На правах рукописи

СОЛДАТЕНКО Илья Сергеевич

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВОЗМОЖНОСТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Тверь — 2008

Работа выполнена на кафедре информационных технологий факультета прикладной математики и кибернетики Тверского государственного университета.

Научный руководитель –	доктор технических наук, доцент Пильщиков Д.Е.
Научный консультант –	доктор физико-математических наук, профессор Язенин А.В.
Официальные оппоненты –	доктор физико-математических наук, профессор Андреева Е.А., доктор технических наук, кандидат физико-математических наук, доцент Рыжов А.П.
Ведущая организация –	Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук.

Защита состоится 30 января 2009 года в 16:00 на заседании диссертационного совета Д212.263.04 при Тверском государственном университете по адресу: 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33, ауд. 52.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Тверского государственного университета по адресу: 170100, г. Тверь, ул. Володарского, 44а.

Объявление о защите диссертации и автореферат опубликованы 26 декабря 2008 года на официальном сайте Тверского государственного университета по адресу: http://university.tversu.ru/aspirants/abstracts/.

Автореферат разослан 26 декабря 2008 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор технических наук,
профессор — В. Н. Михно

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В настоящее время интенсивно разрабатываются многочисленные математические формализмы для описания и моделирования неопределенности. Одним из таковых является подход, предложенный в середине 60-х годов американским ученым Лотфи Заде. Он предложил способ моделирования неопределенности как нечеткости, основанный на идее расширения понятия характеристической функции множества до функции принадлежности.

Среди многих научных направлений, использующих математический аппарат для моделирования нечеткой информации, в настоящее время активно развивается теория нечеткой (возможностной) оптимизации. Предметом ее изучения стали модели и методы оптимизации в условиях нечеткой информации. Вместо четких значений параметров в таких моделях используются возможностные (нечеткие) величины, которые эксплицируют неопределенность описания параметров модели.

Возможностная оптимизация является сравнительно молодой научной дисциплиной, в которой есть еще много нерешенных вопросов, требующих дальнейшего исследования. К настоящему моменту достаточно хорошо исследованы модели и методы возможностной оптимизации с минисвязанными нечеткими параметрами. Однако минисвязанность не является единственным способом агрегирования неопределенности. В настоящее время существует и активно развивается новое научное направление: методы агрегирования информации. В значительной степени оно опирается на использование математического аппарата t-норм.

При использовании различных t-норм можно добиться управления «нечеткостью» при решении задач оптимизации, что, в свою очередь, дает бóльшую гибкость при принятии решений. В диссертационной работе исследуются вопросы взаимодействия параметров задач возможностной оптимизации по t-норме T_W, выбор которой обусловлен тем, что она является как и t-норма T_M экстремальной. В связи с этим представляется интересным изучение поведения моделей возможностной оптимизации при данной t-норме. Однако разработка этого вопроса применительно к задачам возможностной оптимизации находится в начальной стадии. Этим определяется актуальность темы диссертации.

Цель работы. Целью работы является разработка моделей и методов возможностной оптимизации в случае агрегирования неопределенности с использованием математического аппарата t-норм. Это предполагает разработку соответствующего исчисления возможностей, построение непрямых методов решения задач возможностной оптимизации в возможностно-необходимостном контексте, их реализацию на основе генетических алгоритмов и разработку программного комплекса поддержки соответствующих методов оптимизации.

Основные задачи. Для достижения поставленной цели в диссертации решены следующие задачи:

— разработаны элементы исчисления возможностей для взаимно T_W-связанных нечетких величин, решены задачи идентификации функций распределения взвешенных T_W-сумм нечетких величин с одинаковыми и различными функциями представления формы;

— получены формулы для вычисления границ α-уровневых множеств взвешенной T_W-суммы возможностных величин;

— построены непрямые методы решения задач возможностной оптимизации при взаимно T_W-связанных параметрах в возможностно-необходимостном контексте;

— проведен сравнительный анализ результатов решения задач возможностной оптимизации, когда параметры являются взаимно минисвязанными и взаимно T_W-связанными;

— непрямые методы решения задач возможностной оптимизации при взаимно T_W-связанных параметрах реализованы в виде программного модуля системы поддержки принятия решений, основанного на генетическом алгоритме оптимизации.

Методы исследований. Для построения математических моделей задач возможностной оптимизации используется современная теория возможностей. Для построения эквивалентных детерминированных аналогов моделей — методы математического программирования, для их реализации — методы эволюционного программирования. Программная система поддержки принятия решений реализована на объектно-ориентированном языке программирования C++.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми:

1) получены элементы исчисления возможностей для взаимно T_W-связанных нечетких величин, решены задачи идентификации функции распределения взвешенной T_W-суммы нечетких величин с одинаковыми и различными функциями представления формы;

2) получены формулы для вычисления границ α-уровневых множеств взвешенной T_W-суммы нечетких величин;

3) разработаны непрямые методы решения задач возможностной оптимизации, позволяющие получить эквивалентные детерминированные ана-

логи задач в возможностно-необходимостном контексте;

4) осуществлена спецификация генетического алгоритма оптимизации для численного решения эквивалентных детерминированных аналогов;

5) проведено сравнительное изучение моделей возможностной оптимизации: доказаны теоремы, позволяющие установить вложенность областей допустимых решений для эквивалентных детерминированных аналогов задач с взаимно T_W-связанными и с минисвязанными параметрами.

Теоретическая и практическая значимость. Непрямые методы решения задач возможностной оптимизации, предложенные в работе, позволяют расширить класс решаемых задач на случай, когда параметры задач оптимизации являются взаимосвязанными по другой экстремальной t-норме T_W. Эти результаты позволяют управлять нечеткостью задач возможностной оптимизации. Модули разработанного программного комплекса могут быть использованы в системах поддержки принятия решений при решении различных задач производственного, финансового планирования.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты, полученные в ходе диссертационной работы:

1. Методы идентификации функции распределения возможностей взвешенной T_W-суммы нечетких величин с одинаковыми и различными функциями представления формы.

2. Непрямые методы решения задач оптимизации с взаимно T_W-связанными возможностными параметрами в возможностно-необходимостном контексте.

3. Теоремы, доказывающие вложенность области допустимых решений эквивалентного детерминированного аналога задачи с взаимно T_W-связанными параметрами в область допустимых решений детерминированного эквивалента задачи с минисвязанными параметрами.

4. Программно-алгоритмический инструментарий на основе генетического алгоритма, поддерживающий полученные непрямые методы решения задач возможностного программирования.

Внедрение результатов работы. Результаты диссертационной работы внедрены в учебный процесс на факультете прикладной математики и кибернетики Тверского госуниверситета. Непрямые методы решения задач, полученные в диссертации, представлены в дисциплине «Теория неопределенностей», методы агрегирования возможностной информации — в программе курса «Современные проблемы прикладной математики и информатики». Часть исследований, проводимых в работе, была поддержана грантом РФФИ, проект номер 08-01-08076.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались автором на IV Международной научно-практической конференции «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте» (Коломна, 2007 год), на 27 ежегодном съезде Северо-Американского общества обработки нечеткой информации NAFIPS-2008 (Нью-Йорк, 2008 год), на семинарах в Тверском госуниверситете и ВЦ РАН.

Публикации автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах, приведенных в конце автореферата, три из которых опубликованы в журналах, рекомендуемых ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и изложена на 112 страницах. Список литературы содержит 120 наименований, включая работы автора.

Содержание работы. Во введении обоснована актуальность исследуемой проблемы, сформулированы цель и задачи диссертационной работы, приведен обзор работ, посвященных возможностной оптимизации, кратко изложены структура и содержание диссертации.

В первой главе введены основные определения, понятия и теоретические результаты теории возможностей, необходимые в дальнейшем.

В параграфе 1.1.1 вводятся базовые понятия меры возможности, меры необходимости и возможностного пространства. Далее $(\Gamma, \mathbb{P}(\Gamma), \pi)$ есть возможностное пространство, Γ — модельное пространство, $\gamma \in \Gamma$ — его элементы, $\mathbb{P}(\Gamma)$ — множество всех подмножеств множества Γ, π — возможностная мера, ν — двойственная ей мера необходимости, $\mathbb{E}^1$ — числовая прямая.

В **параграфе 1.1.2** определяются понятия возможностной величины, нечеткого числа, а также понятие α-уровневого множества, необходимые для моделирования нечетких параметров задач оптимизации.

Определение 8 *Возможностная (нечеткая) величина есть вещественная функция* $X(\cdot) : \Gamma \to \mathbb{E}^1$, *возможные значения которой характеризуются ее распределением возможностей* $\mu_X(x)$*:*

$$\mu_X(x) = \pi\{\gamma \in \Gamma : X(\gamma) = x\},\ \forall x \in \mathbb{E}^1.$$

$\mu_X(x)$ — возможность того, что X может принять значение x.

Определение 11 *Для любого* $\alpha \in (0, 1]$ *и любой возможностной переменной* A α*–уровневым множеством называется множество*

$$A^\alpha = \{x \in \mathbb{E}^1 \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Как правило, возможностные переменные, принимающие значения в $\mathbb{E}^1$ и характеризующиеся унимодальными, квазивогнутыми, полунепрерывными сверху функциями распределения и ограниченными носителями, именуются нечеткими числами. При этом если функция принадлежности не является строго унимодальной, возможностная переменная называется нечетким интервалом.

Для моделирования нечетких чисел в диссертации используются распределения (L, R)-типа, описанные в **разделе 1.1.3.**

Определение 17 *Функция $S(t)$, $t \in \mathbb{E}^1_+$ называется функцией представления формы (формой), если она невозрастающая, полунепрерывная сверху и обладает следующими свойствами:*

$$\textit{1. } S(0) = 1, \quad \textit{2. } S(t) < 1,\ \forall t \in \mathbb{E}^1_+, \quad \textit{3. } \lim_{t \to +\infty} S(t) = 0.$$

Определение 18 *Возможностная величина A представляет собой возможностную величину (L, R)-типа, если ее распределение имеет вид:*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right), & x < a \in \mathbb{E}^1,\ \alpha \in \mathbb{E}^1_+, \\ 1, & a \le x \le b, \\ R\left(\dfrac{x-b}{\beta}\right), & x > b \in \mathbb{E}^1,\ \beta \in \mathbb{E}^1_+. \end{cases}$$

Здесь [a, b] — интервал толерантности A, a и b — соответственно, нижнее и верхнее модальные значения, α и β — коэффициенты нечеткости, позволяющие управлять «размытостью» возможностной величины, L и R — соответственно, левая и правая формы, $\mathbb{E}^n_+$ — положительный октант n-мерного евклидова пространства. Обозначение: $A = (a, b, \alpha, \beta)_{LR}$.

В диссертационной работе агрегирование нечеткой информации основано на t-нормах и t-конормах, которые расширяют операции типа min и max, заложенные в бинарных операциях над нечеткими множествами и переменными. **Раздел 1.2** содержит базовые сведения об аппарате t-норм.

Определение 20 *Отображение $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ называется треугольной нормой (или t-нормой), если для любого $x \in [0,1]$ оно обладает следующими свойствами:*

1) ограниченность: $T(1, x) = x$,

2) симметричность: $T(x, y) = T(y, x)$,

3) ассоциативность: $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$, *4) монотонность:* $T(w,y) \le T(x,z)$, *если* $w \le x,\ y \le z$.

Пример 2 *Примерами некоторых хорошо известных* t*-норм являются:*

1) слабая t*-норма* $T_W(x,y) = \begin{cases} \min\{x,y\}, & \textit{если } \max\{x,y\} = 1, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases}$

2) операция взятия минимума $T_M(x,y) = \min\{x,y\}$.

Треугольные нормы T_W и T_M являются экстремальными, при этом T_M называется сильной, а T_W — слабой t-нормой. Все t-нормы связаны следующей системой неравенств: $T_W(x,y) \le T(x,y) \le T_M(x,y)$.

Раздел 1.3 диссертации посвящен описанию различных способов моделирования взаимодействия нечетких величин. В диссертационной работе за основу моделирования взаимодействия (связанности) параметров взят метод определения взаимной T-связанности, предложенный в работе Хонга, обобщающий понятие несвязанности, введенное ранее Стефаном Намиасом. Дадим соответствующие определения.

Определение 24 *Пусть даны возможностное пространство* $(\Gamma, \mathbb{P}(\Gamma), \pi)$ *и* t*-норма* T. *Множества* $X_1, \ldots, X_n \in \mathbb{P}(\Gamma)$ *называются взаимно* T*-связанными, если для любого подмножества* $\{i_1, \ldots, i_k\}$ *множества* $\{1, \ldots, n\}$, $1 \le k \le n$*:*

$$\pi\Big\{X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_k}\Big\} = T\Big(\pi\{X_{i_1}\}, \ldots, \pi\{X_{i_k}\}\Big),$$
$$\textit{где}\ \ T\Big(\pi\{X_{i_1}\}, \ldots, \pi\{X_{i_k}\}\Big) =$$
$$= T(T(\ldots T(T(\pi\{X_{i_1}\}, \pi\{X_{i_2}\}), \ldots \pi\{X_{i_{k-1}}\}), \pi\{X_{i_k}\}).$$

Пусть $A_1(\gamma), \ldots, A_n(\gamma)$ есть возможностные величины, заданные на возможностном пространстве $(\Gamma, \mathbb{P}(\Gamma), \pi)$, T — произвольная t-норма.

Определение 25 *Возможностные величины* $A_1(\gamma), \ldots, A_n(\gamma)$ *называются взаимно* T*-связанными, если для любого подмножества* $\{i_1, \ldots, i_k\}$ *из множества* $\{1, \ldots, n\}$, $1 \le k \le n$*:*

$$\mu_{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}}(x_1, \ldots, x_k) = \pi\{\gamma \in \Gamma \mid A_{i_1}(\gamma) = x_1, \ldots, A_{i_k}(\gamma) = x_k\} =$$
$$\pi\{A_{i_1}^{-1}\{x_1\} \cap \ldots \cap A_{i_k}^{-1}\{x_k\}\} =$$
$$T(\pi\{A_{i_1}^{-1}\{x_1\}\}, \ldots, \pi\{A_{i_k}^{-1}\{x_k\}\}),\ x_j \in \mathbb{E}^1.$$

В **разделе 1.4 первой главы** диссертации изложены результаты, полученные автором, которые позволяют идентифицировать функции распределения возможностей взвешенных T_W-сумм и определять соответствующие им α-уровневые множества.

Под взвешенной T-суммой нечетких величин понимается возможностная функция $f(\lambda,\gamma)=\lambda_1 A_1(\gamma)\oplus_T \lambda_2 A_2(\gamma)\oplus_T\ldots\oplus_T \lambda_n A_n(\gamma)$. Взвешенные суммы такого вида используются в задачах возможностной оптимизации при определении моделей критериев и ограничений. Оператор $\oplus_T$ (суммирование по t-норме T) определяется по формуле:

$$\mu_{A_1(\gamma)\oplus_T A_2(\gamma)}(z)=\sup_{x_1+x_2=z} T(\mu_{A_1}(x_1),\mu_{A_2}(x_2)),\ z\in\mathbb{E}^1.$$

В диссертации приводится следующая хорошо известная теорема для идентификации функции распределения взвешенной суммы взаимно T_W-связанных нечетких величин с одинаковыми левыми и правыми формами:

Теорема 3 *Пусть имеется n взаимно T_W-связанных нечетких величин $A_i=(a_i,b_i,\alpha_i,\beta_i)_{LR}$, $i=\overline{1,n}$. Тогда их T_W-сумма $\bigoplus_{T_W i=1}^{n}\lambda_i A_i$, где $\lambda_i\geq 0$, определяется следующей формулой:*

$$\bigoplus_{T_W i=1}^{n}\lambda_i A_i=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_i,\max_{i=1,\ldots,n}\lambda_i\alpha_i,\max_{i=1,\ldots,n}\lambda_i\beta_i\right)_{LR},$$

которая затем распространяется автором диссертации на случай взвешенной суммы взаимно T_W-связанных нечетких величин с различными левыми и правыми формами.

Теорема 4 *Пусть $A_1,\ldots,A_n$ есть взаимно T_W-связанные нечеткие величины (L,R)-типа $A_i=(a_i,b_i,\alpha_i,\beta_i)_{L_iR_i}$, $i=\overline{1,n}$ и пусть $\lambda_i\geq 0$, $i=\overline{1,n}$. Тогда:*

$$\bigoplus_{T_W i=1}^{n}\lambda_i A_i=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_i,1,1\right)_{L^*R^*},$$

где $L^*=\max\limits_{i=1,\ldots,n} L_i\left(\dfrac{x}{\lambda_i\alpha_i}\right), R^*=\max\limits_{i=1,\ldots,n} R_i\left(\dfrac{x}{\lambda_i\beta_i}\right)$.

Здесь же доказана теорема, позволяющая вычислять границы α-уровневых множеств для взвешенной T_W-суммы нечетких величин.

Теорема 5 *Пусть $A_1,\ldots,A_n$ — взаимно T_W-связанные нечеткие величины (L,R)-типа $A_i=(a_i,b_i,\alpha_i,\beta_i)_{L_iR_i}$, $i=\overline{1,n}$ и пусть $\lambda_i>0$, $i=\overline{1,n}$. Тогда границы α-уровневого множества их взвешенной T_W-суммы определяются по следующей формуле:*

$$\left[\bigoplus_{T_W i=1}^{n}\lambda_i A_i\right]^{\alpha}=\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i-\max_{i=1,\ldots,n} l_i^*,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_i+\max_{i=1,\ldots,n} r_i^*\right],\ \alpha\in(0,1],$$

где $l_i^* = argval_\alpha L_i\left(\frac{x}{\lambda_i\alpha_i}\right)$, $r_i^* = argval_\alpha R_i\left(\frac{x}{\lambda_i\beta_i}\right)$.

Вспомогательное обозначение $argval$ определяется следующим образом:

$$argval_\alpha f = \begin{cases} \{x \mid f(x) = \alpha\}, \text{ если } f \text{ — строго убывающая форма,} \\ \max\{x \mid f(x) = \alpha\}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

В разделе 1.5 приведены численные примеры и графические иллюстрации идентификации функции распределения T_W-сумм и расчета границ α-уровневых множеств.

Во второй главе исследованы основные (базовые) модели линейного возможностного программирования.

В первом разделе второй главы приводится формализованное описание исследуемых моделей возможностной оптимизации. Первая модель — максимизация уровня достижения нечеткой цели при построчных ограничениях по возможности/необходимости. В общем виде задача выглядит следующим образом:

$$k \to \max, \tag{2.1}$$

$$\sigma\{f_0(x,\gamma)\ R_0\ k\} \geq \alpha_0, \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \sigma\{f_i(x,\gamma)\ R_i\ 0\} \geq \alpha_i,\ i = \overline{1,m}, \\ x \in \mathbb{E}_+^n. \end{cases} \tag{2.3}$$

Вторая рассматриваемая модель — максимизация возможности/необходимости достижения нечеткой цели при построчных ограничениях по возможности/необходимости, в общем виде записываемая как:

$$\sigma\{f_0(x,\gamma)\ R_0\ 0\} \to \max, \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} \sigma\{f_i(x,\gamma)\ R_i\ 0\} \geq \alpha_i,\ i = \overline{1,m}, \\ x \in \mathbb{E}_+^n. \end{cases} \tag{2.5}$$

В обоих случаях $f_i(x,\gamma)$ есть линейные возможностные функции, бинарные отношения $R_i \in \{\leq, =, \geq\}$, а мера $\sigma \in \{\pi, \nu\}$.

Обе модели хорошо изучены в случае треугольной нормы T_M, описывающей минисвязанность параметров задачи. Во втором и третьем разделах второй главы описанные выше модели задач возможностного программирования исследованы в случае взаимной T_W-связанности их параметров.

В параграфе 2.2.1 описан непрямой метод решения задачи уровневой оптимизации при построчных ограничениях по возможности.

Доказана следующая теорема для нахождения эквивалентного детерминированного аналога системы возможностных ограничений.

Теорема 6 *Пусть в модели ограничений (2.3) мера* $\sigma = \pi$, R_i *есть отношения равенства, а параметры* $a_{ij}(\gamma)$ *и* $b_i(\gamma)$ *есть взаимно* T_W*-связанные нечеткие величины* (L, R)*-типа:* $a_{ij}(\gamma) = (a'_{ij}, a''_{ij}, \eta_{ij}, \beta_{ij})_{LR}$, $b_i(\gamma) = (b'_i, b''_i, \eta_i, \beta_i)_{LR}$, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ *с идентичными функциями представления формы* L *и* R. *Если* L *и* R *имеют обратные функции, то эквивалентный детерминированный аналог модели (2.3) имеет вид:*

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a'_{ij}x_j - \max\limits_{j=1,\ldots,n}\{x_j\eta_{ij}\}L^{-1}(\alpha_i) \le b''_i + \beta_i R^{-1}(\alpha_i),\ i = \overline{1,m}, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a''_{ij}x_j + \max\limits_{j=1,\ldots,n}\{x_j\beta_{ij}\}R^{-1}(\alpha_i) \ge b'_i - \eta_i L^{-1}(\alpha_i),\ i = \overline{1,m}, \\ x \in \mathbb{E}^n_+. \end{cases}$$

Следующая доказанная теорема позволяет переходить к эквивалентному детерминированному аналогу модели критерия (2.1)-(2.2).

Теорема 7 *Пусть дана модель критерия задачи возможностной оптимизации вида (2.1)-(2.2), где* $a_{0j}(\gamma)$ *есть взаимно* T_W*-связанные нечеткие величины* (L, R)*-типа:* $a_{0j}(\gamma) = (a'_{0j}, a''_{0j}, \eta_{0j}, \beta_{0j})_{LR}$, $j = \overline{1,n}$ *с идентичными функциями представления формы* L *и* R, $\sigma = \pi$, R_i *есть отношения равенства. Если* L *и* R *имеют обратные функции, то эквивалентный детерминированный аналог модели критерия (2.1)-(2.2) имеет вид:*

$$k \to \max,$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a'_{0j}x_j - \max\limits_{j=1,\ldots,n}\{x_j\eta_{0j}\}L^{-1}(\alpha_0) \le k, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a''_{0j}x_j + \max\limits_{j=1,\ldots,n}\{x_j\beta_{0j}\}R^{-1}(\alpha_0) \ge k. \end{cases}$$

В параграфе 2.2.2 приведен непрямой метод решения задачи максимизации возможности достижения нечеткой цели при построчных ограничениях по возможности. Доказана теорема для получения детерминированного эквивалента модели критерия. Модели ограничений двух рассматриваемых постановок задач аналогичны.

Теорема 9 *Пусть в модели критерия (2.4) мера* $\sigma = \pi$, R_i *есть отношения равенства, а параметры* $a_{0j}(\gamma)$ *и* $b_0(\gamma)$ *являются взаимно* T_W*-связанными нечеткими величинами* (L, R)*-типа:* $a_{0j}(\gamma) = (a'_{0j}, a''_{0j}, \eta_{0j},$

$\beta_{0j})_{LR}$, $j=\overline{1,n}$, $b_0(\gamma)=(b_0', b_0'', \eta_0, \beta_0)_{LR}$ с идентичными функциями представления формы L и R. Если L и R имеют обратные функции, то эквивалентный детерминированный аналог модели (2.4) имеет вид:

$$
\begin{cases}
\alpha \to \max, \\
\sum\limits_{j=1}^{n} a_{0j}' x_j - \max\limits_{j=1,\dots,n}\{x_j\eta_{0j}\} L^{-1}(\alpha) \le b_0'' + \beta_0 R^{-1}(\alpha), \\
\sum\limits_{j=1}^{n} a_{0j}'' x_j + \max\limits_{j=1,\dots,n}\{x_j\beta_{0j}\} R^{-1}(\alpha) \ge b_0' - \eta_0 L^{-1}(\alpha), \\
\alpha \in [0,1],\ x \in \mathbb{E}_+^n.
\end{cases}
$$

Нетрудно видеть, что получаемые эквивалентные детерминированные аналоги задач (2.1)-(2.3) и (2.4)-(2.5) при $\sigma=\pi$ в общем случае являются задачами многоэкстремальными, невыпуклыми и негладкими. Ввиду этого для их решения целесообразным является применение генетических алгоритмов оптимизации.

В третьем разделе второй главы диссертационной работы построен детерминированный аналог задачи (2.1)-(2.3) в случае, когда $\sigma=\nu$. Ниже приведены две соответствующие теоремы.

Теорема 10 *Пусть в модели ограничений (2.3) параметры $a_{ij}(\gamma)$ и $b_i(\gamma)$ есть взаимно T_W-связанные нечеткие величины, характеризующиеся распределениями (L,R)-типа: $a_{ij}(\gamma)=(a_{ij}', a_{ij}'', \eta_{ij}, \beta_{ij})_{LR}$, $b_i(\gamma)=(b_i', b_i'', \eta_i, \beta_i)_{LR}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, с одинаковыми функциями представления формы L и R, $\sigma=\nu$, R_0 есть отношение $\ge$, а R_i есть отношения $\le$. Если L и R имеют обратные функции, то эквивалентный детерминированный аналог модели (2.3) имеет вид:*

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}'' x_j + \max\limits_{j=1,\dots,n}\{x_j\beta_{ij}\} R^{-1}(1-\alpha_i) \le b_i' - \eta_i L^{-1}(1-\alpha_i),\ i=\overline{1,m}, \\
x \in \mathbb{E}_+^n.
\end{cases}
$$

Теорема 11 *Пусть в модели критерия (2.1)-(2.2) параметры $a_{0j}(\gamma)$ есть взаимно T_W-связанные нечеткие величины (L,R)-типа: $a_{0j}(\gamma)=(a_{0j}', a_{0j}'', \eta_{0j}, \beta_{0j})_{LR}$, $j=\overline{1,n}$ с идентичными функциями представления формы L и R, $\sigma=\nu$, R_0 есть отношение $\ge$, а R_i есть отношения $\le$. Если L и R имеют обратные функции, то эквивалентный детерминированный аналог модели (2.1)-(2.2) имеет вид:*

$$k \to \max,$$

$$\begin{cases} k \leq \sum\limits_{j=1}^{n} a'_{0j}x_j - \max\limits_{j=1,\ldots,n}\{x_j\eta_{0j}\}L^{-1}(1-\alpha_0), \\ x \in \mathbb{E}^n_+. \end{cases}$$

Как видно из теоремы 10, в случае меры необходимости, функции, участвующие в формировании множества допустимых решений эквивалентного детерминированного аналога, являются выпуклыми, но не гладкими. Поэтому для решения детерминированного эквивалента задачи (2.1)-(2.3) при $\sigma = \nu$ могут быть привлечены как методы субградиентной оптимизации и обобщенного линейного программирования, так и методы эволюционного программирования.

В четвертом разделе второй главы приводится спецификация генетического алгоритма решения детерминированных эквивалентых аналогов.

В третьей главе проводится сравнительное изучение эквивалентных детерминированных аналогов задач возможностной оптимизации при различных t-нормах. Проводится сравнительное изучение возникающих задач с детерминированными задачами (имеющими четкие параметры). Эти результаты позволяют управлять нечеткостью при принятии решений путем варьирования t-нормой при описании взаимодействия параметров.

В параграфе 3.1.1 решается модельный пример задачи возможностной оптимизации при взаимно T_W-связанных параметрах.

В параграфе 3.1.2 то же самое делается для той же задачи, но только ее параметры являются взаимно T_M-связанными. В том же параграфе решается соответствующая четкая задача. Все решения сводятся в одной иллюстрации, которая демонстрирует влияние двух различных t-норм на результат применения соответствующих непрямых методов решения.

Существует зависимость между областями допустимых решений соответствующих эквивалентных детерминированных аналогов, а именно: область T_W-решения вложена в область T_M-решения, в которую, в свою очередь, вложена и область четкого решения. Этот факт является закономерностью и обосновывается в соответствующих теоремах **второго раздела третьей главы**. Пусть $X_M^{\alpha_i} = \Big\{x : \pi\{f_i(x,\gamma)=0\} \geq \alpha_i\Big\}$, $a_{ij}(\gamma), j = \overline{1,n}$ и $b_i(\gamma)$ — взаимно T_M-связанные, а $X_W^{\alpha_i} = \Big\{x : \pi\{f_i(x,\gamma)=0\} \geq \alpha_i\Big\}$, $a_{ij}(\gamma), j = \overline{1,n}$ и $b_i(\gamma)$ — взаимно T_W-связанные. В диссертации доказана следующая теорема.

Теорема 12

$$\bigcap_{i=1}^{m} X_W^{\alpha_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} X_M^{\alpha_i}.$$

В этом же разделе подобная теорема доказана и для модели критерия. Пусть $\sigma = \pi$. Обозначим через $F_M^{\alpha_0}(x)$ множество значений критерия, при которых выполняется (2.2) при условии, что все $a_{0j}(\gamma), j = \overline{1,n}$, — взаимно минисвязанные, а через $F_W^{\alpha_0}(x)$ — множество значений критерия, удовлетворяющих модели (2.2) при условии, что все $a_{0j}(\gamma), j = \overline{1,n}$, — взаимно T_W-связанные. Доказана следующая теорема.

Теорема 13 $F_W^{\alpha_0}(x) \subseteq F_M^{\alpha_0}(x)$.

В третьем разделе третьей главы проводится исследование задач возможностной оптимизации в контексте возможность/необходимость. Показано, что при пороговом уровне $\alpha = 0.5$ область допустимых решений необходимостной задачи является подмножеством области допустимых решений возможностной задачи оптимизации.

Обозначим через $X_W^{\alpha}(\nu)$ множество допустимых решений задачи возможностной оптимизации, определяемое моделью ограничений

$$\begin{cases} \nu\{f_i(x,\gamma) \leq 0\} \geq \alpha_i, \ i = \overline{1,m}, \\ x \in \mathbb{E}^n_+, \end{cases}$$

а через $X_W^{\alpha}(\pi)$ — моделью ограничений

$$\begin{cases} \pi\{f_i(x,\gamma) \leq 0\} \geq \alpha_i, \ i = \overline{1,m}, \\ x \in \mathbb{E}^n_+. \end{cases}$$

При сделанных предположениях имеет место следующая теорема.

Теорема 14 *Пусть* $\alpha_i = 0.5, \ i = \overline{1,m}$. *Тогда*

$$X_W^{\alpha}(\nu) \subseteq X_W^{\alpha}(\pi).$$

Пороговый уровень 0.5 принят как в задачах стохастического, так и возможностного программирования.

В четвертой главе описывается программный комплекс поддержки моделей и алгоритмов возможностной оптимизации со взаимодействующими параметрами и проводятся модельные расчеты в этом комплексе.

Программный комплекс реализован в виде модуля для программной системы FIESTA. В функциональность системы FIESTA была добавлена возможность выбора t-нормы для агрегирования возможностной информации, лежащей в основе бинарных операций над нечеткими величинами.

Приведем **модельный пример**, решенный в системе FIESTA, и исследуем его свойства. Решим задачу уровневой оптимизации с минисвязанными параметрами при $n = m = 2$ и $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$:

$$k \to \max, \tag{4.1}$$

$$\pi\left\{a_{01}(\gamma)x_1 + a_{02}(\gamma)x_2 = k\right\} \geq 0.5, \tag{4.2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \pi\left\{a_{11}(\gamma)x_1 + a_{12}(\gamma)x_2 - b_1(\gamma) = 0\right\} \geq 0.5, \\ \pi\left\{a_{21}(\gamma)x_1 + a_{22}(\gamma)x_2 - b_2(\gamma) = 0\right\} \geq 0.5, \\ x \in \mathbb{E}^2_+. \end{array}\right. \tag{4.3}$$

Здесь $a_{01}(\gamma)$, $a_{02}(\gamma)$, $a_{11}(\gamma)$, $a_{12}(\gamma)$, $a_{21}(\gamma)$, $a_{22}(\gamma)$, $b_1(\gamma)$ и $b_2(\gamma)$ — триангулярные нечеткие величины, заданные распределениями (L, R)-типа:

$$\begin{array}{ll} a_{01}(\gamma) = (3, 3, 4.5, 4)_{LR}, & a_{02}(\gamma) = (-2, -2, 5, 7)_{LR}\,, \\ a_{11}(\gamma) = (-6, -6, 3, 3)_{LR}\,, & a_{12}(\gamma) = (8, 8, 0.5, 0.6)_{LR}\,, \\ a_{21}(\gamma) = (4, 4, 3, 3)_{LR}, & a_{22}(\gamma) = (10, 10, 4.3, 4.2)_{LR}, \\ b_1(\gamma) = (3, 3, 1.5, 1.5)_{LR}\,, & b_2(\gamma) = (10, 10, 6, 6)_{LR}\,, \end{array}$$

где $L(t) = R(t) = \max\{0, 1 - t\},\ t \in \mathbb{E}^1_+$.

Решим задачу (4.1)-(4.3) в случае, когда все ее параметры являются минисвязанными. В этом случае эквивалентный детерминированный аналог задачи (4.1)-(4.3) есть следующая задача линейного программирования:

$$5x_1 + 1.5x_2 \to \max,$$

$$\left\{\begin{array}{l} -7.5x_1 + 7.75x_2 \leq 3.75, \\ -4.5x_1 + 8.3x_2 \geq 2.25, \\ 2.5x_1 + 7.85x_2 \leq 13, \\ 5.5x_1 + 12.1x_2 \geq 7, \\ x \in \mathbb{E}^2_+. \end{array}\right.$$

Решая эту задачу в системе FIESTA с использованием t-нормы T_M, получаем следующий результат: $x_1 \approx 1.6092,\ x_2 \approx 1.1436,\ F_M(x_1, x_2) \approx 9.7615$.

Решим эту задачу с t-нормой T_W. Согласно теоремам 6 и 7 детерминированный эквивалент (4.1)-(4.3) в этом случае имеет вид:

$$3x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}\max\left\{4x_1, 7x_2\right\} \to \max,$$

$$\left\{\begin{array}{l} \max\left\{4x_1, 7x_2\right\} + \max\{4.5x_1, 5x_2\} \geq 0, \\ -6x_1 + 8x_2 - 0.5\max\left\{3x_1, 0.5x_2\right\} \leq 3.75, \\ -6x_1 + 8x_2 + 0.5\max\left\{3x_1, 0.6x_2\right\} \geq 2.25, \\ 4x_1 + 10x_2 - 0.5\max\left\{3x_1, 4.3x_2\right\} \leq 13, \\ 4x_1 + 10x_2 + 0.5\max\left\{3x_1, 4.2x_2\right\} \geq 7, \\ x \in \mathbb{E}^2_+. \end{array}\right. \tag{4.4}$$

Программа выдает ответ: $x_1 \approx 1.2824$, $x_2 \approx 1.0026$, $F_W(x_1, x_2) \approx 5.3511$.

Теперь решим четкую задачу, соответствующую (4.1)-(4.3):

$$3x_1 - 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -6x_1 + 8x_2 - 3 = 0, \\ 4x_1 + 10x_2 - 10 = 0, \\ x \in \mathbb{E}^2_+. \end{cases}$$

Ее единственное решение: $x_1 \approx 0.5435$, $x_2 \approx 0.7826$, $F_C(x_1, x_2) \approx 0.0653$.

Во всех трех случаях области допустимых решений модельной задачи (4.1)-(4.3) представлены на рисунке 1, а ее оптимальные решения сведены в таблицу 1.

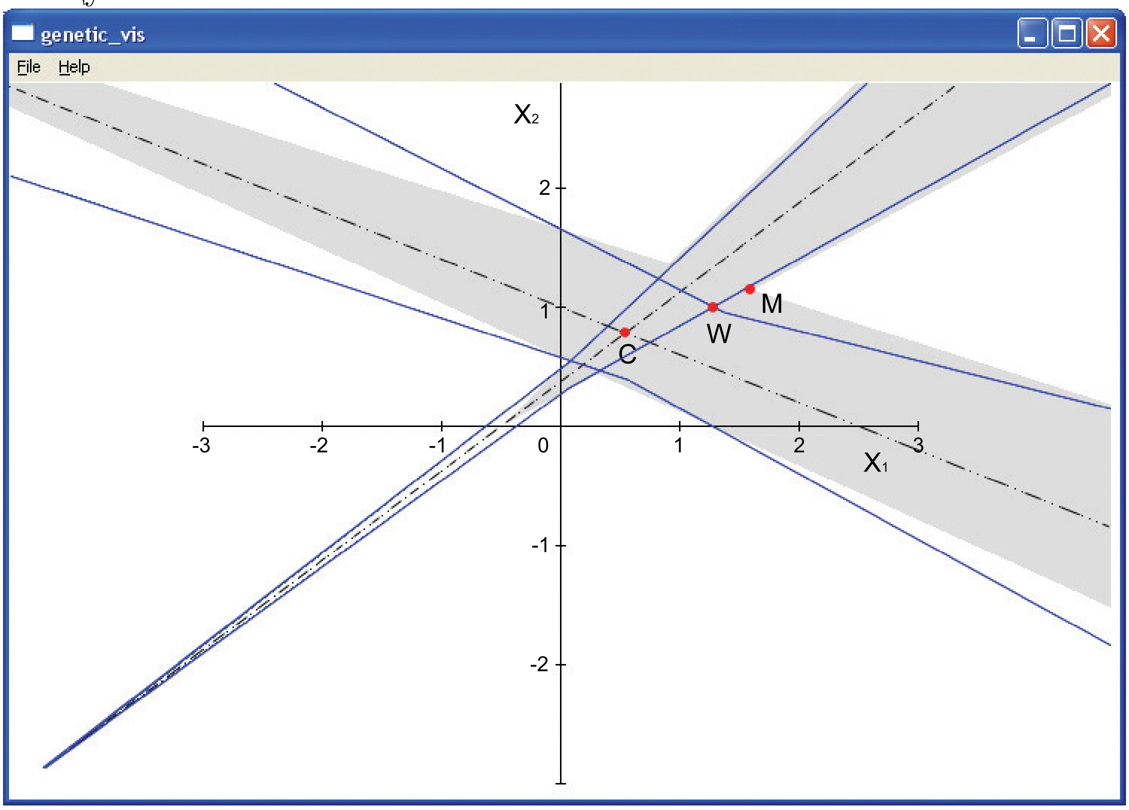

Рис. 1: Области допустимых решений эквивалентных детерминированных аналогов задачи (4.1)-(4.3).

На рисунке 1 изображены области допустимых решений для случая взаимно T_W-связанных (область, ограниченная четырьмя линиями), взаимно минисвязанных (пересечение сплошных закрашенных областей) и четких параметров (точка пересечения двух штрих-пунктирных линий). Точки W, M, C — точки оптимума для соответствующих случаев. Для наглядности на рисунке опущены области, задаваемые первым неравенством системы (4.4) и ограничением $x \in \mathbb{E}^2_+$.

Таблица 1: Решения модельного примера в трех различных случаях: при четких, взаимно T_W-связанных и при минисвязанных параметрах.

параметры	x_1	x_2	$F_T(x_1, x_2)$
четкие	0.5435	0.7826	0.0653
взаимно T_W-связанные	1.2824	1.0026	5.3511
взаимно минисвязанные	1.6092	1.1436	9.7615

Из полученных результатов и рисунка 1 следует, что при использовании T_W-нормы наблюдается эффект сужения области допустимых решений, что естественным образом сказывается на поведении оптимального решения задачи возможностной оптимизации.

Основные результаты. В ходе решения поставленных в диссертационной работе задач были достигнуты следующие результаты.

1. Разработаны элементы исчисления возможностей для взаимно T_W-связанных нечетких величин: получена формула, позволяющая идентифицировать функцию распределения взвешенной T_W-суммы нечетких величин с одинаковыми и различными левыми и правыми формами.

2. Получены формулы для вычисления границ α-уровневых множеств взвешенной T_W-суммы нечетких величин.

3. Разработаны непрямые методы решения базовых задач возможностной оптимизации в возможностно-необходимостном контексте.

4. Доказана теорема вложенности области допустимых решений для эквивалентного детерминированного аналога задачи с взаимно T_W-связанными параметрами в область допустимых решений эквивалентного детерминированного аналога задачи с минисвязанными параметрами в контексте возможность/необходимость.

5. Реализован программный комплекс на основе генетического алгоритма оптимизации, реализующий разработанные непрямые методы.

Результаты, полученные в диссертации, позволяют расширить круг практических задач, решаемых в рамках возможностного программирования, за счет новых методов агрегирования и управления нечеткостью исходной информации.

Публикации автора по теме диссертации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Солдатенко И.С. О генетическом алгоритме решения задачи возможностной оптимизации при взаимно T_W-связанных параметрах // Вестник Тверского гос. ун-та. Сер. Прикладная математика. №4(64), вып. 8, 2008. Стр. 25 – 36.

2. Солдатенко И.С., Язенин А.В. Задачи возможностной оптимизации с взаимно t-связанными параметрами: сравнительное изучение // Известия РАН. Теория и системы управления, №5, 2008. Стр. 87 – 98.

3. Солдатенко И.С., Пильщиков Д.Е., Язенин А.В. О методе решения одной задачи необходимостной оптимизации // Вестник Тверского гос. ун-та. Сер. Прикладная математика. №26(86), вып. 3(10), 2008. Стр. 109 – 117.

Прочие публикации автора по теме диссертации

1. Солдатенко И.С. О взвешенной сумме взаимно T_W-связанных нечетких величин // Вестник Тверского гос. ун-та. Сер. Прикладная математика. №5(33), вып. 4, 2007. Стр. 63 – 77.

2. Солдатенко И.С. О методе решения одной задачи возможностного программирования в случае T_W-связанных параметров // Сб. научн. тр. IV-й Междунар. научно-практической конф. «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте». Т.1, М.: Физматлит, 2007. Стр. 231 – 238.

3. Солдатенко И.С. О методе решения задачи максимизации возможности достижения нечеткой цели в случае T_W-связанных параметров // Нечеткие системы и мягкие вычисления. Том 2, №4, 2007. Стр. 39 – 47.

4. I.S. Soldatenko, A.V. Yazenin. Possibilistic optimization problems with mutually t-related parameters // IEEE Conference Proceedings. Fuzzy Information Processing Society, 2008. NAFIPS 2008. Digital Object Identifier: 10.1109/NAFIPS.2008.4531249.