

УДК 541.183

## МНОГОПОЛЮСНЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ОДНОРОДНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Е. М. Митюшин

ООО «Нефтегазгеофизика» (г. Тверь)

Изучены возможности получения максимального рабочего объема многополюсных магнитных систем на высококоэрцитивных постоянных магнитах для приборов ядерно-магнитного резонанса. Приведены аналитические расчёты, позволяющие наглядно представить основные закономерности изменений поля, происходящих при изменении конфигурации многополюсных магнитных систем, при этом детали, обусловленные принятыми упрощениями, уточняются с помощью численных расчётов. Получены практические данные для проектирования многополюсных магнитных систем для ЯМР исследований. Построена магнитная система (рабочий объём  $30 \text{ см}^3$ ,  $f \cong 1 \text{ МГц}$ ), с габаритами  $200 \times 200 \times 200 \text{ мм}$  и существенно уменьшенной по сравнению с имеющимися коммерческими приборами массой не более 10 кг. В системе используется 6 одинаковых магнитных диполей прямоугольной формы. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших разработках релаксометров для большеобъемных кернов.

**Ключевые слова:** ядерный магнитный резонанс (ЯМР), высококоэрцитивные постоянные магниты, магнитные диполи, многополюсные магнитные системы, ЯМР релаксометры

**1. Введение.** При исследовании свойств веществ и определении качества продукции в химической, пищевой, строительной и других отраслях производства все большее применение находят приборы ядерно-магнитного резонанса (ЯМР) [1–3]. В геологоразведке нефтяных и газовых скважин ЯМР исследования проводят с 60-х годов. Исследуют образцы горных пород, как в лабораторных условиях, так и непосредственно в скважине [4–7].

В лабораторных условиях исследования проводят с помощью импульсных ЯМР релаксометров. ЯМР релаксометры, выполненные на основе традиционных двухполюсных постоянных магнитов диаметром 100–150 мм и ярмом из магнитомягких материалов, имеют большие габариты и массу. В то же время, эти системы обеспечивают очень небольшую рабочую зону исследования ( $1\text{--}3 \text{ см}^3$ ). Разработаны также малогабаритные магнитные системы (NMR mouse), накладываемые на поверхность испытуемых объектов [8–10] и дающие информацию о свойствах их поверхностных слоёв. Такие системы пригодны для исследований свойств вещества, но они не удовлетворяют исследователей образцов горных пород. Стандартным,

представительным образцом считается керн с размерами порядка  $30 \text{ см}^3$ . Для изучения неоднородности образцов карбонатных и магматических пород с каверновой и трещиноватой пористостью необходимы релаксометры с рабочей зоной до  $2000 \text{ см}^3$  и возможностью томографического исследования этих образцов. Объем рабочей зоны определяется степенью однородности магнитного поля. Вне зависимости от величины поля, неоднородность поля в рабочей зоне не должна превосходить 0,1% от абсолютного значения поля. До последнего времени задачи подобного рода решали только в медицине с помощью MRI (magnetic resonance imaging) исследований [11–13]. При MRI исследованиях, для получения однородного поля в большом объеме (до  $3000 \text{ см}^3$ ), как правило, используют электромагниты, в том числе с криогенным охлаждением. Система электромагнитов может весить несколько тонн, и потреблять электроэнергию более 20 кВА. Для широкого производственного внедрения ЯМР, кроме медицины, где речь идет о жизни человека, эти решения экономически не приемлемы.

Новый подход к этой проблеме предложил К. Хальбах [14]. В магнитных системах Хальбаха используются новые высококоэрцитивные материалы – ферриты бария и стронция, редкоземельные магниты на основе самария и кобальта, сплавов неодим-железо-бор. Благодаря высокой коэрцитивной силе эти материалы имеют преимущественно линейное соотношение между индукцией магнита и напряженностью размагничивающего поля, в котором он находится ( $B(H)$ ). Это даёт возможность синтезировать новые магнитные системы с использованием принципа суперпозиции [14–16] и формализмов эквивалентных поверхностных токов или магнитных зарядов [17–19], которые были успешно апробированы при создании фокусированного магнитного поля для ускорителей, первый пример чего представил Хальбах в своей статье [14].

Система из магнитных диполей на основе редкоземельных материалов, расположенных на цилиндрической поверхности, вне зависимости от того, какое поле эта система создает – однородное, линейное, квадратичное – в литературе стала называться системой Хальбаха.

Имеется несколько патентов, предлагающих выполнять магнитную систему для релаксометров ЯМР по типу Хальбаха [20–22]. Однако в этих патентах не проводится анализ многополюсных магнитных систем. Упор делается на технологию создания элементарных диполей, входящих в магнитную систему. В патентах нет критериев, позволяющих оценить качество предлагаемой системы.

В данной статье, с позиций получения максимального рабочего объема исследования при ЯМР, сделана попытка определить условия, при которых возможно минимизировать габариты и вес многополюсной магнитной системы. При этом необходимо определить оптимальную

форму элементарного диполя, минимальное количество диполей в магнитной системе и их расположение на цилиндрической поверхности системы.

**2. Поле магнитного диполя.** Магнитный диполь представляет собой стержень из магнитного материала, намагниченный перпендикулярно его продольной оси. Диаметр диполя много меньше его длины. Магнитный диполь может быть выполнен только из магнитных материалов, которые в силу их высокой коэрцитивной силы позволяют намагнитить длинный стержень перпендикулярно его продольной оси. Такими материалами являются редкоземельные магниты типа Sm-Co, Nd-Fe-B.

В качестве примера на рис. 1 приведены значения поля магнитного диполя прямоугольного сечения с размерами  $40 \times 80 \times 1000$  мм. Диполь намагничен перпендикулярно длинной оси и широкой стороны. Расчет поля проводился численно, используя разработанную программу, позволяющую моделировать трехмерные поля. В основе расчета лежит метод эквивалентного контурного тока и закон Био-Савара.

Представленные результаты иллюстрируют возможность исследовать в любой точке пространства напряженность и направление вектора поля магнитов любой формы. Однако, при численных расчетах исследователь часто теряет наглядность основных закономерностей изменений поля, происходящих при изменении формы магнита и его расположения в пространстве. Общие закономерности можно получить только аналитическими методами расчета полей. При этом детали, обусловленные принятыми упрощениями, уточняются с помощью численных методов.

Наглядные аналитические расчеты удобно проводить, представляя магнитное поле в виде ряда разложения по возрастающим степеням расстояния  $r$  от начала координат до исследуемой точки  $M$ .

Магнитный потенциал  $\bar{A}$  в точке  $M$  на расстоянии  $D$  от токового элемента  $d\bar{l}$  определяется выражением [19]:

$$\bar{A} = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \oint_l \frac{d\bar{l}}{D} = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \oint_l \frac{d\bar{l}}{\sqrt{r^2 + r_1^2 + 2r \cdot r_1 \cdot \cos \gamma}} \quad (1)$$

где  $r$  – расстояние от начала координат до точки  $M$ ;  $r_1$  – расстояние от начала координат до элемента тока  $d\bar{l}$ ;  $\gamma$  – угол, под которым видны точки  $M$  и  $d\bar{l}$  из начала координат (см. рис. 2).

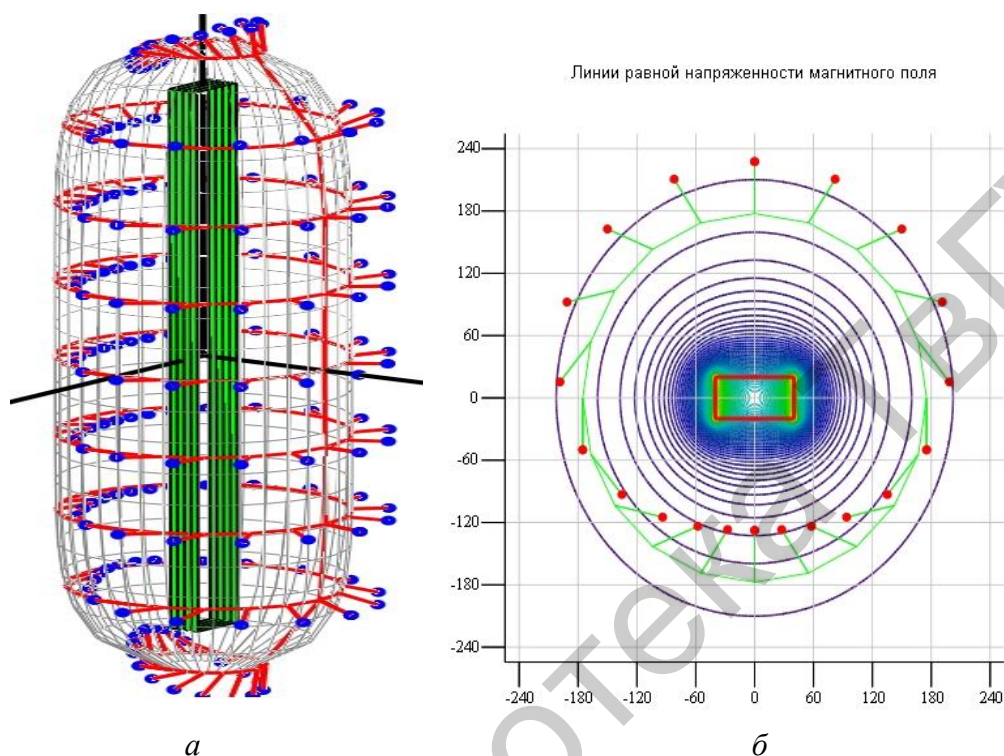


Рис. 1. Напряженность и направление вектора поля магнитного диполя вдоль его продольной оси на расстоянии 175 мм от оси (*a*); изолинии поля и направления векторов в центральном поперечном сечении (*б*)

В общем виде, для системы из двух симметричных относительно начала координат элементов тока, направленных в противоположные стороны, векторный потенциал магнитного поля в точке  $M$  будет иметь следующий вид [23]:

$$\bar{A} = \frac{\mu \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{1}{R_0} \cdot \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{R_0} \right)^{2n+1} \cdot \oint_l P_{2n+1}(\cos \gamma) d\bar{l} \right]$$

для полей внутри магнитной системы ( $r < R_0$ ), и

$$\bar{A} = \frac{\mu \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{1}{R_0} \cdot \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R_0}{r} \right)^{2n+1} \cdot \oint_l P_{2n+1}(\cos \gamma) d\bar{l} \right]$$

для  $r > R_0$ , где  $P_1(z), P_3(z), P_5(z), \dots$  – полиномы Лежандра от аргумента  $z = \cos(\gamma)$ .

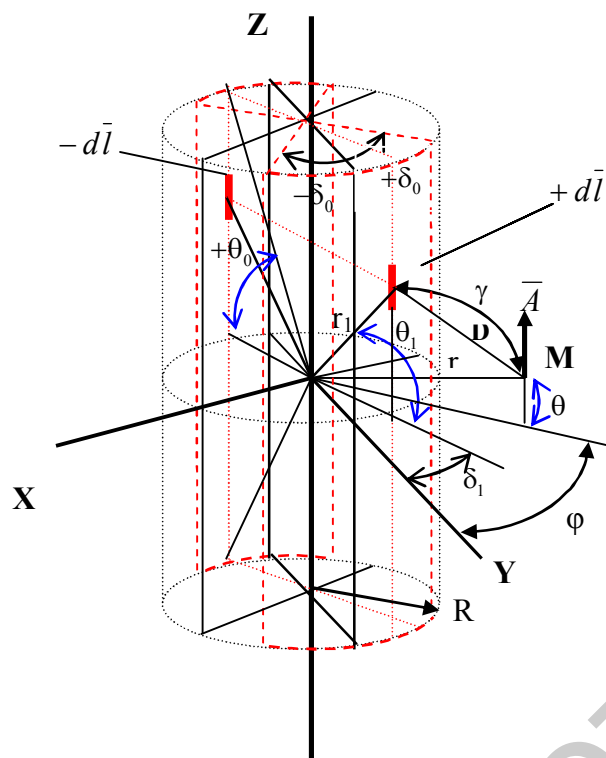


Рис. 2. Расположение элементов тока на цилиндрической поверхности.  $R_0$  – радиус цилиндра на котором находятся проводники;  $\theta_0$  – угол под которым видны концы проводников из начала координат;  $2\delta_0$  – угол, в пределах которого симметрично распределены параллельные оси Z проводники. Значения  $r, \phi, \theta$  определяют координаты точки M относительно начала координат. Значения  $r_1, \delta_1, \theta_1$  определяют элемент  $d\vec{l}$  относительно начала координат

Аргумент  $z$  определяет угловые координаты точки M ( $\phi, \theta$ ) и угловое положение элемента  $d\vec{l}$  ( $\theta_1, \delta_1$ ), т.е.  $\cos \gamma = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta + \sin \theta_1 \cdot \sin \theta \cdot \cos(\phi - \delta_1)$ . Пределы интегрирования по контуру определяются угловыми координатами ( $\theta_0, \delta_0$ ).

Анализ поля, созданного двумя симметричными элементами тока, позволяет сделать важные выводы. Вне зависимости от того, как распределены элементы тока по контуру тока, магнитный потенциал поля обладает следующими свойствами:

- внутри электромагнитной системы магнитный потенциал определяется рядами с положительными нечетными степенями  $n = 1, 3, 5 \dots$  расстояния  $r$  от центра координат;

- вне электромагнитной системы магнитный потенциал определяется рядами с отрицательными нечетными степенями  $n = -1, -3, -5 \dots$  расстояния  $r$  от центра координат.

Коэффициенты при членах ряда по степеням  $r$ , находящиеся под контурным интегралом, отражают конкретную форму катушки (в нашем случае и магнита) и координаты точки, в которой рассматривается магнитное поле. Поэтому дальнейшее рассмотрение необходимо проводить на конкретных объектах.

Для системы из двух бесконечно длинных, параллельных оси  $Z$ , проводников справедливо соотношение

$$A_z = \frac{I}{2\pi} \cdot \ln \frac{\sqrt{r^2 + R_0^2 + 2rR_0 \cdot \cos\gamma}}{\sqrt{r^2 + R_0^2 - 2rR_0 \cdot \cos\gamma}}$$

Это выражение может быть разложено в два ряда. Векторный потенциал внутри магнитной системы ( $r < R_0$ )

$$A_z = \frac{I}{\pi} \cdot \left[ \frac{r}{R_0} \cdot \cos(\varphi - \delta) + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{r}{R_0} \right)^3 \cdot \cos 3(\varphi - \delta) + \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{r}{R_0} \right)^5 \cdot \cos 5(\varphi - \delta) + \dots \right]$$

Векторный потенциал вне магнитной системы ( $r > R_0$ )

$$A_z = \frac{I}{\pi} \cdot \left[ \frac{R_0}{r} \cdot \cos(\varphi - \delta) + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{R_0}{r} \right)^3 \cdot \cos 3(\varphi - \delta) + \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{R_0}{r} \right)^5 \cdot \cos 5(\varphi - \delta) + \dots \right]$$

Если магнитная система состоит из проводников, равномерно распределенных по дуге  $2\delta_0$ , как это показано на рис. 2, то последние выражения необходимо проинтегрировать по углу  $\delta$  с учетом количества витков  $W$  в электромагнитной системе.

$$A_z = \frac{I \cdot W}{\pi \cdot \delta_0} \cdot \left[ \begin{aligned} &\frac{R_0}{r} \cdot \sin \delta_0 \cos \varphi + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{R_0}{r} \right)^3 \cdot \sin 3\delta_0 \cos 3\varphi + \\ &\frac{1}{5} \cdot \left( \frac{R_0}{r} \right)^5 \cdot \sin 5\delta_0 \cos 5\varphi + \dots \end{aligned} \right] \quad (2)$$

Напряженность магнитного поля в цилиндрической системе координат будет определена следующим образом:

$$H_\rho = \text{rot}_\rho \bar{A} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dA_z}{d\varphi} ; \quad H_\varphi = \text{rot}_\varphi \bar{A} = -\frac{dA_z}{dr} ; \quad H_z = 0 \quad (3)$$

Внутри магнитной системы  $r < R$  :

$$H_{\rho} = \frac{I \cdot w}{\pi \cdot R_0 \cdot \delta_0} \cdot \left[ \begin{array}{l} \sin \delta_0 (1) \sin \varphi + \sin 3\delta_0 \left(\frac{r}{R_0}\right)^2 \sin 3\varphi + \\ \sin 5\delta_0 \left(\frac{r}{R_0}\right)^4 \sin 5\varphi + \dots \end{array} \right], \quad (4)$$

$$H_{\varphi} = -\frac{I \cdot w}{\pi \cdot R_0 \cdot \delta_0} \cdot \left[ \begin{array}{l} \sin \delta_0 (1) \cos \varphi + \sin 3\delta_0 \left(\frac{r}{R_0}\right)^2 \cos 3\varphi + \\ \sin 5\delta_0 \left(\frac{r}{R_0}\right)^4 \cos 5\varphi + \dots \end{array} \right]$$

Первый член ряда (4) определяет постоянное поле. Остальные члены показывают изменение поля в зависимости от расстояния до центра системы.

Вне магнитной системы при  $r > R_0$ :

$$H_{\rho} = \frac{I \cdot w}{\pi \cdot R_0 \cdot \delta_0} \cdot \left[ \begin{array}{l} \sin \delta_0 \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 \sin \varphi + \sin 3\delta_0 \left(\frac{R_0}{r}\right)^4 \sin 3\varphi + \\ \sin 5\delta_0 \left(\frac{R_0}{r}\right)^6 \sin 5\varphi + \dots \end{array} \right] \quad (5)$$

$$H_{\varphi} = -\frac{I \cdot w}{\pi \cdot R_0 \cdot \delta_0} \cdot \left[ \begin{array}{l} \sin \delta_0 \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 \cdot \cos \varphi + \sin 3\delta_0 \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 \cdot \cos 3\varphi + \\ \sin 5\delta_0 \left(\frac{R_0}{r}\right)^6 \cos 5\varphi + \dots \end{array} \right]$$

Первый член ряда определяет самую медленную составляющую внешнего магнитного поля, спадающую по закону  $(1/r)^2$ . Роль каждого члена рядов (4, 5) может изменяться в зависимости от угла, в котором распределена обмотка  $\delta_0$ . При  $\delta_0 = 90^\circ$  (диполь круглого сечения) напряженность поля максимальна. При  $\delta_0 = 60^\circ$  (диполь имеет прямоугольное сечение) поле меньше, но вторая гармоника поля обращается в ноль.

Это обстоятельство оказывается решающим как для получения однородного поля внутри электромагнитной системы, так и создания однородных внешних полей. Эти поля становятся более однородными,

поэтому элементарный диполь целесообразно выполнять в поперечном сечении не круглым, а в виде прямоугольника. Соотношение узкой и широкой стороны должно быть равно  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Направление намагниченности диполя должно быть перпендикулярно длинной оси диполя и его широкой стороне.

Структура рядов не изменится, если токовые проводники будут иметь конечную длину. После интегрирования в пределах длины проводников  $(+\theta_0, -\theta_0)$ , перед каждым из членов рядов (4, 5) появятся коэффициенты, зависящие от соотношения  $\beta = \frac{2R_0}{L}$  между радиусом и длиной токовых проводников, а также от координаты  $z$  рассматриваемой точки.

Для системы проводников конечной длины первый член ряда (5), в зависимости от  $z$ , будет иметь вид:

$$H_\rho = \left[ \frac{I \cdot W}{\pi \cdot R_0 \cdot \delta_0} \right] \cdot [\sin \delta_0] \cdot \left[ \frac{\beta - \frac{z}{R_0}}{\sqrt{1 + \left(\beta - \frac{z}{R_0}\right)^2}} + \frac{\beta + \frac{z}{R_0}}{\sqrt{1 + \left(\beta + \frac{z}{R_0}\right)^2}} \right] \cdot \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 \cdot \sin \varphi, \quad (6)$$

$$H_\varphi = - \left[ \frac{I \cdot W}{\pi \cdot R_0 \cdot \delta_0} \right] \cdot [\sin \delta_0] \cdot \left[ \frac{\beta - \frac{z}{R_0}}{\sqrt{1 + \left(\beta - \frac{z}{R_0}\right)^2}} + \frac{\beta + \frac{z}{R_0}}{\sqrt{1 + \left(\beta + \frac{z}{R_0}\right)^2}} \right] \cdot \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 \cdot \cos \varphi.$$

Для остальных членов ряда зависимость от коэффициента  $\beta$  и координаты  $z$  будут иметь более сложный вид, однако уточнение этого вопроса выходит за рамки данной статьи.

Для практических целей ( $r \geq 2R_0$ ) свойства магнитного диполя, на основе аналитических и численных расчетов, можно охарактеризовать следующим образом.

1. Магнитный диполь почти по всей своей длине создает плоскопараллельное поле, перпендикулярное его продольной оси;

2. На фиксированном радиусе магнитный диполь создает поле практически равной напряженности;



3. Направление поля на фиксированном радиусе практически подчиняется закону  $\sim \sin 2\varphi$ ;

4. Напряженность поля от радиуса к радиусу спадает практически по квадратичному закону.

Уточнение этих свойств можно получить, рассматривая две или три гармоники поля в аналитическом виде, или численным путем, на основе программ моделирования трехмерного поля.

В выражении (6) первый сомножитель в квадратных скобках определяет плотность тока (А/м) обмотки, расположенной на радиусе  $R_0$  и распределенной по углу  $2\delta_0$ . (При переходе к расчету магнита эту величину необходимо заменить на значение остаточной индукции  $B_r$ ). Выражение во вторых квадратных скобках определяет форму поперечного сечения катушки электромагнита (или магнита), т.е. соотношение между его шириной и толщиной. Третьи квадратные скобки определяют поправку на конечную длину электромагнитной системы или магнита.

Магнитный диполь, в силу его свойств, стал основой при проектировании приборов для исследования скважин. Для исследования скважин в магнитном поле Земли используется электромагнитный диполь. К реально работающим приборам с дипольными магнитами относятся MRIL фирмы Halliburton [16], прибор CMR (Shlumberger) [17] с двумя или тремя магнитными диполями, создающими сфокусированное поле, прибор ЯМТК (NMRT) [18] с прямоугольным магнитным диполем. Появившиеся в последнее время рекламные проспекты о модернизации (фирма Shlumberger) и создании новых приборов (фирма Baker and Hughes [19]), ничего нового в плане магнитных систем не принесли – в них используются дипольные магниты.

**3. Система магнитных диполей на цилиндрической поверхности.** Система магнитных диполей, расположенных вплотную друг к другу на цилиндрической поверхности, была рассмотрена в работе Хальбаха [6], и в ряде патентов (см., например, [12–14]).

В настоящей работе рассматриваются диполи, дискретно расположенные на цилиндрической поверхности. На рис. 3 показано расположение бесконечно длинного магнитного диполя диаметром  $2R_0$  на поверхности цилиндра радиуса  $R$ . Диполь находится на угловом расстоянии  $\varphi_1$  от начала координат, а его плоскость намагниченности повернута на угол  $\theta_1$  от угла его расположения.

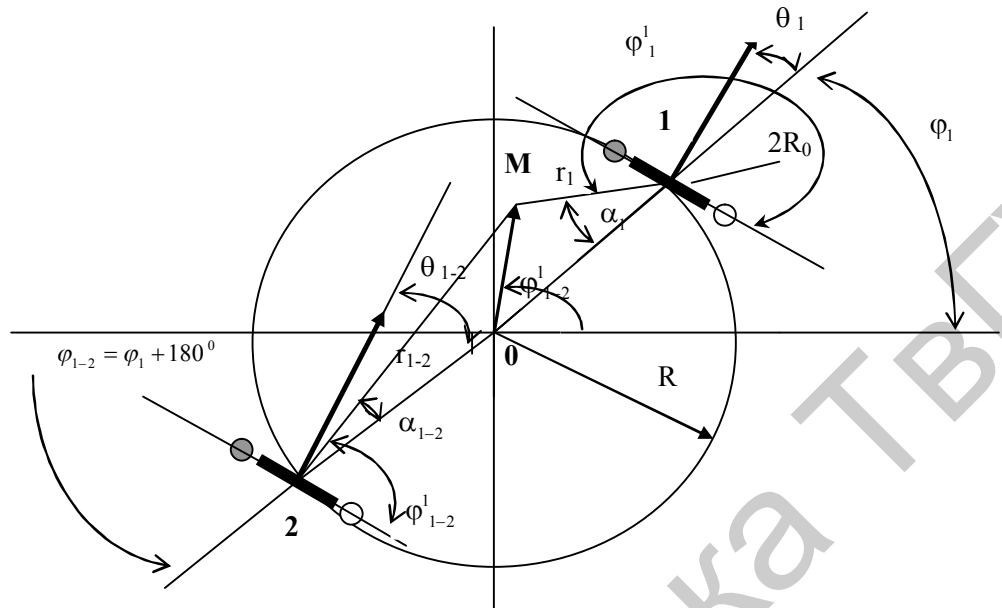


Рис. 3. Расположение двух бесконечно длинных диполей на цилиндрической поверхности.

Векторный потенциал поля диполя в точке  $M$ , согласно формуле (2), будет равен:

$$A_z = \frac{I \cdot W}{\pi \cdot \delta_0} \cdot \left[ \frac{R_0}{r_1} \cdot \sin \delta_0 \cos \varphi_1^1 + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{R_0}{r_1} \right)^3 \cdot \sin 3\delta_0 \cos 3\varphi_1^1 + \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{R_0}{r_1} \right)^5 \cdot \sin 5\delta_0 \cos 5\varphi_1^1 + \dots \right]$$

После замены  $r_1^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cdot \cos(\varphi - \varphi_1)$  получим:

$$A_z = \frac{I \cdot W}{\pi \cdot \delta_0} \cdot \left[ \frac{R_0}{R} \frac{\sin \delta_0 \cdot \cos(\varphi_1^1)}{\left( 1 + \left( \frac{\rho}{R} \right)^2 - 2 \left( \frac{\rho}{R} \right) \cos(\varphi - \varphi_1) \right)^{1/2}} + \frac{1}{3} \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 \frac{\sin 3\delta_0 \cdot \cos(3\varphi_1^1)}{\left( 1 + \left( \frac{\rho}{R} \right)^2 - 2 \left( \frac{\rho}{R} \right) \cos(\varphi - \varphi_1) \right)^{3/2}} + \dots \right] \quad (5)$$

Выражения, стоящие в знаменателе каждого из членов ряда (5) являются первородными функциями полиномов Гегенбауэра [23].

Каждый из членов ряда (5) может быть разложен в степенной ряд по  $\rho^n$ . Дальнейшее решение задачи должно свестись к суммированию рядов. Эта задача может быть решена, но, на наш взгляд, не имеет практического смысла по двум причинам:

1. Если  $R \geq 10R_0$ , то второй член ряда составляет меньше 1% от первого.

2. При правильном выборе формы диполя ( $\delta_0 = 60^\circ$ ), второй член ряда обращается в ноль.

3. Последующие члены ряда будут составлять менее 0,1% от первого члена ряда.

Поэтому, если диполь был выполнен с параметром ( $\delta_0 = 60^\circ$ ), то с большой степенью точности можно сказать, что векторный потенциал в точке М будет иметь следующее значение:

$$A_z = \frac{I \cdot W}{\pi \cdot \delta_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right) \cdot \frac{\cos(\varphi_1^1)}{\left( 1 + \left( \frac{\rho}{R} \right)^2 - 2 \cdot \left( \frac{\rho}{R} \right) \cdot \cos(\varphi - \varphi_1) \right)^{1/2}}.$$

Это решение не есть плод математических допущений – это инженерное решение, которое требует выполнить диполь определенной формы, т.е. прямоугольной формы с соотношением сторон  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

После замены  $\varphi_1^1 = 270^\circ - (\theta_1 + \alpha_1)$ , где  $\alpha_1$  – угол, под которым из центра диполя видны начало координат О и точка М, получаем

$$\cos \varphi_1^1 = -\sin \theta_1 \cdot \cos \alpha_1 - \cos \theta_1 \cdot \sin \alpha_1.$$

Из треугольника: О – начало координат, М – точка с координатами  $(\rho, \varphi)$ , 1 – точка центра диполя, расположенного под углом  $\varphi_1$  на расстоянии  $R$  от центра координат, можно определить, что  $\rho^2 = r_1^2 + R^2 - 2Rr_1 \cdot \cos \alpha_1$  и

$$r_1^2 = \rho^2 + R^2 - 2R\rho \cdot \cos(\varphi - \varphi_1),$$

поэтому

$$\cos \alpha_1 = \frac{1 - \frac{\rho}{R} \cdot \cos(\varphi - \varphi_1)}{\sqrt{1 + \left( \frac{\rho}{R} \right)^2 - 2 \left( \frac{\rho}{R} \right) \cdot \cos(\varphi - \varphi_1)}};$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{\frac{\rho}{R} \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\varphi - \varphi_1)}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{\rho}{R}\right) \cdot \cos(\varphi - \varphi_1)}}.$$

В этом случае векторный потенциал в точке  $M$  от одного диполя будет равен

$$A_{z1} = \frac{I \cdot W}{\pi \cdot \delta_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left(\frac{R_0}{R}\right) \cdot \left[ \sin \theta_1 \cdot \frac{1 - \frac{\rho}{R} \cdot \cos(\varphi - \varphi_1)}{1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{\rho}{R}\right) \cdot \cos(\varphi - \varphi_1)} + \cos \theta_1 \cdot \frac{\frac{\rho}{R} \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\varphi - \varphi_1)}}{1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{\rho}{R}\right) \cdot \cos(\varphi - \varphi_1)} \right] \quad (6)$$

Выражения в квадратных скобках, стоящие за функциями  $\sin \theta_1$  и  $\cos \theta_1$ , являются производящими функциями Чебышева первого и второго рода [23], поэтому

$$A_{z1} = \frac{I \cdot W}{\pi \cdot \delta_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left(\frac{R_0}{R}\right) \cdot \left[ -\sin \theta_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n T_n(\omega) - \cos \theta_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n U_n(\omega) \right],$$

где  $\omega = \cos(\varphi - \varphi_1)$ .

Если в магнитной системе имеется второй симметричный диполь, как это показано на рис. 3, то для второго диполя, расположенного под углом  $\varphi_1 + 180^\circ$ , получим

$$\varphi_{1-2} = \varphi_1 + 180^\circ,$$

$$\varphi_{1-2}^1 = 90^\circ - \theta_{1-2} + \alpha_{1-2},$$

$$\cos \varphi_{1-2}^1 = \sin \theta_{1-2} \cdot \cos \alpha_{1-2} - \cos \theta_{1-2} \cdot \sin \alpha_{1-2},$$

$$\rho^2 = r_{1-2}^2 + R^2 - 2Rr_{1-2} \cdot \cos \alpha_{1-2},$$

$$r_{1-2}^2 = \rho^2 + R^2 - 2R\rho \cdot \cos(180^\circ - (\varphi - \varphi_1)),$$

$$A_{z2} = \frac{I \cdot W}{\pi \cdot \delta_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right) \times \\ \times \left[ \sin \theta_{1-2} \cdot \sum_n \left( \frac{\rho}{R} \right)^n \cdot T_n(-\omega) - \cos \theta_{1-2} \cdot \sum_n \left( \frac{\rho}{R} \right)^n U_n(-\omega) \right]$$

Функция  $T_n(\omega)$  четная для четных  $n$ , т.е.  $T_{2n}(\omega) = T_{2n}(-\omega)$  и нечетная для нечетных  $n - T_{2n+1}(-\omega) = -T_{2n+1}(\omega)$ .

Функция  $U_n(\omega) = \sqrt{1-\omega^2} \cdot P_n(\omega)$ , где  $P_n(\omega)$  полином Чебышева второго рода.

$P_n(\omega)$  – четная функция для нечетных  $n$ , т.е.  $P_{2n+1}(\omega) = P_{2n+1}(-\omega)$  и нечетная функция для четных  $n - P_{2n}(-\omega) = -P_{2n}(\omega)$ .

Векторный потенциал от двух симметричных диполей с одинаковой ориентацией вектора намагниченности ( $\theta_1 = \theta_{1-2}$ ) будет иметь следующий вид:

$$A_{z1,2} = -2 \cdot \frac{I \cdot W}{\pi \cdot \delta_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right) \times \\ \times \left[ \sin \theta_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n+1} \cdot T_{2n+1}(\omega) + \sin \theta_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n+1} U_{2n+1}(\omega) \right]$$

Векторный потенциал от двух симметричных диполей с направлением намагниченности в противоположные стороны ( $\theta_{1-2} = 180^\circ + \theta_1$ ) будет иметь следующий вид:

$$A_{z1,2} = -2 \cdot \frac{I \cdot W}{\pi \cdot \delta_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right) \times \\ \times \left[ \sin \theta_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n} \cdot T_{2n}(\omega) + \cos \theta_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n} U_{2n}(\omega) \right]$$

Используя свойства функций Чебышева:

$$T_n(\omega) = \cos(n \cdot \arccos \omega) = \cos(n \cdot (\varphi - \varphi_1)),$$

$U_n(\omega) = \sin(n \cdot \arccos \omega) = \sin(n \cdot (\varphi - \varphi_1))$  для двух симметричных диполей, направленных в одну сторону, получим:

$$A_{z1,2} = -2 \cdot \frac{I \cdot W}{\pi \cdot \delta_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right) \times \left[ \sin \theta_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n+1} \cdot \cos[(2n+1) \cdot (\varphi - \varphi_1)] + \cos \theta_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n+1} \cdot \sin[(2n+1) \cdot (\varphi - \varphi_1)] \right] \quad (7)$$

Последнее выражение можно переписать в следующем виде:

$$A_{z1,2} = -2 \cdot \frac{I \cdot W}{\pi \cdot \delta_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right) \times \left\{ \left[ \sin \theta_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n+1} \left[ \cos(2n+1)\varphi \cdot \cos(2n+1)\varphi_1 + \sin(2n+1)\varphi \cdot \sin(2n+1)\varphi_1 \right] \right] + \left[ \cos \theta_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n+1} \left[ \sin(2n+1)\varphi \cdot \cos(2n+1)\varphi_1 - \cos(2n+1)\varphi \cdot \sin(2n+1)\varphi_1 \right] \right] \right\} \quad (8)$$

Предельный случай. Предположим, что имеется множество  $N = \frac{180^\circ}{\Delta\varphi}$  пар диполей, распределенных равномерно под углами  $\Delta\varphi_i$  по цилиндрической поверхности радиуса  $R$  в пределах от  $0$  до  $180^\circ$ . Каждый  $i$  диполь имеет направление намагниченности  $\theta_i = m \cdot \varphi_i$ , т.е. угол намагниченности каждого диполя кратен углу, под которым он находится.

При суммировании, бесконечно большого количества пар магнитных диполей с направлением намагниченности  $\theta_i = m \cdot \varphi_i$ , получим:

$$A_{z1,2} = -2 \cdot \frac{I \cdot W \cdot N}{\pi \cdot \delta_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right) \cdot \frac{N}{\pi} \times \left\{ \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n+1} \cos[(2n+1)\varphi] \cdot \int_0^\pi \cos[(2n+1)\varphi_i] \cdot \sin[m\varphi_i] d\varphi_i \right] + \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n+1} \sin[(2n+1)\varphi] \cdot \int_0^\pi \sin[m\varphi_i] d\varphi_i \right] + \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n+1} \sin[(2n+1)\varphi] \cdot \int_0^\pi \cos[(2n+1)\varphi_i] \cdot \cos[m\varphi_i] d\varphi_i \right] - \right\}$$

$$-\left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n+1} \cos[(2n+1)\varphi] \cdot \int_0^{\pi} \sin[(2n+1)\varphi_i] \cdot \cos[m\varphi_i] d\varphi_i \right] \quad (9)$$

Рассматривая последнее выражение можно заметить, что, в силу ортогональности функций синус и косинус, интегралы в первом и четвертом слагаемом равны нулю при любых значениях  $n$  и  $m$ . Во втором и третьем слагаемых интегралы равны нулю при  $2n+1 \neq m$  и равны конечному числу  $\frac{\pi}{2}$  при  $2n+1 = m$  [23].

Это очень важное свойство, т.к. позволяет создавать магнитные поля необходимой конфигурации.

Внутри магнитной системы при  $m = 1$  ( $\theta_i = 1 \cdot \varphi_i$ ,  $(\theta_i + \varphi_i) = 2\varphi_i$ ) магнитное поле будет однородно при  $n = 0$

$$H_{\rho} = \frac{I \cdot W \cdot N}{\delta_0 \cdot R_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \cdot (1) \cos \varphi$$

$$H_{\varphi} = -\frac{I \cdot W \cdot N}{\delta_0 \cdot R_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \cdot (1) \sin \varphi$$

Все остальные гармоники поля равны нулю.

При  $m = 3$  ( $\theta_i = 3 \cdot \varphi_i$ ,  $(\theta_i + \varphi_i) = 4\varphi_i$ ) магнитное поле будет изменяться по квадратичному закону ( $n = 1$ ):

$$H_{\rho} = 3 \cdot \frac{I \cdot W \cdot N}{\delta_0 \cdot R_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \cdot \left[ \frac{\rho}{R} \right]^2 \cdot \cos 3\varphi$$

$$H_{\varphi} = -3 \cdot \frac{I \cdot W \cdot N}{\delta_0 \cdot R_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \cdot \left[ \frac{\rho}{R} \right]^2 \cdot \sin 3\varphi$$

Как и в предыдущем случае, все остальные гармоники поля равны нулю.

Для двух симметричных диполей с противоположной ориентацией в выражении (9) все степени и коэффициенты  $2n+1$  заменяются на  $2n$ . С учётом этого при  $m = 2$  ( $\theta_i = 2 \cdot \varphi_i$ ,  $(\theta_i + \varphi_i) = 3\varphi_i$ ) магнитное поле будет изменяться по линейному закону ( $n = 1$ ):

$$H_{\rho} = 2 \cdot \frac{I \cdot W \cdot N}{\delta_0 \cdot R_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \cdot \left[ \frac{\rho}{R} \right]^1 \cdot \cos 2\varphi$$

$$H_{\varphi} = -2 \cdot \frac{I \cdot W \cdot N}{\delta_0 \cdot R_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \cdot \left[ \frac{\rho}{R} \right]^1 \cdot \sin 2\varphi$$

При  $m = 4$   $\theta_i = 4 \cdot \varphi_i$ , ( $\theta_i + \varphi_i = 5\varphi_i$ ) магнитное поле будет изменяться по кубическому закону ( $n = 2$ ):

$$H_{\rho} = 4 \cdot \frac{I \cdot W \cdot N}{\delta_0 \cdot R_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \cdot \left[ \frac{\rho}{R} \right]^3 \cdot \cos 4\varphi$$

$$H_{\varphi} = -4 \cdot \frac{I \cdot W \cdot N}{\delta_0 \cdot R_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \cdot \left[ \frac{\rho}{R} \right]^3 \cdot \sin 4\varphi$$

Эти выводы согласуются с подходом Хальбаха. Однако, в отличие от Хальбаха, они получены не для системы из кольцевого магнита, разбитого на  $N$  одинаковых кольцевых сегментов, имеющих различные направления векторов намагниченности, а для системы одинаковых диполей прямоугольной формы. Вектора намагниченности каждого из них перпендикулярны длинной оси ( $Z$ ) и широкой стороне  $d_{ш}$  диполя. Необходимое направление намагниченности в системе из множества диполей, для получения полей различной зависимости от  $\rho$ , контролируется углом поворота каждого диполя вокруг его оси ( $\theta_i$ ), в зависимости от его расположения ( $\varphi_i$ ).

В случае конечного количества диполей закон изменения поля будет иметь более сложный вид, но его также можно получить из выражения (8), которое представляется в следующем виде:

$$A_{z1,2} = -2 \cdot \frac{I \cdot W}{\pi \cdot \delta_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right) \times \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n+1} \cdot \sin(2n+1)\varphi \cdot \cos[(2n+1)\varphi_1 - \theta_1] - \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n+1} \cdot \cos(2n+1)\varphi \cdot \sin[(2n+1)\varphi_1 - \theta_1] \end{aligned} \right\}$$

При суммировании конечного количества  $N$  пар диполей получим:



$$A_{zN} = -2N \cdot \frac{I \cdot W}{\pi \cdot \delta_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right) \times$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n+1} \cdot \sin(2n+1)\varphi \cdot \sum_i^N \cos[(2n+1)\varphi_i - \theta_i] - \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n+1} \cdot \cos(2n+1)\varphi \cdot \sum_i^N \sin[(2n+1)\varphi_i - \theta_i] \end{aligned} \right\}$$

Если диполи симметрично расположены по отношению к оси Y ( $\varphi_{i+1} = -\varphi_i$ ) и угол  $\varphi_i = m\theta_i$ , то в последнем выражении, в силу нечетности функции синуса, вторая сумма равна нулю.

После перехода к напряженности магнитного поля

$$H_\rho = 2N \cdot \frac{I \cdot W}{\pi \cdot \delta_0 \cdot R_1} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_1}{R} \right)^2 \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n} \cdot \cos(2n+1)\varphi \cdot \sum_i^N \cos[(2n+1-m)\varphi_i]$$

$$H_\varphi = -2N \cdot \frac{I \cdot W}{\pi \cdot \delta_0 \cdot R_1} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_1}{R} \right)^2 \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n} \cdot \sin(2n+1)\varphi \cdot \sum_i^N \cos[(2n+1-m)\varphi_i] \quad (10)$$

**4. Системы из N пар диполей.** Однородную составляющую магнитного поля ( $n = 0$ ) можно получить, расставляя параллельно оси цилиндра симметричные пары магнитных диполей, направленных в одну сторону. Диполи могут находиться под произвольными углами  $\varphi_i$ . Однако, не переменным условием является то, что диполь, расположенный под углом  $\varphi_i$ , должен иметь направление намагниченности под углом  $2\varphi_i$ , т.е. ( $\theta_i = \varphi_i$ ).

При ограниченном количестве диполей и произвольном их расположении, кроме основной, т.е. постоянной составляющей поля, проявляются гармоники поля, которые искажают однородное поле. Для того, чтобы минимизировать влияние этих гармоник необходимо расположить их под определенными углами.

Две пары диполей ( $\theta_i = \varphi_i$ ,  $\theta_i + \varphi_i = 2\varphi_i$ ):

$$H_p = 2 \cdot \frac{I \cdot W}{\pi \cdot \delta_0 \cdot R_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \times \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n} \cos[(2n+1)\varphi] \cdot (\cos 2n\varphi_1 + \cos 2n\varphi_2) \right]$$

При  $n = 0$  имеется первая гармоника поля, с постоянной (однородной) составляющей поля с коэффициентом  $A_0 = 2$ . Коэффициенты при высших гармониках поля ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) меняют свои значения в зависимости от расположения диполей на цилиндрической поверхности, т.е. углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Для того, чтобы вторая гармоника поля (квадратичная,  $n = 1$ ) была равна нулю, необходимо выполнить следующее условие:

$$\cos 2\varphi_1 + \cos 2\varphi_2 = 0$$

Это уравнение имеет два решения при  $\varphi_1 = 0$  и при  $\varphi_2 = -\varphi_1$ .

На рис. 4 (а, б) показано изменение коэффициентов при гармониках поля, созданного двумя парами дипольных магнитов, для случая  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \text{var}$  и для случая  $\varphi_1 = -\varphi_2 = \text{var}$  (A2 – вторая гармоника ( $n = 1$ ), A4 – третья гармоника ( $n = 2$ ), A6 – четвертая гармоника ( $n = 3$ )).

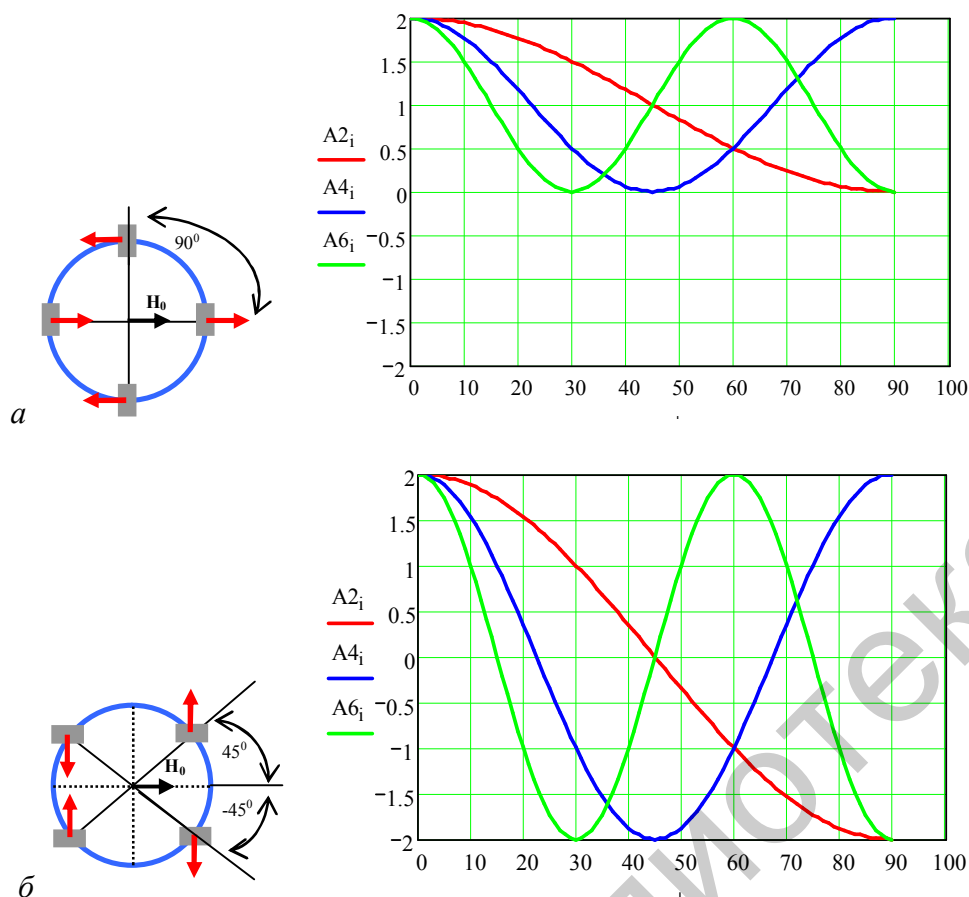
В первом случае вторая гармоника ( $n = 1$ ) поля обращается в ноль при  $\varphi_2 = 90^\circ$ . Во втором случае вторая гармоника обращается в ноль при  $\varphi_1 = 45^\circ$  и  $\varphi_2 = -45^\circ$ .

На первый взгляд, решения практически равнозначны, однако, в первом случае наибольшую протяженность однородное поле имеет по оси Y, а во втором – по оси X.

Для трёх пар диполей ( $\theta_i = \varphi_i, \theta_i + \varphi_i = 2\varphi_i$ ):

$$H_p = 2 \cdot \frac{I \cdot W}{\pi \cdot \delta_0 \cdot R_0} \cdot \sin \delta_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \times \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n} \cos[(2n+1)\varphi] \cdot (\cos 2n\varphi_1 + \cos 2n\varphi_2 + \cos 2n\varphi_3) \right].$$

Как и в предыдущем случае, имеем однородную составляющую поля с коэффициентом  $A_0 = 3$ .



Р и с . 4. Коэффициенты при гармониках поля двух пар дипольных магнитов. (а)  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \text{var}$ , (б)  $\varphi_1 = -\varphi_2 = \text{var}$

Для того, чтобы исключить вторую и третью гармоники поля, необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos 2\varphi_1 + \cos 2\varphi_2 + \cos 2\varphi_3 = 0 \\ \cos 4\varphi_1 + \cos 4\varphi_2 + \cos 4\varphi_3 = 0 \end{cases}$$

На рис. 5 (а, б) показаны оптимальные расположения трех пар диполей ( $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 60^\circ, \varphi_3 = 120^\circ$ ) и ( $\varphi_1 = 30^\circ, \varphi_2 = -30^\circ, \varphi_3 = 90^\circ$ ).

На рис. 5 показано изменение коэффициентов при гармониках поля, созданного тремя парами дипольных магнитов, для случаев  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \text{var}, \varphi_3 = 2\varphi_2$  и  $\varphi_1 = -\varphi_2 = \text{var}, \varphi_3 = 3\varphi_1$  ( $A_2$  – вторая гармоника ( $n = 1$ ),  $A_4$  – третья гармоника  $n = 2$ ,  $A_6$  – четвертая гармоника ( $n = 3$ )).

Две высшие гармоники поля, следующие за первой (однородной) составляющей поля, обращаются в ноль при расположении пар диполей

$$\text{с шагом } \varphi_i = \frac{180^\circ}{N=3} = 60^\circ.$$

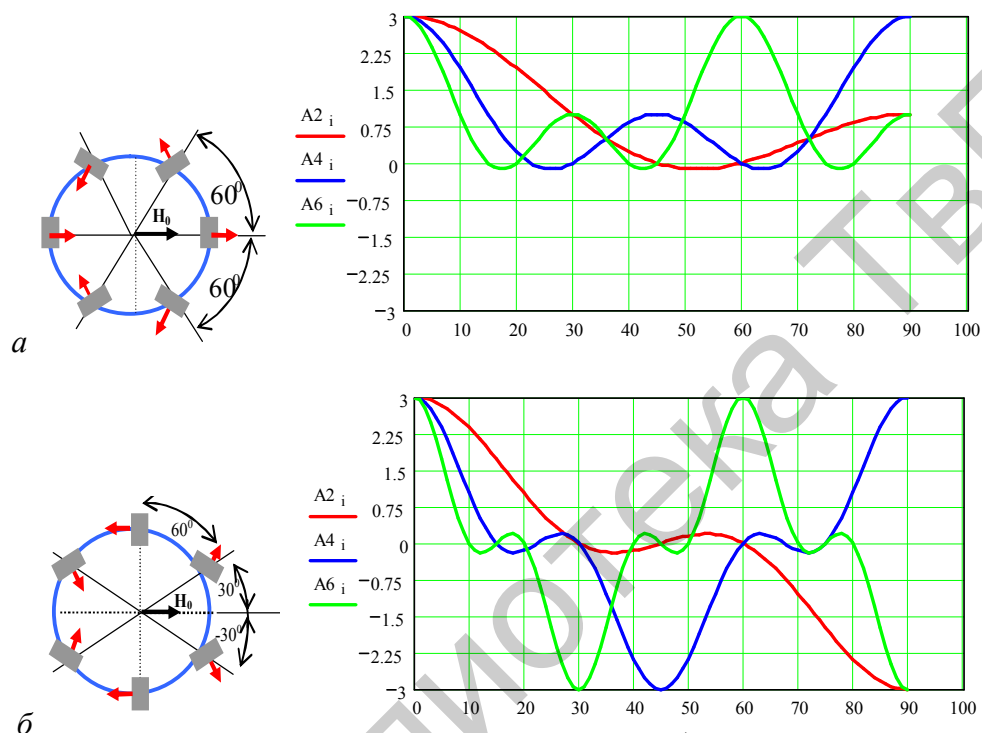


Рис. 5. Коэффициенты при гармониках поля трёх пар дипольных магнитов. (а)  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \text{var}$ , (б)  $\varphi_1 = -\varphi_2 = \text{var}$

В общем виде цель задачи сводится к тому, чтобы определить сколько пар дипольных магнитов  $N$  нужно иметь, и под какими углами  $\varphi_i$  они должны находиться, чтобы обратить в ноль наибольшее количество гармоник поля ( $n = K$ ), следующих за первой основной гармоникой ( $n = 0$ ).

Коэффициенты гармоник поля, описываются выражением (10):

$$\sum_i^N \cos[(2n)\varphi_i],$$

где  $n$  – номер гармоники,  $N$  – количество пар диполей.

Для  $N$  пар диполей должны быть выбраны такие  $\varphi_i$ , чтобы обратить в ноль  $K$  гармоник поля. Для этого необходимо, чтобы диполи находились под углами, соответствующими следующей системе из  $K$  уравнений:

$$\sum_{n=1}^K \cos(2n \cdot \varphi_i) = 0 \quad (11)$$

Полученные численным методом решения системы уравнений (11) продемонстрированы на рис. 4 и 5.

В общем виде анализ удается провести на основе классического соотношения

$$\sum_{i=0}^K \cos K_i X = \cos \frac{K}{2} X \cdot \sin \frac{K+1}{2} X \cdot \operatorname{cosec} \frac{1}{2} X \quad (12)$$

где  $K$  – количество слагаемых в сумме.

Если  $\varphi_i = N_i \cdot \frac{\pi}{N}$ , то выражение (11) с учетом формулы (12) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_i^K \cos \left[ N_i \cdot \frac{2n\pi}{N} \right] = \cos \frac{K}{2} \frac{2n\pi}{N} \cdot \sin \frac{K+1}{2} \frac{2n\pi}{N} \cdot \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \frac{2n\pi}{N}$$

Если  $n = 0$ , то коэффициент перед гармоникой, определяющей однородное поле, равен  $N$ .

При  $K+1 = N$  будут равны нулю  $K$  последующих сумм при любом значении  $n$ .

Добавляя в магнитную систему еще одну пару диполей, мы добавляем дополнительную степень свободы при решении уравнений типа (11). Это позволяет обнулить последующий член ряда (10). При двух парах диполей обнуляется одна гармоника поля, при трех парах две гармоники поля, при пяти парах четыре гармоники и т.д.

Таким образом, для получения однородного поля достаточно иметь конечное число одинаковых по форме диполей, расположенных в узловых точках  $\varphi_i = N_i \cdot \frac{\pi}{N}$  или  $\varphi_i = (2N_i - 1) \cdot \frac{\pi}{2N}$  с направлением намагниченности  $\alpha = \varphi_i + \theta_i = 2\varphi_i$ .

Изменяя соотношение поперечного сечения диполя и радиуса цилиндра на котором он находится  $\left( \frac{R_0}{R} \right)$ , при неизменном

соотношении  $\sin \delta_0 \cong \frac{d_m}{d_{uu}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , в зависимости от количества пар диполей  $N$  можно контролировать и напряженность поля, и степень его однородности.

**5. Инженерные расчеты.** На первый взгляд может показаться, имеются неограниченные возможности создания однородных магнитных полей в большом объеме при малых габаритах магнитной системы. Увеличивая количество диполей, мы уничтожаем большое количество неоднородных гармоник поля и тем самым улучшаем однородность. Однако с инженерной точки зрения необходим учёт ещё и других факторов.

С помощью программы моделирования трехмерных полей были проведены расчеты магнитных систем с различным количеством диполей, расположенных на цилиндрической поверхности в узловых точках. В программе учитывались как поперечная форма магнита, так его конечная длина и влияние лобовых частей.

На рис.6 показано относительное изменение поля в центральном сечении магнитных систем с двумя, тремя и четырьмя парами магнитных диполей, выполненных в виде параллелепипедов из NdFeB (остаточная индукция  $B_r = 1,125 \text{ Т}$ ) с размерами  $15.0 \times 20.0 \times 200.0 \text{ мм}$ ,  $13.0 \times 17.3 \times 200.0 \text{ мм}$  и  $11.6 \times 15.5 \times 200 \text{ мм}$ , расположенных на цилиндрической поверхности радиуса  $R = 100 \text{ мм}$  в узловых точках по закону  $(2\varphi)$ . Для более наглядного сопоставления ширина и толщина параллелепипедов изменялась таким образом, чтобы поля в центре всех систем были одинаковыми.

Увеличение количества диполей, в первую очередь, приводит к выравниванию поля относительно центра системы по всем азимутальным направлениям. Однако амплитудные значения поля по радиусу изменяются незначительно (рис. 7).

Если переход от системы с 4 диполями (2 пары) к системе из 6 диполей может улучшить однородность поля на расстоянии 20 мм на 1 %, то переход от системы из 6 диполей к системе из 10 диполей улучшает однородность не более, чем на 0,1%. Эффект повышения однородности поля при увеличении количества диполей в системе еще больше скрадывают технологические ошибки.

Было изготовлено 6 диполей с размером  $15.0 \times 20.0 \times 200.0 \text{ мм}$  из одного и того же материала. Измерение параметров магнитов производилось следующим образом. Магнит укреплялся строго вертикально в фиксированном гнезде. Датчик Холла укреплялся на расстоянии 100 мм от оси магнита на высоте, соответствующей половине длины магнита. Измерялись показания датчика Холла при поворачивании магнита вокруг его оси с шагом  $5^\circ$ .

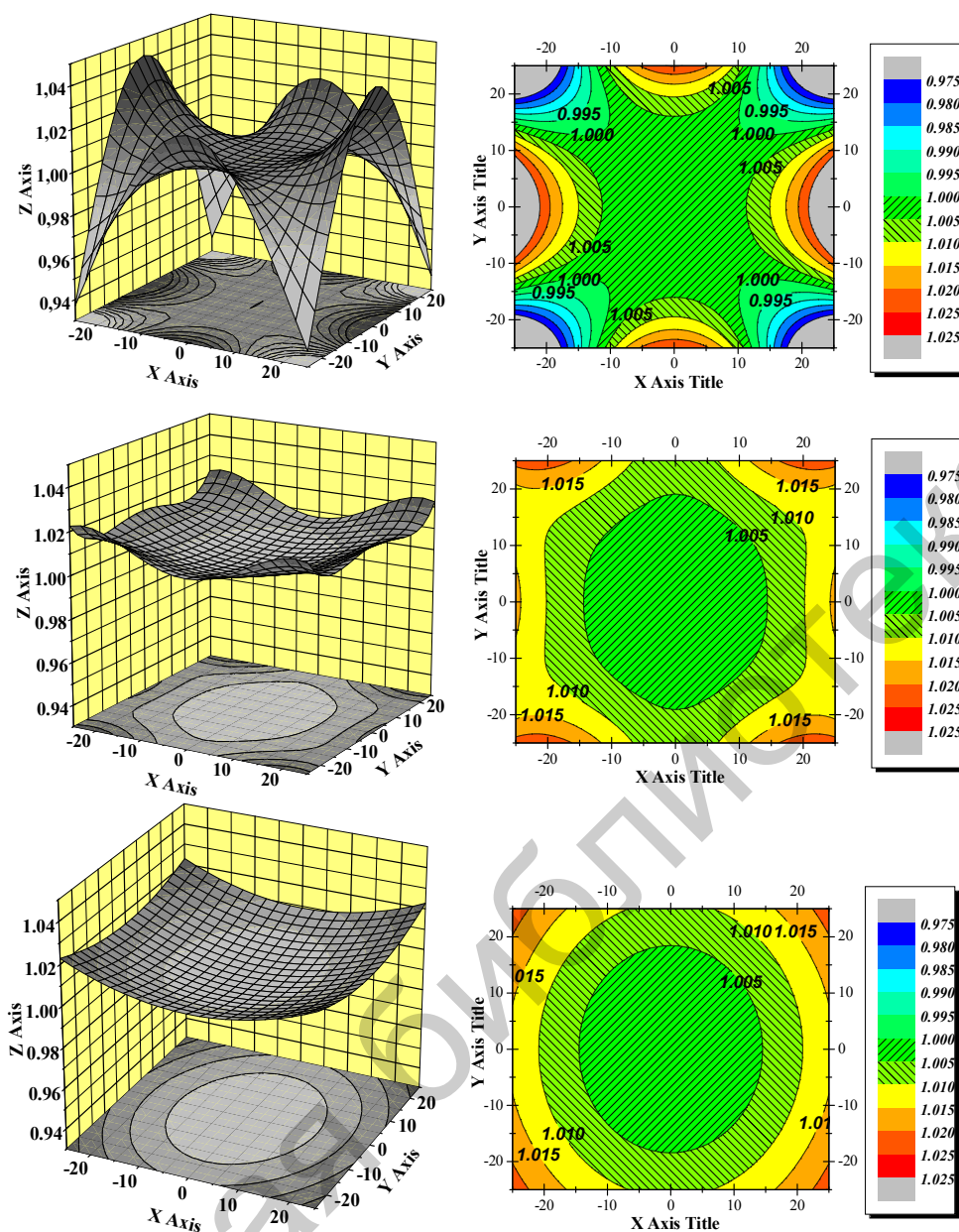


Рис. 6. Относительное изменение поля в центральном сечении магнитных систем с двумя, тремя и четырьмя парами магнитных диполей (сверху вниз), выполненных в виде параллелепипедов из NdFeB

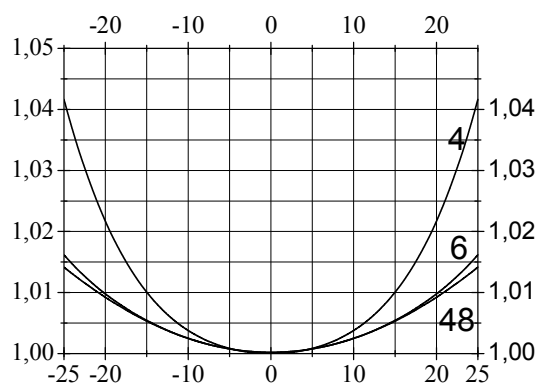


Рис. 7. Изменение абсолютного значения поля вдоль оси Y для систем с различным количеством диполей (4, 6 и 48)

Отклонения от среднего значения поля различных магнитов и угловые отклонения оси текстуры магнита от измеренного направления (последние складываются из погрешностей определения направления физической оси и несовершенства магнитной текстуры материала магнитов) представлены в таблице.

Таблица. Вариации среднего значения поля и угловых отклонений направления оси намагничивания различных магнитов

№ пп	$\Delta B_r, \%$	$\Delta \alpha^\circ$
1	-0.805	3.498
2	-0.862	1.356
3	0.34	7.923
4	0.165	3.347
5	0.594	3.118
6	0.567	0.27

На рис. 8 представлено распределение модуля магнитного поля в центральном поперечном сечении магнитной системы, состоящей из восьми параллелепипедов для идеальных идентичных магнитов и с учётом вариаций значений остаточной индукции и несовершенства текстуры. Цветом выделены значения поля 28.4 мТ с допуском 0.3 мТ, при которых возможно формирование сигнала ЯМР на частоте  $f=1$  МГц может быть сформирован сигнал ЯМР. Окружность на рисунках показывает габариты исследуемого образца.



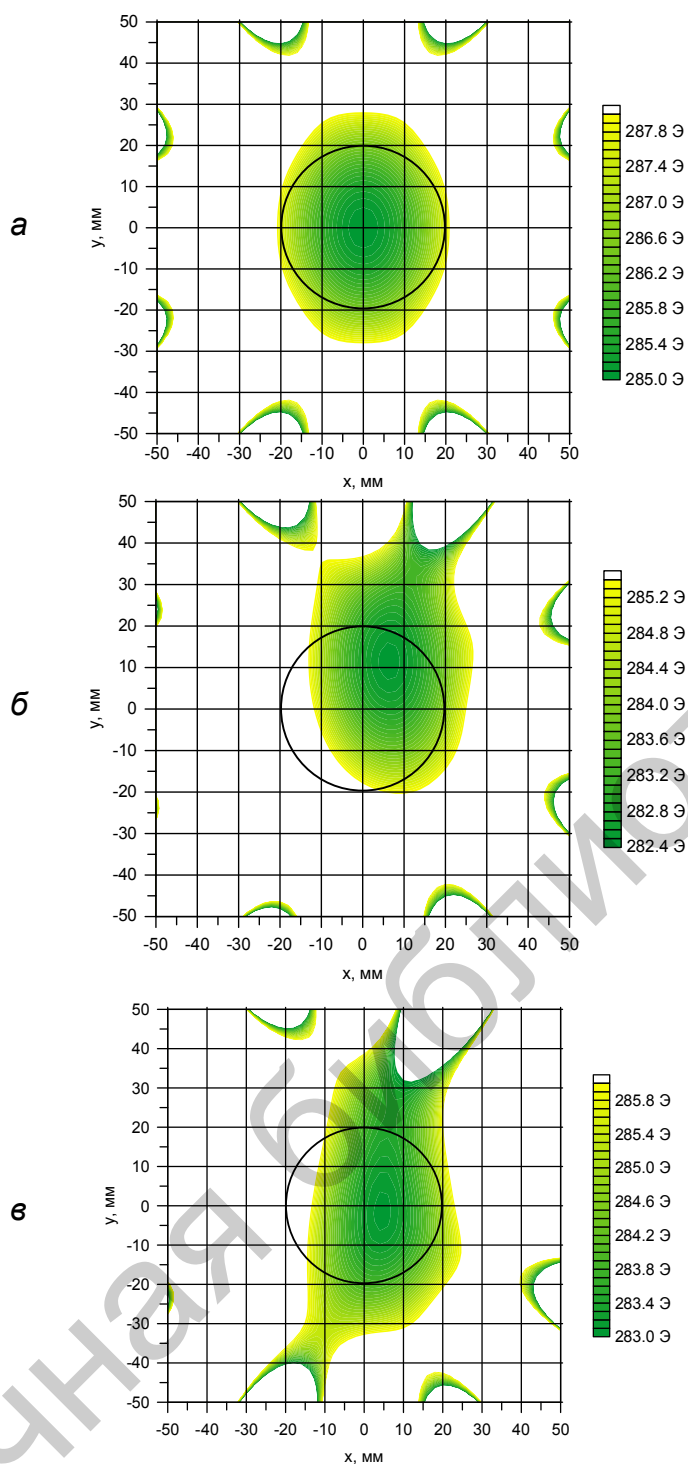


Рис. 8. Распределение модуля магнитного поля в центральном поперечном сечении магнитной системы, состоящей из восьми параллелепипедов: *а* – идеальный случай; *б* – случайная ошибка  $B_r, \pm 5\%$ ; *в* – случайная ошибка  $\theta_i, \pm 5^\circ$

Технологические ошибки приводят к случайному распределению поля в объеме исследуемого образца и потере части сигнала ЯМР. В связи с этим была подсчитана вероятность  $P\%$  того, что в  $S\%$  объема образца будет получен сигнал ЯМР, при случайном (не более  $5^\circ$ ) отклонении направления намагниченности диполя от идеального ( $2\varphi_i$ ). Расчеты проводились для систем, содержащих от 6 до 16 диполей и создающих центральное поле 28.4 мТ для трёх значений радиуса исследуемых образцов (10, 15 и 20 мм).

Статистика для каждого числа элементов была набрана из анализа поля 500 магнитных систем со случайными угловыми отклонениями ориентации диполей в пределах  $\pm 5^\circ$ . Результаты анализа показали, что однородность поля зависит в первую очередь от соотношения между радиусами исследуемого образца  $R_{обр}$  и магнитной системы  $R$ , и в меньшей степени от количества диполей. При правильном выборе соотношения  $\frac{R_{обр}}{R} \leq 0.15$  можно гарантированно получить заданное значение поля с отклонениями  $\leq 1\%$ , что достаточно для получения сигнала ЯМР при заданном радиусе образца. Для этого достаточно 6–8 магнитных диполей, установленных в узловых точках в соответствии с законом  $2\varphi$ . Дальнейшее увеличение количества диполей бессмысленно.

**6. Заключение.** В представленной работе получены практические результаты для проектирования многополюсных магнитных систем для ЯМР исследований. В результате проведенных исследований построена магнитная система ( $30 \text{ см}^3$ ,  $f \cong 1 \text{ МГц}$ ) с габаритами  $200 \times 200 \times 200$  мм и массой не более 10 кг. В системе используется 6 одинаковых магнитных диполей прямоугольной формы. Для сравнения укажем, что лучший, на наш взгляд, коммерческий лабораторный релаксометр Core-Spec 1000 имеет размеры магнитной системы  $600 \times 400 \times 300$  мм и массу порядка 100 кг.

Полученные результаты позволяют оптимистично смотреть на разработку релаксометров для большеобъемных кернов.

#### **Список литературы**

1. Калабин Г.А. и др. Количественная спектроскопия ЯМР природного органического сырья и продуктов его переработки. М., 2000. 408 с.
2. Kudryavtsev A.B., Linert W. Physico-chemical applications of NMR: a practical guide: Volume 1. World Scientific Publ. Co., 1996. 357 pp.
3. Гюнтер Х. Введение в курс спектроскопии ЯМР: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 478 с.
4. Аксельрод С.М., Неретин В.Д. Ядерный магнитный резонанс в нефтегазовой геологии и геофизике. М.: Недра, 1990. 192с.

5. Jackson J.A., Burnett L.J., Harmon J.F. Remote (inside-out) NMR. III. Detection of nuclear magnetic resonance in a remotely produced region of homogeneous magnetic field // *J. Magn. Reson.* 1980. V. 41. P. 411–421.
6. Kleinberg R.L., Sezginer A., Griffin D.D., Fukuhara M. Novel NMR apparatus for investigating an external sample // *J. Magn. Reson.* 1992. V. 97. P. 466–485.
7. Brown R.J.S., Torrey H.C., Korringa J. Earth formation and fluid material investigation by nuclear magnetism relaxation rate determination // US Patent 3,213,357.
8. Perlo J., Casanova F., Blumich B. Profiles with microscopic resolution by single-sided NMR // *J. Magn. Reson.* 2005. V. 176. P. 64–70.
9. Rata D.G., Casanova F., Perlo J., Demco D.E., Blumich B. Selfdiffusion measurements by a mobile single-sided NMR sensor with improved magnetic field gradient // *J. Magn. Reson.* 2006. V. 180. P. 229–235.
10. Perlo J., Casanova F., Blumich B., Single-sided sensor for high resolution NMR spectroscopy // *J. Magn. Reson.* 2006. V.180. P. 274–279.
11. Mansfield P. Snapshot magnetic resonance imaging (Nobel lecture) // *Angew. Chem. Int. Ed.* 2004. V. 43. P. 5456–5464.
12. Mansfield P., Maudsley A.A. Medical imaging by NMR // *Br. Journ. Radiology.* 1977. V. 50. P. 188–194.
13. Mansfield P., Morris P.G. NMR Imaging in Biomedicine. Academic Press, New York, 1982.
14. Halbach K. Design of permanent magnet multipole magnets with oriented rare earth cobalt material // *Nucl. Instrum. Methods.* 1980. V. 169. P. 1–10.
15. Zhu Z.Q., Howe D. Halbach permanent magnet machines and applications (a review) // *Proc. Inst. Elect. Eng. Electric Power Applications.* 2001. V. 148. P. 299–308.
16. Abele M.G. Structures of permanent magnets: generation of uniform fields. John Wiley: Science, 1993. 372 p.
17. E. Parcell. Electricity and Magnetism (McGraw-Hill, New York, 1965).
18. Тамм И.Е.. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.
19. Говорков В.А. Электрические и магнитные поля. М.: Энергия, 1968.
20. Halbach K. Permanent magnet multipole with adjustable strength // US patent 4,549,155.
21. Glukstern R.L., Holzinger R.F. Tunable segmented ring magnet and method of manufacture // US patent 4,538,130.
22. Holzinger R.F., Glukstern R.L. Cylindrical NMR bias magnet apparatus employing permanent magnets and methods therefore // US patent 4,758,813.
23. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1964.
24. [www.halliburton.com](http://www.halliburton.com)
25. [www.slb.com](http://www.slb.com)
26. Запатентованы в России, США, Германии, Канаде, Норвегии, Мексике, Великобритании. Патент РФ №2181901.
27. [www.karotazh.ru](http://www.karotazh.ru)
28. [www.bakerhughes.com](http://www.bakerhughes.com)

## MULTIPOLAR SYSTEMS FOR PRODUCING UNIFORM MAGNETIC FIELDS

**E. M. Mityushin**

ООО «Нефтегазгеофизика» (г. Тверь)

Possibilities of realization of maximum working volume in multipolar magnetic systems on the base of high-coercive permanent magnets for nuclear magnetic resonance (NMR) instruments are examined. Analytical calculations demonstrating the regularities of magnetic field variation with multipolar magnetic system configuration are presented. The details occurring due to simplifying assumptions are qualified by numerical calculations. Practical data for the design of multipolar magnetic systems for NMR studies are obtained. A magnetic system ( $30 \text{ cm}^3$ ,  $f \sim 1 \text{ MHz}$ ) with external size of  $200 \times 200 \times 200 \text{ mm}$  and a mass ( $\leq 10 \text{ kg}$ ) considerably reduced in comparison with known commercial systems is built. The system uses six identical rectangular dipole magnets. The obtained results may be applied in further relaxometer development for large-volume core samples.

**Keywords:** *nuclear magnetic resonance (NMR), high-coercive permanent magnets, magnetic dipoles, multipolar magnetic systems, NMR relaxometers*

*Об авторах:*

МИТЮШИН Евгений Михайлович – доктор технических наук, заведующий отделом ядерно-магнитного каротажа ООО «Нефтегазгеофизика», [www.karotazh.ru](http://www.karotazh.ru), 170033, г. Тверь, ул. Терещенко, д. 5/25, *e-mail*: [mityushin@karotazh.ru](mailto:mityushin@karotazh.ru).