4	
		$\frac{1}{10}$	7.8558544e-6	3.234800	1.2910125e-5	3.228092
		$\frac{1}{20}$	1.2806363e-6	2.616907	2.1753168e-6	2.569206
		$\frac{1}{40}$	2.7478120e-7	2.220506	4.6821466e-7	2.215984
0.5		$\frac{1}{5}$	7.9290237e-5		1.2730055e-4	
		$\frac{1}{10}$	8.6051598e-6	3.203869	1.4005193e-5	3.184205
		$\frac{1}{20}$	1.3763319e-6	2.644374	2.3086741e-6	2.600826
		$\frac{1}{40}$	2.8618736e-7	2.265797	4.8421341e-7	2.253350
0.99		$\frac{1}{5}$	5.5100178e-5		8.9862396e-5	
		$\frac{1}{10}$	3.4669860e-6	3.990303	5.6561551e-6	3.989824
		$\frac{1}{20}$	2.1632200e-7	4.002430	3.6071846e-7	3.970876
		$\frac{1}{40}$	1.3490497e-8	4.003165	2.2493919e-8	4.003266

Заключение

Настоящая работа посвящена изучению первой краевой задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с двумя операторами дробного дифференцирования Герасимова-Капуто разных порядков α, β. Для приближенного решения поставленной задачи на равномерной сетке построена разностная схема высокого порядка точности. Методом энергетических неравенств для решения разностной задачи получены априорные оценки при различных значениях α, β. Из полученных оценок следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным. В предположении существования точного решения в классе достаточно гладких функций, а также в силу линейности рассматриваемой задачи полученные оценки позволяют утверждать сходимость приближенного решения к точному решению со скоростью $O(h^4 + \tau^2)$ при $\alpha = \beta$ и $O(h^4 + \tau^{2-\alpha})$ при $\alpha \neq \beta$, где $\alpha, \beta-$ порядки дробных производных Герасимова-Капуто.

Список литературы

[1] Микеладзе Ш.Е. О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типов // Известия Академии наук СССР. Отделение математических и естественных наук. Серия математическая. 1941. Т. 5, № 1. С. 57–74.

[2] Толстых А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэродинамики. М.: Наука, 1990. 230 с.

[3] Lele S.K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution // Journal of Computational Physics. 1992. Vol. 103, № 1. Pp. 16–42.

[4] Gao G.H., Sun Z.Z. A compact finite difference scheme for the fractional subdiffusion equations // Journal of Computational Physics. 2011. Vol. 230, № 3. Pp. 586–595.

[5] Liao H.L., Sun Z.Z. Maximum norm error bounds of ADI and compact ADI methods for solving parabolic equations // Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2010. Vol. 26, № 1. Pp. 37–60.

[6] Рубинштейн Л.И. К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Известия Академии наук СССР. Серия географическая. 1948. Т. 12, № 1. С. 27–45.

[7] Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 352 с.

[8] Hallaire M., Parcevaux S., Bouchet R.J. L'eau et la production vegetale. Paris: Institut National De La Recherche Agronomique, 1964. 455 p.

[9] Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 25, № 5. С. 852–864.

[10] Дзекцер Е.С. Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Доклады Академии наук СССР. 1975. Т. 220, № 3. С. 540–543.

[11] Showalter R.E., Ting T.W. Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 1970. Vol. 1, № 1. Pp. 1–26.

[12] Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Известия Академии наук СССР. Отделение математических и естественных наук. Серия математическая. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.

[13] Свешников А.А., Альшин А.Б., Корпусов М.О. Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007. 736 с.

[14] Бештоков М.Х. Метод Римана для решения нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2013. Т. 4, № 33. С. 15–24.

[15] Бештоков М.Х. Краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений дробного порядка и разностные методы их решения // Известия вузов. Математика. 2019. № 2. С. 3–12.

[16] Бештоков М.Х. Численное исследование начально-краевых задач для уравнения соболевского типа с дробной по времени производной // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 2. С. 185–202.

[17] Бештоков М.Х. Разностная схема повышенного порядка аппроксимации для уравнения Аллера с переменными коэффициентами // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2023. № 4. С. 13–17.

[18] Герасимов А.Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // Прикладная математика и механика. 1948. № 12. С. 251–260.

[19] Caputo H. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. 1967. Vol. 13, № 5. Pp. 529–539.

[20] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.

[21] Alikhanov A.A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // Journal of Computational Physics. 2015. № 280. Pp. 424–438.

[22] Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 415 с.

[23] Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М., 1959. 620 с.

Образец цитирования

Бештоков М.Х. О сходимости разностной схемы высокого порядка аппроксимации для модифицированного уравнения влагопереноса дробного порядка // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 3. С. 42–54. https://doi.org/10.26456/vtpmk713

Сведения об авторах

1. **Бештоков Мурат Хамидбиевич**
ведущий научный сотрудник отдела Вычислительных методов Института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук.

Россия, 360000, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89А. E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

ON THE CONVERGENCE OF A HIGH ORDER APPROXIMATION DIFFERENCE SCHEME FOR THE MODIFIED EQUATION OF FRACTIONAL ORDER MOISTURE TRANSFER

Beshtokov M.K.
Institute of applied mathematics and automation of Kabardino-Balkar scientific center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik

Received 28.06.2024, revised 01.08.2024.

The first boundary value problem for the modified moisture transfer equation with two Gerasimov-Caputo fractional differentiation operators of different orders α, β is studied. A difference scheme of a higher order of accuracy is constructed on a uniform grid. A priori estimates for different values of α, β are obtained by the method of energy inequalities for solving the difference problem. The obtained estimates imply the uniqueness and stability of the solution with respect to the right-hand side and initial data, as well as the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the original differential problem at a rate equal to the order of approximation.

Keywords: first boundary value problem, a priori estimate, modified moisture transfer equation, fractional order differential equation, Gerasimov-Caputo fractional derivative.

Citation

Beshtokov M.K., "On the convergence of a high order approximation difference scheme for the modified equation of fractional order moisture transfer", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2024, № 3, 42–54 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk713

References

[1] Mikeladze Sh.E., "On the numerical integration of elliptic and parabolic equations", *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Otdelenie matematicheskikh i estestvennykh nauk. Seriya matematicheskaya [Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Department of Mathematical and Natural Sciences. Mathematical series]*, **5**:1 (1941), 57–74 (in Russian).

[2] Tolstykh A.I., *Compact difference schemes and their application in problems of aerodynamics*, Nauka Publ., Moscow, 1990 (in Russian), 230 pp.

[3] Lele S.K., "Compact finite difference schemes with spectral-like resolution", *Journal of Computational Physics*, **103**:1 (1992), 16–42.

[4] Gao G.H., Sun Z.Z., "A compact finite difference scheme for the fractional subdiffusion equations", *Journal of Computational Physics*, **230**:3 (2011), 586–595.

[5] Liao H.L., Sun Z.Z., "Maximum norm error bounds of ADI and compact ADI methods for solving parabolic equations", *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **26**:1 (2010), 37–60.

[6] Rubinshtejn L.I., "On the issue of the process of heat propagation in heterogeneous media", *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya geograficheskaya [Proceedings of the USSR Academy of Sciences. The series is geographical]*, **12**:1 (1948), 27–45 (in Russian).

[7] Chudnovskij A.F., *Soil thermophysics*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (in Russian), 352 pp.

[8] Hallaire M., Parcevaux S., Bouchet R.J., *L'eau et la production vegetale*, Institut National De La Recherche Agronomique, Paris, 1964, 455 pp.

[9] Barenblat G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N., "On the basic concepts of the theory of filtration of homogeneous liquids in fractured rocks", *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, **25**:5 (1960), 852–864 (in Russian).

[10] Dzektser E.S., "Equations of motion of groundwater with a free surface in multilayer media", *Doklady Akademii nauk SSSR [Reports of the USSR Academy of Sciences]*, **220**:3 (1975), 540–543 (in Russian).

[11] Showalter R.E., Ting T.W., "Pseudoparabolic partial differential equations", *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **1**:1 (1970), 1–26.

[12] Sobolev S.L., "About a new problem in mathematical physics", *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Otdelenie matematicheskikh i estestvennykh nauk. Seriya matematicheskaya [Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Department of Mathematical and Natural Sciences. Mathematical series]*, **18**:1 (1954), 3–50 (in Russian).

[13] Sveshnikov A.A., Alshin A.B., Korpusov M.O. Pletner Yu.D., *Linear and nonlinear equations of the Sobolev type*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2007 (in Russian), 736 pp.

[14] Beshtokov M.Kh., "Riemann's method for solving non-local boundary value problems for pseudoparabolic equations of the third order", *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki [Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences]*, **4**:33 (2013), 15–24 (in Russian).

[15] Beshtokov M.Kh., "Boundary value problems for loaded pseudo-parabolic equations of fractional order and differential methods for their solution", *Izvestiya vuzov. Matematika [News of universities. Mathematics]*, 2019, № 2, 3–12 (in Russian).

[16] Beshtokov M.Kh., "Numerical study of initial boundary value problems for a Sobolev type equation with a time-fractional derivative", *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]*, **59**:2 (2019), 185–202 (in Russian).

[17] Beshtokov M.Kh., “A difference scheme of an increased approximation order for the Aller equation with variable coefficients”, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenij. Severo-Kavkazskij region. Seriya: Estestvennye nauki [News of higher educational institutions. The North Caucasus region. Series: Natural Sciences]*, 2023, № 4, 13–17 (in Russian).

[18] Gerasimov A.N., “Generalization of linear deformation laws and their application to problems of internal friction”, *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, 1948, № 12, 251–260 (in Russian).

[19] Caputo H., “Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent”, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **13**:5 (1967), 529–539.

[20] Samarskij A.A., *Teoriya raznostnykh skhem [Theory of Difference Schemes]*, Nauka Publ., Moscow, 1983 (in Russian), 616 pp.

[21] Alikhanov A.A., “A new difference scheme for the time fractional diffusion equation”, *Journal of Computational Physics*, 2015, № 280, 424–438.

[22] Samarskij A.A., Gulin A.B., *Ustojchivost raznostnykh skhem [Stability of difference schemes]*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (in Russian), 415 pp.

[23] Berezin I.S., Zhidkov N.P., *Calculation methods*, M., 1959 (in Russian), 620 pp.

Author Info

1. **Beshtokov Murat Khamidbievich**
Leading Researcher in the Department of Computational Methods,
Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardino-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.

Russia, 360004, Kabardino-Balkar Republic, Nalchik, 89A Shortanova str.
E-mail: *beshtokov-murat@yandex.ru*