МОДЕЛИ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 532, 517.958

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Шеретов Ю.В.
Кафедра математического анализа

Поступила в редакцию 05.09.2011, после переработки 12.09.2011.

Для квазигидродинамических уравнений в приближении мелкой воды доказаны теоремы о возрастании энтропии и о единственности классического решения основной начально–краевой задачи.

For quasi–hydrodynamic equations in shallow water approximation the theorems about entropy increasing and on the uniqueness of classical solution of main boundary–value problem are proved.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, квазигидродинамические уравнения, приближение мелкой воды, энтропия, единственность классического решения.
Keywords: Navier–Stokes equations, quasi-hydrodynamic equations, shallow water approximation, entropy, uniqueness of classical solution.

Введение

Уравнения теории мелкой воды были предложены в XIX в. французским ученым Барре де Сен–Венаном. Для одномерных нестационарных течений тонкого слоя жидкости со свободной границей над ровным дном они приведены в [1] на с. 569. Уравнения динамики идеальной и вязкой жидкости в приближении мелкой воды в одномерном и двумерном случае стали предметом многочисленных теоретических и численных исследований [2] – [6]. Интерес к этому направлению связан, в частности, с необходимостью математического моделирования волновых явлений и процессов, происходящих в гидротехнических сооружениях.

В работе [7] автором была феноменологически выведена система уравнений для описания движений сжимаемой вязкой теплопроводной среды, получившая название квазигидродинамической (КГД). Она отличалась от полной системы Навье–Стокса дивергентными членами, включающими характерное время релаксации τ. Физические принципы, лежащие в основе подхода, изложены в [8], [9]. Теоретическому и численному исследованию полных и упрощенных КГД уравнений посвящена обширная научная литература [7] – [15]. Глубокий математический анализ полной системы КГД, ее линеаризованного варианта и баротропного приближения проведен А.А. Злотником в [12]. В частности, доказаны теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши.

Квазигидродинамическая система в приближении мелкой воды была выписана впервые в [16] – [18]. Дополнительные к уравнениям Сен–Венана члены выполняли роль искусственных регуляризаторов, обеспечивающих устойчивость и точность компьютерных вычислений. Эта новая система нуждалась в теоретическом обосновании. В [16] – [18] рассмотрен также другой способ регуляризации уравнений мелкой воды. Диссипативный характер соответствующих уравнений для одномерных нестационарных течений установлен недавно в [19].

В настоящей работе для КГД системы в приближении мелкой воды поставлена основная начально–краевая задача и доказана теорема о возрастании энтропии. Методом энергетических неравенств доказана теорема о единственности классического решения при произвольном выборе постоянных положительных параметров. Такой же факт для КГД модели слабосжимаемой вязкой жидкости установлен недавно автором в [11].

Энергетический метод применялся ранее Е. Фоа и Д.Е. Долидзе (см. [20], [21]) при доказательстве единственности решения уравнений Навье–Стокса в случае несжимаемой жидкости. Аналогичный результат для системы Навье–Стокса в баротропном приближении был опубликован Д. Граффи [21]. Дж. Серрин [22] разработал вариант энергетического метода для доказательства единственности классического решения полных уравнений Навье–Стокса. Не решенными оставались сложные проблемы существования решений. Обзоры некоторых полученных в этом направлении результатов представлены в [23] – [25].

1. Квазигидродинамические уравнения в приближении мелкой воды. Постановка начально–краевой задачи

Система квазигидродинамических уравнений в приближении мелкой воды может быть записана в следующем дивергентном виде:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{div}\ (h\vec{u}) = \mathrm{div}\ (h\vec{w}), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial (h\vec{u})}{\partial t} + \mathrm{div}\ (h\vec{u}\otimes\vec{u}) + g\nabla\Big(\frac{h^2}{2}\Big) = 2\nu\ \mathrm{div}\ \big(h\widehat{\sigma}(\vec{u})\big) + \mathrm{div}\ \big(h\vec{w}\otimes\vec{u} + h\vec{u}\otimes\vec{w}\big). \tag{1.2}$$

Здесь

$$\widehat{\sigma}(\vec{u}) = \widehat{\sigma} = \frac{1}{2}\big[(\nabla\otimes\vec{u}) + (\nabla\otimes\vec{u})^T\big]$$

– тензор скоростей деформаций,

$$\vec{w} = \tau\big((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + g\nabla h\big).$$

Коэффициент кинематической вязкости жидкости ν и характерное время релаксации τ считаются заданными положительными константами. Параметр τ определяется по формуле

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2} = \frac{\eta}{\rho c_s^2},$$

где η – коэффициент динамической вязкости, ρ – плотность жидкости, c_s – известная скорость звука в ней. Систему (1.1) – (1.2) можно рассматривать как для одной ($n = 1$), так и для двух ($n = 2$) пространственных переменных. В случае $n = 2$ эта система замкнута относительно неизвестных функций – $\vec{u} = \vec{u}(x, y, t)$ и $h = h(x, y, t)$. Вектор $\vec{u} = (u_x(x, y, t), u_y(x, y, t))$=$(u_1, u_2)$ – усредненная по высоте скорость течения. Величина $h = h(x, y, t)$ интерпретируется как расстояние по вертикали от ровного дна водоема, расположенного в плоскости xoy, до свободной поверхности жидкости. Модуль ускорения свободного падения g равен $9.8 \cdot 10^2$ см/с^2. Символами div и ∇ обозначены двумерные операторы дивергенции и градиента. Влияние сил Кориолиса не учитывается.

В пределе при $c_s \to +\infty$ КГД система переходит в систему Навье–Стокса в приближении мелкой воды. Устремляя в (1.1) – (1.2) параметр ν к нулю, получим классические уравнения Барре де Сен–Венана в теории мелкой воды. С некоторыми отличиями в выборе диссипативных коэффициентов $\nu = \nu(h)$, $\tau = \tau(h)$ система (1.1) – (1.2) была выписана в работах Т.Г. Елизаровой с соавторами в [16] – [18]. При этом добавочные к уравнениям Сен–Венана члены в КГД системе выполняли роль искусственных регуляризаторов, необходимых для обеспечения устойчивости и точности численного счета по построенному на ее основе вычислительному алгоритму.

Пусть V – ограниченная односвязная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2_{x,y}$ с кусочно-гладкой границей ∂V, $\overline{V} = V \cup \partial V$ – ее замыкание, $\vec{n} = \vec{n}(x, y)$ – вектор внешней единичной нормали к ∂V в точке $(x, y) \in \partial V$, $Q = V \times [0,\ T]$ – ограниченный цилиндр в $\mathbb{R}^2_{x,y} \times \mathbb{R}_t$, $\overline{Q} = \overline{V} \times [0,\ T]$ – его замыкание, T – фиксированное положительное число. Параметр $t \in [0,\ T]$ интерпретируется как время. Добавим к системе (1.1) – (1.2) начальные условия

$$\vec{u}\Big|_{t=0} = \vec{u}_0(x, y), \qquad h\Big|_{t=0} = h_0(x, y), \qquad (x, y) \in \overline{V}, \tag{1.3}$$

а также граничные условия

$$\vec{u}\Big|_{\partial V} = \vec{0}, \qquad (\vec{w} \cdot \vec{n})\Big|_{\partial V} = 0, \qquad t \in [0,\ T], \tag{1.4}$$

выражающие свойство прилипания жидкости к границе ∂V и отсутствие ее потока через ∂V. Здесь $\vec{u}_0(x, y)$ и $h_0(x, y)$ – заданные функции.

Введем для удобства вектор $\vec{x} = (x, y) = (x_1, x_2)$. Символом $C^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$, где α – натуральное число, обозначим класс непрерывных в Q функций $f = f(\vec{x}, t)$, имеющих непрерывные в Q частные производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial t^{\beta}}$$

для любых целых и неотрицательных чисел α_1, α_2, и β, подчиняющихся неравенству $\alpha_1 + \alpha_2 + 2\beta \leqslant 2\alpha$. Множество $\mathbf{C}^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$ состоит из вектор–функций $\vec{f} = \vec{f}(\vec{x}, t) = (f_1(\vec{x}, t), f_2(\vec{x}, t))$, каждая компонента f_i которых принадлежит $C^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$.

Определение. *Решением (в классическом смысле) начально–краевой задачи* (1.1) – (1.4) *назовем функцию* $\vec{u} = \vec{u}(x, y, t) \in \boldsymbol{C}^{2,1}_{\vec{x},t}(Q) \cap \boldsymbol{C}^1(\overline{Q})$ *и положительную в* $\overline{Q}$ *функцию* $h = h(x, y, t) \in C^{2,1}_{\vec{x},t}(Q) \cap C^1(\overline{Q})$, *которые удовлетворяют при всех* $(x, y, t) \in Q$ *уравнениям* (1.1) – (1.2), *а также условиям* (1.3) – (1.4).

2. Основное энергетическое равенство. Возрастание энтропии

Покажем, что КГД система в приближении мелкой воды является диссипативной и для нее справедливо свойство возрастания специфической энтропии. Представим уравнение (1.2) в недивергентной форме

$$h\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+h(\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\vec{u}+gh\nabla h=2\nu\ \mathrm{div}\ (h\widehat{\sigma}(\vec{u}))+\ \mathrm{div}\ (h\vec{u}\otimes\vec{w}). \tag{2.1}$$

Умножим скалярно обе части равенства (2.2) на $\vec{u}$. Будем иметь

$$\begin{gathered}h\vec{u}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+h\vec{u}\cdot\big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)\vec{u}+gh(\vec{u}\cdot\nabla)h=\\=2\nu\ \vec{u}\cdot\ \mathrm{div}\ (h\widehat{\sigma})+\vec{u}\cdot\ \mathrm{div}\ (h\vec{u}\otimes\vec{w}).\end{gathered} \tag{2.2}$$

Преобразуем последовательно все члены, входящие в (2.2):

$$h\vec{u}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}=\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{u}\cdot\vec{u})=h\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big), \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}h\vec{u}\cdot\big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)\vec{u}=h\sum_{i=1}^{2}\ u_i\ \sum_{j=1}^{2}(u_j-w_j)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\\=h\sum_{j=1}^{2}(u_j-w_j)\sum_{i=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{u_i^2}{2}\Big)=\\=h\sum_{j=1}^{2}(u_j-w_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{u_i^2}{2}\Big)=h\big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big),\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$gh(\vec{u}\cdot\nabla)h=gh\big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)h+gh(\vec{w}\cdot\nabla)h, \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}2\nu\ \vec{u}\cdot\ \mathrm{div}\ (h\widehat{\sigma})=2\nu\sum_{i=1}^{2}\ u_i\ \sum_{j=1}^{2}\ \frac{\partial(h\sigma_{ij})}{\partial x_j}=2\nu\sum_{i,j=1}^{2}\ u_i\ \frac{\partial(h\sigma_{ij})}{\partial x_j}=\\=2\nu\sum_{i,j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}(h\sigma_{ij}u_i)-2\nu h\sum_{i,j=1}^{2}\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\\=2\nu\sum_{j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(h\sum_{i=1}^{2}\ \sigma_{ij}u_i\Big)-\nu h\ \sum_{i,j=1}^{2}\sigma_{ij}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)=\\=2\nu\ \mathrm{div}\ \big(h\widehat{\sigma}\cdot\vec{u}\big)-2\nu h\big(\widehat{\sigma}:\widehat{\sigma}\big),\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\vec{u}\cdot\ \mathrm{div}\ (h\vec{u}\otimes\vec{w}) = \sum_{i=1}^{2}\ u_i\ \sum_{j=1}^{2}\ \frac{\partial(hu_jw_i)}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}(hu_jw_iu_i) - h\sum_{i,j=1}^{2}\ w_iu_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(hu_j\sum_{i=1}^{2}(w_iu_i)\Big) - h\sum_{i=1}^{2}\ w_i\sum_{j=1}^{2}\ u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} =$$

$$= \ \mathrm{div}\ \big(h\vec{u}(\vec{w}\cdot\vec{u})\big) - h\vec{w}\cdot(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}. \tag{2.7}$$

Здесь

$$\big(\widehat{\sigma}:\widehat{\sigma}\big) = \sum_{i,j=1}^{2}\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2$$

– двойное скалярное произведение одинаковых тензоров. При проведении вычислений учтена симметричность матрицы σ_{ij}. Подстановка (2.3) – (2.7) в (2.2) дает

$$h\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big) + h\big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big) - \mathrm{div}\ \big[2\nu h\big(\widehat{\sigma}\cdot\vec{u}\big) + h\vec{u}(\vec{w}\cdot\vec{u})\big] +$$

$$+gh\big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)h = -2\nu h\big(\widehat{\sigma}:\widehat{\sigma}\big) - h\vec{w}\cdot\big((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}+g\nabla h\big). \tag{2.8}$$

Принимая во внимание (1.1) и вспоминая, что

$$\vec{w} = \tau\big((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}+g\nabla h\big),$$

запишем (2.8) в эквивалентном виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(h\frac{\vec{u}^2}{2}\Big) + \mathrm{div}\ \Big[h(\vec{u}-\vec{w})\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big) - 2\nu h\big(\widehat{\sigma}\cdot\vec{u}\big) - h\vec{u}(\vec{w}\cdot\vec{u})\Big] +$$

$$+gh\big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)h = -\varPhi. \tag{2.9}$$

Здесь

$$\varPhi = 2\nu h\big(\widehat{\sigma}:\widehat{\sigma}\big) + h\frac{\vec{w}^2}{\tau} \tag{2.10}$$

– неотрицательный диссипативный функционал.

Умножим теперь уравнение (1.1) на величину gh и преобразуем результат к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(g\frac{h^2}{2}\Big) + \mathrm{div}\ \big[gh^2(\vec{u}-\vec{w})\big] - gh\big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)h = 0. \tag{2.11}$$

Складывая (2.9) и (2.11), выводим основное энергетическое равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(h\frac{\vec{u}^2}{2}+g\frac{h^2}{2}\Big) + \mathrm{div}\ \Big[h(\vec{u}-\vec{w})\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}+gh\Big) - 2\nu h\big(\widehat{\sigma}\cdot\vec{u}\big) - h\vec{u}(\vec{w}\cdot\vec{u})\Big] = -\varPhi, \tag{2.12}$$

которое выполняется на решениях системы (1.1) – (1.2).

Для любого $t \in [0,\ T]$ на решении поставленной начально–краевой задачи определим связанную с указанной системой энтропию

$$S(t) = -\frac{1}{2}\int\limits_V \Big(h\vec{u}^2 + gh^2\Big)dV. \tag{2.13}$$

Здесь $dV = dxdy$ – элемент площади. Справедлива

Теорема 1. *Пусть $\vec{u} = \vec{u}(x,y,t)$, $h = h(x,y,t)$ – классическое решение начально-краевой задачи* (1.1) – (1.4). *Тогда энтропия $S(t)$ является функцией класса $C^1([0,T])$ и при каждом $t \in [0,T]$ выполняется неравенство*

$$\frac{dS(t)}{dt} \geqslant 0. \tag{2.14}$$

Доказательство. Пусть $(\vec{u}, h)$ – решение поставленной начально–краевой задачи. Подставим его в (2.12) и проинтегрируем полученное равенство по области V. Воспользовавшись правилом Лейбница, формулой Гаусса–Остроградского (см., например, [10]) и определением (2.13), будем иметь будем иметь

$$\frac{dS(t)}{dt} + \oint\limits_\gamma (\vec{A}\cdot\vec{n})\ dl = \int\limits_V \varPhi\ dV.$$

Символом γ обозначена граница области ∂V, dl – элемент длины кривой γ. Векторное поле $\vec{A}$ вычисляется по формуле

$$\vec{A} = 2\nu h\big(\widehat{\sigma}\cdot\vec{u}\big) + h\vec{u}(\vec{w}\cdot\vec{u}) - h(\vec{u}-\vec{w})\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + gh\Big).$$

Кроме того, $S(t) \in C^1([0,T])$. В силу краевых условий (1.4) криволинейный интеграл

$$\oint\limits_\gamma (\vec{A}\cdot\vec{n})\ dl$$

обращается в нуль и справедливо соотношение

$$\frac{dS(t)}{dt} = \int\limits_V \varPhi\ dV. \tag{2.15}$$

Неравенство (2.14) вытекает из (2.15), если принять во внимание неотрицательность $\varPhi$. ■

Следствие. *Энтропия $S(t)$ возрастает на промежутке* $[0,T]$.

Заметим, что неравенство (2.14) выполняется и на решениях аналогично поставленной задачи для уравнений Навье–Стокса в приближении мелкой воды.

3. Единственность классического решения

Изучим вопрос о единственности классического решения поставленной начально–краевой задачи, исходя из предположения о том, что при некоторых $\vec{u}_0(x,y)$, $h_0(x,y)$ оно существует. Справедлива

Теорема 2. *Классическое решение начально-краевой задачи* (1.1) – (1.4) *является единственным при любом выборе положительных параметров* ν *и* τ.

Доказательство. Допустим, что наряду с $(\vec{u},h)$ существует другое решение $(\vec{u}_1,h_1)$ задачи (1.1) – (1.4). Тогда

$$\frac{\partial h_1}{\partial t}+\text{div }(h_1\vec{u}_1)=\text{div }(h_1\vec{w}_1), \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial(h_1\vec{u}_1)}{\partial t}+\text{div }(h_1\vec{u}_1\otimes\vec{u}_1)+g\nabla\Big(\frac{h_1^2}{2}\Big)=$$
$$+2\nu\text{ div }\big(h_1\widehat{\sigma}(\vec{u}_1)\big)+\text{div }\big(h_1\vec{w}_1\otimes\vec{u}_1+h_1\vec{u}_1\otimes\vec{w}_1\big), \tag{3.2}$$

$$\vec{u}_1\Big|_{t=0}=\vec{u}_0(x,y),\qquad h_1\Big|_{t=0}=h_0(x,y),\qquad (x,y)\in\overline{V}, \tag{3.3}$$

$$\vec{u}_1\Big|_{\partial V}=\vec{0},\qquad (\vec{w}_1\cdot\vec{n})\Big|_{\partial V}=0,\qquad t\in[0,\ T]. \tag{3.4}$$

Здесь

$$\widehat{\sigma}(\vec{u}_1)=\frac{1}{2}\big[(\nabla\otimes\vec{u}_1)+(\nabla\otimes\vec{u}_1)^T\big],\quad \vec{w}_1=\tau\Big((\vec{u}_1\cdot\nabla)\vec{u}_1+g\nabla h_1\Big).$$

Принимая во внимание (3.1), представим (3.2) в недивергентном виде

$$h_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t}+h_1(\vec{u}_1-\vec{w}_1)\cdot\nabla\vec{u}_1+gh_1\nabla h_1=2\nu\text{ div }(h_1\widehat{\sigma}(\vec{u}_1))+\text{ div }(h_1\vec{u}_1\otimes\vec{w}_1). \tag{3.5}$$

Пусть

$$\delta\vec{u}=\vec{u}_1-\vec{u},\quad \delta h=h_1-h. \tag{3.6}$$

Вычтем из (3.1), (3.5), (3.3), (3.4) соответственно равенства (1.1), (2.1), (1.3), (1.4). С учетом обозначений (3.6) будем иметь

$$\frac{\partial\delta h}{\partial t}+\text{div }\big[(h+\delta h)(\delta\vec{u}-\delta\vec{w})+\delta h(\vec{u}-\vec{w})\big]=0, \tag{3.7}$$

$$h\frac{\partial\delta\vec{u}}{\partial t}+\delta h\frac{\partial(\vec{u}+\delta\vec{u})}{\partial t}+h(\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\delta\vec{u}+$$
$$+\delta h\big(\vec{u}-\vec{w}+(\delta\vec{u}-\delta\vec{w})\big)\cdot\nabla(\vec{u}+\delta\vec{u})+h(\delta\vec{u}-\delta\vec{w})\cdot\nabla(\vec{u}+\delta\vec{u})+$$
$$+g(h+\delta h)\nabla\delta h+g\delta h\nabla h=2\nu\text{ div}\big[(h+\delta h)\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})+\delta h\widehat{\sigma}(\vec{u})\big]+$$
$$+\text{div}\big[h\vec{u}\otimes\delta\vec{w}+\delta(h\vec{u})\otimes\delta\vec{w}+\delta(h\vec{u})\otimes\vec{w}\big], \tag{3.8}$$

$$\delta\vec{u}\Big|_{t=0} = \vec{0}, \qquad \delta h\Big|_{t=0} = 0, \qquad (x,y) \in \overline{V}, \tag{3.9}$$

$$\delta\vec{u}\Big|_{\partial V} = \vec{0}, \qquad (\delta\vec{w}\cdot\vec{n})\Big|_{\partial V} = 0, \qquad t \in [0,\ T]. \tag{3.10}$$

Здесь использованы обозначения

$$\delta(h\vec{u}) = (h+\delta h)\delta\vec{u} + \delta h\vec{u}, \quad \widehat{\sigma}(\delta\vec{u}) = \frac{1}{2}\big[(\nabla\otimes\delta\vec{u}) + (\nabla\otimes\delta\vec{u})^T\big],$$

$$\delta\vec{w} = \tau\big[(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u} + (\delta\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + g\nabla\delta h\big]. \tag{3.11}$$

Умножим скалярно обе части равенства (3.8) на вектор $\delta\vec{u}$, а затем преобразуем результат к виду

$$\begin{gathered}
h\delta\vec{u}\cdot\frac{\partial\delta\vec{u}}{\partial t} + h\delta\vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\delta\vec{u} + \delta h(\delta\vec{u}\cdot\vec{B}) + \\
+h\delta\vec{u}\cdot\big((\delta\vec{u}-\delta\vec{w})\cdot\nabla\big)(\vec{u}+\delta\vec{u}) + g(h+\delta h)(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta h = \\
= 2\nu\delta\vec{u}\cdot\mathrm{div}\big((h+\delta h)\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big) + 2\nu\delta\vec{u}\cdot\mathrm{div}\big(\delta h\widehat{\sigma}(\vec{u})\big) + \\
+\delta\vec{u}\cdot\mathrm{div}\big((h+\delta h)\vec{u}\otimes\delta\vec{w}\big) + \delta\vec{u}\cdot\mathrm{div}\big((h+\delta h)\delta\vec{u}\otimes\delta\vec{w}\big) + \\
+\delta\vec{u}\cdot\mathrm{div}\big((h+\delta h)\delta\vec{u}\otimes\vec{w}\big) + \delta\vec{u}\cdot\mathrm{div}\big(\delta h\vec{u}\otimes\vec{w}\big),
\end{gathered} \tag{3.12}$$

где

$$\vec{B} = \frac{\partial(\vec{u}+\delta\vec{u})}{\partial t} + \big(\vec{u}-\vec{w}+(\delta\vec{u}-\delta\vec{w})\big)\cdot\nabla(\vec{u}+\delta\vec{u}) + g\nabla h.$$

Справедливы равенства

$$h\delta\vec{u}\cdot\frac{\partial\delta\vec{u}}{\partial t} = \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\delta\vec{u}\cdot\delta\vec{u}) = h\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\Big), \tag{3.13}$$

$$\begin{gathered}
h\delta\vec{u}\cdot\big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)\delta\vec{u} = h\sum_{i=1}^{2}\ \delta u_i\ \sum_{j=1}^{2}(u_j-w_j)\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} = \\
= h\sum_{j=1}^{2}(u_j-w_j)\sum_{i=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\delta u_i^2}{2}\Big) = \\
= h\sum_{j=1}^{2}(u_j-w_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{\delta u_i^2}{2}\Big) = h\big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)\Big(\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\Big),
\end{gathered} \tag{3.14}$$

$$2\nu\ \delta\vec{u}\cdot\mathrm{div}\big((h+\delta h)\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big) = 2\nu\sum_{i=1}^{2}\ \delta u_i\ \sum_{j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\big((h+\delta h)\sigma_{ij}(\delta\vec{u})\big) =$$

$$= 2\nu\sum_{i,j=1}^{2}\ \delta u_i\ \frac{\partial}{\partial x_j}\big((h+\delta h)\sigma_{ij}(\delta\vec{u})\big) = 2\nu\sum_{i,j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big((h+\delta h)\sigma_{ij}(\delta\vec{u})\delta u_i\Big) -$$

$$-2\nu(h+\delta h)\sum_{i,j=1}^{2}\ \sigma_{ij}(\delta\vec{u})\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}=2\nu\sum_{j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big((h+\delta h)\sum_{i=1}^{2}\ \sigma_{ij}(\delta\vec{u})\delta u_i\Big)-$$

$$-\nu(h+\delta h)\sum_{i,j=1}^{2}\ \sigma_{ij}(\delta\vec{u})\Big(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i}\Big)=2\nu\ \mathrm{div}\ \big[(h+\delta h)\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\cdot\delta\vec{u}\big)\big]-$$

$$-2\nu(h+\delta h)\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}):\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big), \tag{3.15}$$

$$2\nu\ \delta\vec{u}\cdot\mathrm{div}\big(\delta h\widehat{\sigma}(\vec{u})\big)=2\nu\sum_{i=1}^{2}\ \delta u_i\ \sum_{j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\delta h\sigma_{ij}(\vec{u})\big)=$$

$$=2\nu\sum_{i,j=1}^{2}\ \delta u_i\ \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\delta h\sigma_{ij}(\vec{u})\big)=2\nu\sum_{i,j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\delta h\sigma_{ij}\big(\vec{u}\big)\delta u_i\Big)-$$

$$-2\nu\delta h\sum_{i,j=1}^{2}\ \sigma_{ij}(\vec{u})\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}=2\nu\ \mathrm{div}\ \big[\delta h\big(\widehat{\sigma}(\vec{u})\cdot\delta\vec{u}\big)\big]-2\nu\ \delta h\sum_{i,j=1}^{2}\ \sigma_{ij}(\vec{u})\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}, \tag{3.16}$$

$$\delta\vec{u}\cdot\ \mathrm{div}\ \big((h+\delta h)\vec{u}\otimes\delta\vec{w}\big)=\sum_{i=1}^{2}\ \delta u_i\ \sum_{j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\big((h+\delta h)u_j\delta w_i\big)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\big((h+\delta h)u_j\delta w_i\delta u_i\big)-(h+\delta h)\sum_{i,j=1}^{2}\ \delta w_i u_j\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}=$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big((h+\delta h)u_j\sum_{i=1}^{2}(\delta w_i\delta u_i)\Big)-(h+\delta h)\sum_{i=1}^{2}\ \delta w_i\sum_{j=1}^{2}\ u_j\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}=$$

$$=\ \mathrm{div}\ \big((h+\delta h)\vec{u}(\delta\vec{w}\cdot\delta\vec{u})\big)-(h+\delta h)\delta\vec{w}\cdot(\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}, \tag{3.17}$$

$$\delta\vec{u}\cdot\ \mathrm{div}\ \big((h+\delta h)\delta\vec{u}\otimes\delta\vec{w}\big)=\sum_{i=1}^{2}\ \delta u_i\ \sum_{j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\big((h+\delta h)\delta u_j\delta w_i\big)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\big((h+\delta h)\delta u_j\delta w_i\delta u_i\big)-(h+\delta h)\sum_{i,j=1}^{2}\ \delta w_i\delta u_j\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}=$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big((h+\delta h)\delta u_j\sum_{i=1}^{2}(\delta w_i\delta u_i)\Big)-(h+\delta h)\sum_{i=1}^{2}\ \delta w_i\sum_{j=1}^{2}\ \delta u_j\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}=$$

$$=\ \mathrm{div}\ \big((h+\delta h)\delta\vec{u}(\delta\vec{w}\cdot\delta\vec{u})\big)-(h+\delta h)\delta\vec{w}\cdot(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}, \tag{3.18}$$

$$\delta\vec{u}\cdot\ \mathrm{div}\ \big((h+\delta h)\delta\vec{u}\otimes\vec{w}\big)=\sum_{i=1}^{2}\ \delta u_i\ \sum_{j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\big((h+\delta h)\delta u_j w_i\big)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\big((h+\delta h)\delta u_j w_i\delta u_i\big)-(h+\delta h)\sum_{i,j=1}^{2}\ w_i\delta u_j\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}=$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big((h+\delta h)\delta u_j\sum_{i=1}^{2}(w_i\delta u_i)\Big)-(h+\delta h)\sum_{i=1}^{2}\ w_i\sum_{j=1}^{2}\ \delta u_j\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}=$$

$$=\ \mathrm{div}\ \big((h+\delta h)\delta\vec{u}(\vec{w}\cdot\delta\vec{u})\big)-(h+\delta h)\vec{w}\cdot(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}, \tag{3.19}$$

$$\delta\vec{u}\cdot\ \mathrm{div}\ \big(\delta h\vec{u}\otimes\vec{w}\big)=\sum_{i=1}^{2}\ \delta u_i\ \sum_{j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\delta h u_j w_i\big)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\delta h u_j w_i\delta u_i\big)-\delta h\sum_{i,j=1}^{2}\ w_i u_j\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}=$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\delta h u_j\sum_{i=1}^{2}(w_i\delta u_i)\Big)-\delta h\sum_{i=1}^{2}\ w_i\sum_{j=1}^{2}\ u_j\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}=$$

$$=\ \mathrm{div}\ \big(\delta h\vec{u}(\vec{w}\cdot\delta\vec{u})\big)-\delta h\vec{w}\cdot(\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}. \tag{3.20}$$

В (3.15) учтена симметричность матрицы $\sigma_{ij}(\delta\vec{u})$. Подстановка (3.13) – (3.20) в (3.12) дает

$$h\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\Big)+h\big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)\Big(\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\Big)-$$

$$-\mathrm{div}\ \Big[2\nu(h+\delta h)\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\cdot\delta\vec{u}\big)+2\nu\delta h\big(\widehat{\sigma}(\vec{u})\cdot\delta\vec{u}\big)+$$

$$+(h+\delta h)(\vec{u}+\delta\vec{u})(\delta\vec{w}\cdot\delta\vec{u})\big)+\delta(h\vec{u})(\vec{w}\cdot\delta\vec{u})\Big]+$$

$$+2\nu(h+\delta h)\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}):\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big)+(h+\delta h)\delta\vec{w}\cdot\big[(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}+(\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}\big]+$$

$$+g(h+\delta h)(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta h=-h\delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)(\vec{u}+\delta\vec{u})+$$

$$+h\delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{w}\cdot\nabla\big)(\vec{u}+\delta\vec{u})-(h+\delta h)\vec{w}\cdot(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}-$$

$$-2\nu\ \delta h\sum_{i,j=1}^{2}\ \sigma_{ij}(\vec{u})\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}-\delta h(\delta\vec{u}\cdot\vec{B})-\delta h\ \vec{w}\cdot(\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}. \tag{3.21}$$

Здесь

$$\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}):\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big)=\sum_{i,j=1}^{2}\ \sigma_{ij}^2(\delta\vec{u})$$

– двойное скалярное произведение одинаковых тензоров. Преобразуем (3.21) к эквивалентному виду

$$h\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\Big) + h\big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)\Big(\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\Big) -$$
$$-\mathrm{div}\,\Big[2\nu(h+\delta h)\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\cdot\delta\vec{u}\big) + 2\nu\delta h\big(\widehat{\sigma}(\vec{u})\cdot\delta\vec{u}\big) +$$
$$+(h+\delta h)(\vec{u}+\delta\vec{u})(\delta\vec{w}\cdot\delta\vec{u})\big) + \delta(h\vec{u})(\vec{w}\cdot\delta\vec{u})\Big] +$$
$$+2\nu(h+\delta h)\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}) : \widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big) +$$
$$+(h+\delta h)\delta\vec{w}\cdot\big[(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u} + (\delta\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u} + g\nabla\delta h\big] +$$
$$+g(h+\delta h)(\delta\vec{u}-\delta\vec{w})\cdot\nabla\delta h = -h\delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)(\vec{u}+\delta\vec{u}) +$$
$$+h\delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{w}\cdot\nabla\big)(\vec{u}+\delta\vec{u}) + (h+\delta h)\delta\vec{w}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u} -$$
$$-(h+\delta h)\vec{w}\cdot(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u} - 2\nu\;\delta h\sum_{i,j=1}^{2}\;\sigma_{ij}(\vec{u})\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} -$$
$$-\delta h(\delta\vec{u}\cdot\vec{B}) - \delta h\;\vec{w}\cdot(\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}. \tag{3.22}$$

Принимая во внимание (1.1) и (3.11), из (3.22) находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(h\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\Big) + \mathrm{div}\,\Big[h\big(\vec{u}-\vec{w}\big)\Big(\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\Big) - 2\nu(h+\delta h)\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\cdot\delta\vec{u}\big) -$$
$$-2\nu\delta h\big(\widehat{\sigma}(\vec{u})\cdot\delta\vec{u}\big) - (h+\delta h)(\vec{u}+\delta\vec{u})(\delta\vec{w}\cdot\delta\vec{u})\big) - \delta(h\vec{u})(\vec{w}\cdot\delta\vec{u})\Big] +$$
$$+2\nu(h+\delta h)\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}) : \widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big) + (h+\delta h)\frac{\delta\vec{w}^2}{\tau} +$$
$$+g(h+\delta h)(\delta\vec{u}-\delta\vec{w})\cdot\nabla\delta h = -h\delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)(\vec{u}+\delta\vec{u}) +$$
$$+h\delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{w}\cdot\nabla\big)(\vec{u}+\delta\vec{u}) + (h+\delta h)\delta\vec{w}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u} -$$
$$-(h+\delta h)\vec{w}\cdot(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u} - 2\nu\;\delta h\sum_{i,j=1}^{2}\;\sigma_{ij}(\vec{u})\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} -$$
$$-\delta h(\delta\vec{u}\cdot\vec{B}) - \delta h\;\vec{w}\cdot(\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}. \tag{3.23}$$

Умножим теперь на $g\delta h$ равенство (3.7). После преобразований будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(g\frac{\delta h^2}{2}\Big) + \mathrm{div}\,\Big[g\frac{\delta h^2}{2}(\vec{u}-\vec{w}) + g\delta h(h+\delta h)(\delta\vec{u}-\delta\vec{w})\Big] -$$
$$-g(h+\delta h)(\delta\vec{u}-\delta\vec{w})\cdot\nabla\delta h + g\frac{\delta h^2}{2}\;\mathrm{div}(\vec{u}-\vec{w}) = 0. \tag{3.24}$$

Из (1.1) получаем

$$\mathrm{div}(\vec{u}-\vec{w}) = -\frac{1}{h}\Big(\frac{\partial h}{\partial t} + (\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla h\Big). \tag{3.25}$$

Комбинация (3.24) и (3.25) дает

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(g\frac{\delta h^2}{2}\Big)+\mathrm{div}\,\Big[g\frac{\delta h^2}{2}(\vec u-\vec w)+g\delta h(h+\delta h)(\delta\vec u-\delta\vec w)\Big]-$$

$$-g(h+\delta h)(\delta\vec u-\delta\vec w)\cdot\nabla\delta h=\frac{g}{2h}\delta h^2\Big(\frac{\partial h}{\partial t}+(\vec u-\vec w)\cdot\nabla h\Big). \qquad (3.26)$$

Складывая (3.23) и (3.26), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(h\frac{\delta\vec u^2}{2}+g\frac{\delta h^2}{2}\Big)+\mathrm{div}\,\vec A_\delta+$$

$$+2\nu(h+\delta h)\big(\widehat\sigma(\delta\vec u):\widehat\sigma(\delta\vec u)\big)+(h+\delta h)\frac{\delta\vec w^2}{\tau}=$$

$$=-h\delta\vec u\cdot\big(\delta\vec u\cdot\nabla\big)(\vec u+\delta\vec u)+h\delta\vec u\cdot\big(\delta\vec w\cdot\nabla\big)(\vec u+\delta\vec u)+(h+\delta h)\delta\vec w\cdot\big(\delta\vec u\cdot\nabla\big)\vec u-$$

$$-(h+\delta h)\vec w\cdot(\delta\vec u\cdot\nabla)\delta\vec u-2\nu\;\delta h\sum_{i,j=1}^{2}\;\sigma_{ij}(\vec u)\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}-$$

$$-\delta h(\delta\vec u\cdot\vec B)-\delta h\;\vec w\cdot(\vec u\cdot\nabla)\delta\vec u+\frac{g}{2h}\delta h^2\Big(\frac{\partial h}{\partial t}+(\vec u-\vec w)\cdot\nabla h\Big), \qquad (3.27)$$

где

$$\vec A_\delta=\big(\vec u-\vec w\big)\Big(h\frac{\delta\vec u^2}{2}+g\frac{\delta h^2}{2}\Big)+g\delta h(h+\delta h)(\delta\vec u-\delta\vec w)-$$

$$-2\nu(h+\delta h)\big(\widehat\sigma(\delta\vec u)\cdot\delta\vec u\big)-2\nu\delta h\big(\widehat\sigma(\vec u)\cdot\delta\vec u\big)-$$

$$-(h+\delta h)(\vec u+\delta\vec u)(\delta\vec w\cdot\delta\vec u)\big)-\delta(h\vec u)(\vec w\cdot\delta\vec u).$$

Проинтегрируем (3.27) по области V:

$$\int\limits_V\frac{\partial}{\partial t}\Big(h\frac{\delta\vec u^2}{2}+g\frac{\delta h^2}{2}\Big)\;dV+\int\limits_V\mathrm{div}\;\vec A_\delta\;dV+$$

$$+2\nu\int\limits_V(h+\delta h)\big(\widehat\sigma(\delta\vec u):\widehat\sigma(\delta\vec u)\big)\;dV+\frac{1}{\tau}\int\limits_V(h+\delta h)\delta\vec w^2\;dV=$$

$$=-\int\limits_V h\delta\vec u\cdot\big(\delta\vec u\cdot\nabla\big)(\vec u+\delta\vec u)\;dV+\int\limits_V h\delta\vec u\cdot\big(\delta\vec w\cdot\nabla\big)(\vec u+\delta\vec u)\;dV+$$

$$+\int\limits_V(h+\delta h)\delta\vec w\cdot\big(\delta\vec u\cdot\nabla\big)\vec u\;dV-\int\limits_V(h+\delta h)\vec w\cdot(\delta\vec u\cdot\nabla)\delta\vec u\;dV-$$

$$-2\nu\int\limits_V\delta h\sum_{i,j=1}^{2}\;\sigma_{ij}(\vec u)\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\;dV-\int\limits_V\delta h(\delta\vec u\cdot\vec B)\;dV-$$

$$-\int\limits_V\delta h\;\vec w\cdot(\vec u\cdot\nabla)\delta\vec u\;dV+\frac{g}{2}\int\limits_V\frac{\delta h^2}{h}\Big(\frac{\partial h}{\partial t}+(\vec u-\vec w)\cdot\nabla h\Big)\;dV. \qquad (3.28)$$

Преобразуем левую часть (3.28), используя правило Лейбница и формулу Гаусса–Остроградского:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \Big(h\frac{\delta\vec{u}^2}{2} + g\frac{\delta h^2}{2}\Big)\ dV + \oint\limits_\gamma (\vec{A}_\delta\cdot\vec{n})\ dl +$$
$$+2\nu\int\limits_V (h+\delta h)\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}) : \widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big)\ dV + \frac{1}{\tau}\int\limits_V (h+\delta h)\delta\vec{w}^2\ dV =$$
$$= -\int\limits_V h\delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)(\vec{u}+\delta\vec{u})\ dV + \int\limits_V h\delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{w}\cdot\nabla\big)(\vec{u}+\delta\vec{u})\ dV +$$
$$+\int\limits_V (h+\delta h)\delta\vec{w}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u}\ dV - \int\limits_V (h+\delta h)\vec{w}\cdot(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}\ dV -$$
$$-2\nu\int\limits_V \delta h\sum_{i,j=1}^{2}\ \sigma_{ij}(\vec{u})\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\ dV - \int\limits_V \delta h(\delta\vec{u}\cdot\vec{B})\ dV -$$
$$-\int\limits_V \delta h\ \vec{w}\cdot(\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}\ dV + \frac{g}{2}\int\limits_V \frac{\delta h^2}{h}\Big(\frac{\partial h}{\partial t} + (\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla h\Big)\ dV. \tag{3.29}$$

В силу краевых условий (1.4), (3.10) и свойств гладкости полей $(\vec{u}, h)$ и $(\delta\vec{u}, \delta h)$ криволинейный интеграл

$$\oint\limits_\gamma (\vec{A}_\delta\cdot\vec{n})\ dl$$

равен нулю. С учетом этого факта из (3.29) выводим неравенство

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \Big(h\frac{\delta\vec{u}^2}{2} + g\frac{\delta h^2}{2}\Big)\ dV +$$
$$+2\nu\int\limits_V (h+\delta h)\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}) : \widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big)\ dV + \frac{1}{\tau}\int\limits_V (h+\delta h)\delta\vec{w}^2\ dV \leqslant$$
$$\leqslant \Big|\int\limits_V h\delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)(\vec{u}+\delta\vec{u})\ dV\Big| + \Big|\int\limits_V h\delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{w}\cdot\nabla\big)(\vec{u}+\delta\vec{u})\ dV\Big| +$$
$$+\Big|\int\limits_V (h+\delta h)\delta\vec{w}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u}\ dV\Big| + \Big|\int\limits_V (h+\delta h)\vec{w}\cdot(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}\ dV\Big| +$$
$$+2\nu\Big|\int\limits_V \delta h\sum_{i,j=1}^{2}\ \sigma_{ij}(\vec{u})\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\ dV\Big| + \Big|\int\limits_V \delta h\ \vec{w}\cdot(\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}\ dV\Big| +$$
$$+\Big|\int\limits_V \delta h(\delta\vec{u}\cdot\vec{B})\ dV\Big| + \frac{g}{2}\Big|\int\limits_V \frac{\delta h^2}{h}\Big(\frac{\partial h}{\partial t} + (\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla h\Big)\ dV\Big|. \tag{3.30}$$

Оно справедливо при любом $t \in [0,\ T]$.

На следующем шаге последовательно оценим сверху все члены в правой части (3.30). Согласно теореме Вейерштрасса любая определенная и непрерывная на замкнутом ограниченном множестве $\overline{Q}$ функция ограничена. Воспользовавшись этой теоремой и свойствами гладкости решения $(\vec{u}, h)$, убеждаемся в существовании таких положительных постоянных h_{min}, h_{max}, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, что выполняются неравенства

$$h_{min} \leqslant h \leqslant h_{max}, \qquad h_{min} \leqslant h + \delta h \leqslant h_{max}, \tag{3.31}$$

$$\max_{i,j=\overline{1,2}} \max_{(\vec{x},t)\in\overline{Q}} \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| \leqslant M_1, \qquad \max_{i,j=\overline{1,2}} \max_{(\vec{x},t)\in\overline{Q}} \left|\frac{\partial(u_i+\delta u_i)}{\partial x_j}\right| \leqslant M_1, \tag{3.32}$$

$$\frac{1}{\sqrt{gh_{max}}} \max_{i=\overline{1,2}} \max_{(\vec{x},t)\in\overline{Q}} \left|B_i\right| \leqslant M_2, \tag{3.33}$$

$$\frac{1}{\sqrt{gh_{max}}} \max_{i=\overline{1,2}} \max_{(\vec{x},t)\in\overline{Q}} \left|\sum_{j=1}^{2} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + g\frac{\partial h}{\partial x_i}\right| \leqslant M_3, \tag{3.34}$$

$$\frac{1}{gh_{max}} \max_{i,j=\overline{1,2}} \max_{(\vec{x},t)\in\overline{Q}} \left|\Big(\sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + g\frac{\partial h}{\partial x_i}\Big)u_j\right| \leqslant M_4, \tag{3.35}$$

$$\max_{(\vec{x},t)\in\overline{Q}} \left|\frac{1}{h}\Big(\frac{\partial h}{\partial t} + (\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla h\Big)\right| \leqslant M_5. \tag{3.36}$$

Принимая во внимание (3.31) – (3.36), имеем

$$\Big|\int_V h\delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)(\vec{u}+\delta\vec{u})\;dV\Big| \leqslant \int_V h\Big|\sum_{i,j=1}^{2} \delta u_i \delta u_j \frac{\partial(u_i+\delta u_i)}{\partial x_j}\Big|\;dV \leqslant$$

$$\leqslant h_{max}\int_V \sum_{i,j=1}^{2} |\delta u_i||\delta u_j|\Big|\frac{\partial(u_i+\delta u_i)}{\partial x_j}\Big|\;dV \leqslant M_1 h_{max}\int_V \sum_{i,j=1}^{2} |\delta u_i||\delta u_j|\;dV \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_1 h_{max}}{2}\int_V \sum_{i,j=1}^{2} \big(\delta u_i^2 + \delta u_j^2\big)\;dV = 4M_1 h_{max}\int_V \frac{\delta\vec{u}^2}{2}\;dV, \tag{3.37}$$

$$\Big|\int_V h\delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{w}\cdot\nabla\big)(\vec{u}+\delta\vec{u})\;dV\Big| \leqslant \int_V h\Big|\sum_{i,j=1}^{2} \delta u_i \delta w_j \frac{\partial(u_i+\delta u_i)}{\partial x_j}\Big|\;dV \leqslant$$

$$\leqslant h_{max}\int_V \sum_{i,j=1}^{2} |\delta u_i||\delta w_j|\Big|\frac{\partial(u_i+\delta u_i)}{\partial x_j}\Big|\;dV \leqslant$$

$$\leqslant M_1 h_{max}\int_V \sum_{i,j=1}^{2} |\delta u_i||\delta w_j|\;dV \leqslant \frac{M_1 h_{max}}{2}\int_V \sum_{i,j=1}^{2} \Big(\frac{\delta u_i^2}{\varepsilon_1} + \varepsilon_1 \delta w_j^2\Big)\;dV =$$

$$= \frac{2M_1 h_{max}}{\varepsilon_1} \int\limits_V \frac{\delta \vec{u}^2}{2}\, dV + M_1 \varepsilon_1 h_{max} \int\limits_V \delta \vec{w}^2\, dV, \tag{3.38}$$

$$\Big| \int\limits_V (h+\delta h) \delta \vec{w} \cdot \big(\delta \vec{u} \cdot \nabla\big) \vec{u}\, dV \Big| \leqslant \int\limits_V (h+\delta h) \Big| \sum_{i,j=1}^{2} \delta w_i \delta u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Big|\, dV \leqslant$$

$$\leqslant h_{max} \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{2} |\delta w_i| |\delta u_j| \Big| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Big|\, dV \leqslant M_1 h_{max} \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{2} |\delta u_j| |\delta w_i|\, dV \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_1 h_{max}}{2} \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{2} \Big(\frac{\delta u_j^2}{\varepsilon_1} + \varepsilon_1 \delta w_i^2 \Big)\, dV =$$

$$= \frac{2M_1 h_{max}}{\varepsilon_1} \int\limits_V \frac{\delta \vec{u}^2}{2}\, dV + M_1 \varepsilon_1 h_{max} \int\limits_V \delta \vec{w}^2\, dV, \tag{3.39}$$

$$\Big| \int\limits_V (h+\delta h) \vec{w} \cdot (\delta \vec{u} \cdot \nabla) \delta \vec{u}\, dV \Big| \leqslant \int\limits_V (h+\delta h) \Big| \sum_{i,j=1}^{2} w_i \delta u_j \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \Big|\, dV \leqslant$$

$$\leqslant h_{max} \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{2} |w_i| |\delta u_j| \Big| \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \Big|\, dV \leqslant \tau M_3 h_{max} \sqrt{g h_{max}} \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{2} |\delta u_j| \Big| \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \Big|\, dV \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_3}{2} \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{2} \Big[h_{max} \frac{\delta u_j^2}{\varepsilon_2} + \tau^2 g h_{max}^2 \varepsilon_2 \Big(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \Big)^2 \Big]\, dV =$$

$$= \frac{2M_3 h_{max}}{\varepsilon_2} \int\limits_V \frac{\delta \vec{u}^2}{2}\, dV + \frac{M_3 \tau^2 g h_{max}^2 \varepsilon_2}{2} \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{2} \Big(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \Big)^2\, dV, \tag{3.40}$$

$$2\nu \Big| \int\limits_V \delta h \sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij}(\vec{u}) \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j}\, dV \Big| \leqslant 2\nu \int\limits_V |\delta h| \Big| \sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij}(\vec{u}) \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \Big|\, dV \leqslant$$

$$\leqslant 2\nu \int\limits_V |\delta h| \sum_{i,j=1}^{2} |\sigma_{ij}(\vec{u})| \Big| \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \Big|\, dV \leqslant$$

$$\leqslant \nu \int\limits_V |\delta h| \sum_{i,j=1}^{2} \Big(\Big| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Big| + \Big| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Big| \Big) \Big| \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \Big|\, dV \leqslant$$

$$\leqslant 2\nu M_1 \int\limits_V |\delta h| \sum_{i,j=1}^{2} \Big| \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \Big|\, dV \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M_1}{\varepsilon_2}\int\limits_V g\frac{\delta h^2}{2}\,dV + \frac{M_1\nu^2\varepsilon_2}{g}\int\limits_V \Big(\sum_{i,j=1}^{2}\Big|\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\Big|\Big)^2\,dV \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M_1}{\varepsilon_2}\int\limits_V g\frac{\delta h^2}{2}\,dV + \frac{4M_1\nu^2\varepsilon_2}{g}\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{2}\Big(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\Big)^2\,dV, \tag{3.41}$$

$$\Big|\int\limits_V \delta h\;\vec{w}\cdot(\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}\;dV\Big| \leqslant \int\limits_V |\delta h|\Big|\sum_{i,j=1}^{2} w_i u_j\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\Big|\,dV \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_V |\delta h|\sum_{i,j=1}^{2}|w_i u_j|\Big|\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\Big|\,dV \leqslant \tau g h_{max} M_4\int\limits_V |\delta h|\sum_{i,j=1}^{2}\Big|\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\Big|\,dV \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_4}{\varepsilon_2}\int\limits_V g\frac{\delta h^2}{2}\,dV + \frac{M_4\tau^2 g h_{max}^2\varepsilon_2}{2}\int\limits_V \Big(\sum_{i,j=1}^{2}\Big|\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\Big|\Big)^2\,dV \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_4}{\varepsilon_2}\int\limits_V g\frac{\delta h^2}{2}\,dV + 2M_4\tau^2 g h_{max}^2\varepsilon_2\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{2}\Big(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\Big)^2\,dV, \tag{3.42}$$

$$\Big|\int\limits_V \delta h(\delta\vec{u}\cdot\vec{B})\,dV\Big| \leqslant \int\limits_V |\delta h|\Big|\sum_{i=1}^{2}\delta u_i B_i\Big|\,dV \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_V |\delta h|\sum_{i=1}^{2}|\delta u_i||B_i|\,dV \leqslant M_2\sqrt{g h_{max}}\int\limits_V |\delta h|\sum_{i=1}^{2}|\delta u_i|\,dV \leqslant$$

$$\leqslant M_2\int\limits_V g\frac{\delta h^2}{2}\,dV + \frac{M_2 h_{max}}{2}\int\limits_V \Big(\sum_{i=1}^{2}|\delta u_i|\Big)^2\,dV \leqslant$$

$$\leqslant M_2\int\limits_V g\frac{\delta h^2}{2}\,dV + 2M_2 h_{max}\int\limits_V \frac{\delta\vec{u}^2}{2}\,dV, \tag{3.43}$$

$$\frac{g}{2}\Big|\int\limits_V \frac{\delta h^2}{h}\Big(\frac{\partial h}{\partial t} + (\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla h\Big)\,dV\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{g}{2}\int\limits_V \delta h^2\Big|\frac{1}{h}\Big(\frac{\partial h}{\partial t} + (\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla h\Big)\Big|\,dV \leqslant M_5\int\limits_V g\frac{\delta h^2}{2}\,dV. \tag{3.44}$$

Символами ε_1 и ε_2 обозначены произвольные положительные константы. При проведении оценок были использованы свойства интеграла Лебега, а также неравенства Коши

$$|a||b| \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2\Big), \qquad \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n}|a_i|\Big)^2 \leqslant n\sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Здесь ε – любое фиксированное положительное число, n – натуральное число, a, b, $a_1, \ldots, a_n$ – произвольные вещественные числа.

Из (3.30), (3.37) – (3.44) следует, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \Big(h\frac{\delta\vec{u}^2}{2} + g\frac{\delta h^2}{2}\Big)\, dV +$$

$$+2\nu \int\limits_V (h+\delta h)\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}) : \widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big)\, dV + \frac{1}{\tau}\int\limits_V (h+\delta h)\delta\vec{w}^2\, dV \leqslant$$

$$\leqslant \Big(4M_1 + \frac{4M_1}{\varepsilon_1} + \frac{2M_3}{\varepsilon_2}\Big)\int\limits_V h_{max}\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\, dV +$$

$$+\Big(\frac{2M_1}{\varepsilon_2} + M_2 + \frac{M_4}{\varepsilon_2} + M_5\Big)\int\limits_V g\frac{\delta h^2}{2}\, dV +$$

$$+\Big(\frac{4M_1\nu^2}{g} + \frac{M_3\tau^2 g h_{max}^2}{2} + 2M_4\tau^2 g h_{max}^2\Big)\varepsilon_2 \sum_{i,j=1}^{2}\Big(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\Big)^2\, dV +$$

$$+2M_1\varepsilon_1\int\limits_V h_{max}\, \delta\vec{w}^2\, dV. \tag{3.45}$$

Для второго и третьего слагаемого в левой части (3.45) справедливы оценки снизу

$$2\nu \int\limits_V (h+\delta h)\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}) : \widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big)\, dV \geqslant 2\nu h_{min}\int\limits_V \big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}) : \widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big)\, dV \geqslant$$

$$\geqslant \nu h_{min}\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{2}\Big(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\Big)^2\, dV, \tag{3.46}$$

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_V (h+\delta h)\delta\vec{w}^2\, dV \geqslant \frac{h_{min}}{\tau}\int\limits_V \delta\vec{w}^2\, dV. \tag{3.47}$$

На последнем шаге в (3.46) было использовано известное (см. [26], [10]) неравенство Корна

$$\int\limits_V \big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}) : \widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big)\, dV \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{2}\Big(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\Big)^2\, dV,$$

которое выполняется для любых вектор функций $\delta\vec{u}$ класса $\mathbf{C}^2(V)\cap\mathbf{C}^1(\overline{V})$, обращающихся в нуль на ∂V. Комбинация (3.45), (3.46) и (3.47) дает

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \Big(h\frac{\delta\vec{u}^2}{2} + g\frac{\delta h^2}{2}\Big)\, dV +$$

$$+\Big[\nu h_{min} - \Big(\frac{4M_1\nu^2}{g} + \frac{M_3\tau^2 g h_{max}^2}{2} + 2M_4\tau^2 g h_{max}^2\Big)\varepsilon_2\Big] \sum_{i,j=1}^{2}\Big(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\Big)^2\, dV +$$

$$+\Big(\frac{1}{\tau}-2M_1\varepsilon_1\frac{h_{max}}{h_{min}}\Big)\int\limits_V h_{min}\delta\vec{w}^2\,dV\leqslant$$

$$\leqslant\Big(4M_1+\frac{4M_1}{\varepsilon_1}+\frac{2M_3}{\varepsilon_2}\Big)\int\limits_V h_{max}\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\,dV+$$

$$+\Big(\frac{2M_1}{\varepsilon_2}+M_2+\frac{M_4}{\varepsilon_2}+M_5\Big)\int\limits_V g\frac{\delta h^2}{2}\,dV. \tag{3.48}$$

Используя произвол в выборе положительных констант ε_1 и ε_2, положим

$$\varepsilon_1=\overline{\varepsilon}_1=\frac{1}{2\tau M_1}\frac{h_{min}}{h_{max}},$$

$$\varepsilon_2=\overline{\varepsilon}_2=\nu h_{min}\Big(\frac{4M_1\nu^2}{g}+\frac{M_3\tau^2gh_{max}^2}{2}+2M_4\tau^2gh_{max}^2\Big)^{-1}. \tag{3.49}$$

Тогда второй и третий члены в левой части (3.48) обратятся в нуль. Рассмотрим положительную константу

$$M=\max\Big\{\Big(4M_1+\frac{4M_1}{\overline{\varepsilon}_1}+\frac{2M_3}{\overline{\varepsilon}_2}\Big)\frac{h_{max}}{h_{min}},\ \frac{2M_1}{\overline{\varepsilon}_2}+M_2+\frac{M_4}{\overline{\varepsilon}_2}+M_5\Big\}. \tag{3.50}$$

На отрезке $[0,\ T]$ определим функции

$$f_\delta(t)=\frac{1}{2}\int\limits_V\Big(h_{min}\delta\vec{u}^2+g\delta h^2\Big)\,dV, \tag{3.51}$$

$$\varphi_\delta(t)=\frac{1}{2}\int\limits_V\Big(h\delta\vec{u}^2+g\delta h^2\Big)\,dV, \tag{3.52}$$

$$F_\delta(t)=\int\limits_0^t f_\delta(t_*)dt_*, \tag{3.53}$$

принадлежащие классам гладкости $C^1([0,\ T])$, $C^1([0,\ T])$ и $C^2([0,\ T])$ соответственно.

Следствием (3.48) – (3.52) является оценка

$$\frac{d\varphi_\delta(t)}{dt}\leqslant Mf_\delta(t). \tag{3.54}$$

Фиксируем число $t\in[0,\ T]$ и проинтегрируем (3.54) по промежутку $[0,\ t]$. Принимая во внимание соотношение (3.53), будем иметь

$$\varphi_\delta(t)-\varphi_\delta(0)\leqslant MF_\delta(t). \tag{3.55}$$

Но второе слагаемое в левой части (3.55) равно нулю в силу начальных условий (3.9) и свойств гладкости полей $\delta\vec{u}$, δh, h. Стало быть,

$$\varphi_\delta(t)\leqslant MF_\delta(t).$$

Отсюда вытекает оценка

$$f_\delta(t) \leqslant MF_\delta(t),$$

которая может быть записана в эквивалентном виде

$$\frac{dF_\delta(t)}{dt} - MF_\delta(t) \leqslant 0, \quad t \in [0,\ T].$$

Пусть $J_\delta(t) = F_\delta(t)e^{-Mt}$. Тогда

$$e^{Mt}\frac{dJ_\delta(t)}{dt} \leqslant 0.$$

Экспонента принимает только положительные значения, поэтому

$$\frac{dJ_\delta(t)}{dt} \leqslant 0, \quad t \in [0,\ T].$$

Таким образом, функция $J_\delta(t)$ убывает и для любого $t \in [0,\ T]$ имеет место неравенство

$$J_\delta(t) \leqslant J_\delta(0).$$

Его можно представить в равносильной форме

$$F_\delta(t) \leqslant F_\delta(0)e^{Mt}.$$

Но

$$F_\delta(0) = 0.$$

Тем самым,

$$F_\delta(t) \leqslant 0. \tag{3.56}$$

Оценка (3.56) справедлива при любом $t \in [0,\ T]$ и, в частности, при $t = T$. Последнее означает, что

$$F_\delta(T) \leqslant 0. \tag{3.57}$$

Вспоминая определения (3.51) и (3.53), запишем (3.57) следующим образом:

$$\int\limits_Q \left(h_{min}\delta\vec{u}^2 + g\delta h^2\right)\, dV dt \leqslant 0. \tag{3.58}$$

Условие (3.58) выполняется лишь в случае, когда $\delta\vec{u} \equiv \vec{0}$ и $\delta h \equiv 0$ в $\overline{Q}$. Теорема доказана. ■

Заметим, что теоремы, аналогичные доказанным выше, справедливы и для случая одной пространственной переменной. Актуальными являются следующие открытые проблемы:

Проблема 1. *Доказать существование классического решения начально-краевой задачи* (1.1) – (1.4) *при достаточно малом* $T > 0$.

Проблема 2. *Доказать существование и единственность обобщенного решения начально-краевой задачи* (1.1) – (1.4) *при достаточно малом* $T > 0$.

Проблема 3. *Доказать существование классического решения начально-краевой задачи* (1.1) – (1.4) *при произвольном* $T > 0$.

Проблема 4. *Доказать существование и единственность обобщенного решения начально-краевой задачи* (1.1) – (1.4) *при произвольном* $T > 0$.

При этом обобщенное решение может пониматься в различных смыслах.

Заключение

Квазигидродинамическую модель в приближении мелкой воды (1.1) – (1.2) можно трактовать как частный случай двумерной баротропной КГД системы, впервые выписанной А.А. Злотником [12]. Используемая в данной статье схема рассуждений применима к баротропным квазигидродинамическим уравнениям любой конечной размерности при определенных ограничениях на функции состояния $p = p(\rho)$, $\eta = \eta(\rho)$ и $\tau = \tau(\rho)$. Особый интерес представляют теоремы о существовании и свойствах решений. Некоторые результаты в этом направлении опубликованы в [12], [13]. Еще одна проблема связана с доказательством единственности классического решения полных КГД уравнений [7] – [9], описывающих течения сжимаемых вязких теплопроводных сред.

Список литературы

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986. — 736 с.

[2] Bresch D. Shallow-Water Equations and Related Topics. In Handbook on Differential Equations. Elsevier, 2009. — V. 5. — P. 1–104.

[3] Петросян А.С. Дополнительные главы гидродинамики тяжелой жидкости со свободной границей. — М.: ИКИ РАН, 2010. — 128 с.

[4] Агошков В.И., Saleri F. Recent Developments in the Numerical Simulation of Shallow Water Equations. III–Boundary Conditions and Finite Element Approximations in the River Flow Calculations // Мат. моделирование. — 1996. — Т. 8, № 9. — С. 3–24.

[5] Беликов В.В., Семенов А.Ю. Численный метод распада разрыва для решения уравнений мелкой воды // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1997. — Т. 37, № 8. — С. 1006–1019.

[6] Kun Xu. A Well-Balanced Gas Kinetic Scheme for the Shallow-Water Equations with Source Terms // J. Comput. Phys. — 2002. — V. 178. — C. 533–562.

[7] Шеретов Ю.В. Квазигидродинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды // Применение функционального анализа в теории приближений. — Тверь: Твер. гос. ун–т, 1997. — С. 127–155.

[8] Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений: дис. ... докт. физ. – мат. наук. Тверь, 2000. — 236 с.

[9] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. — М.– Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009. — 400 с.

[10] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях уравнений Навье–Стокса, Эйлера и квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Прикл. мат. — 2010. — Вып. 2(17). — С. 41–58.

[11] Шеретов Ю.В. Единственность классического решения основной начально-краевой задачи для квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Прикл. мат. — 2011. — Вып. 1(20) . — С. 7–20.

[12] Злотник А.А. О параболичности квазигидродинамической системы и устойчивости малых возмущений для нее // Мат. заметки. — 2008. — Т. 83, Вып. 5. — С. 667–682.

[13] Злотник А.А., Гаврилин В.А. О критериях параболичности квазигидродинамической системы уравнений в случае реального газа // Вестник МЭИ. — 2009, №6. — С. 116–126.

[14] Elizarova T.G. Quasi–Gas Dynamic Equations. Berlin–Heidelberg: Springer, 2009. — 286 p.

[15] Жериков А.В. Применение квазигидродинамических уравнений: математическое моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2010. — 124 с.

[16] Елизарова Т.Г., Афанасьева М.В. Регуляризованные уравнения мелкой воды // Вестник МГУ им. М.В.Ломоносова. Физика. Астрономия. — 2010. — № 1. — С. 15–18.

[17] Elizarova T.G., Lengrand J.C. A Regularization Method for the Numerical Solution of Shallow Water Equations. Proc. V European Conf. on Comput. Fluid Dynamics. Portugal, Lisbon. — 2010. — 16 p.

[18] Елизарова Т.Г., Булатов О.В. Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2011. — Т. 51, № 1. — С. 170–184.

[19] Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Никитина О.В. Моделирование одномерных течений мелкой воды на основе регуляризованных уравнений: Препринт № 33. — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2011. — 36 с.

[20] Долидзе Д.Е. Единственность решения основной граничной задачи вязкой несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. — 1954. — Т. 96, № 3. — С. 437–439.

[21] Graffi D. Sui teoremi di unicità nella dinamica dei fluidi // Milan J. of Math. — 1962. — V. 32, № 1. — P. 80–91.

[22] Serrin J. On the Uniqueness of Compressible Fluid Motions // Arch. for Rational Mech. and Analysis. — 1959. — V. 3, № 1. — P. 271–288.

[23] Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье–Стокса, существование и гладкость // Успехи мат. наук. — 2003. — Т. 58, Вып 2. — С. 45–78.

[24] Зейтунян Р.Х. Корректность задач динамики жидкостей (гидродинамическая точка зрения) // Успехи мат. наук. — 1999. — Т. 54, Вып 3. — С. 3–92.

[25] Feireisl E. Mathematical Theory of Compressible, Viscous, and Heat Conducting Fluids // Computers and Mathematics with Applications. — 2007. — V. 53. — P. 461–490.

[26] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985. — 589 с.