УДК 539.3

ДИСКРЕТНАЯ И КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛИ МАТЕРИАЛА С ХИРАЛЬНОЙ БАЛОЧНОЙ МИКРОСТРУКТУРОЙ

Васильев А.А., Пономарев С.С.
Кафедра математического моделирования

Поступила в редакцию 20.08.2011, после переработки 05.09.2011.

Построена модель трехзвенного балочного соединения, на основе которого строится математическая дискретная модель материала с хиральной балочной микроструктурой. Получена модель микрополярного типа аппроксимирующей хиральной среды. Дан анализ моделей, обусловленных структурой особенностей поведения материала.

Model for three-link beam connection and then discrete mathematical model for material with chiral beam-like microstructure are obtained. The micropolar type model for approximating chiral media is derived. Analysis of the models and peculiarities of material behavior defined by microstructure is given.

Ключевые слова: хиральность, балочная микроструктура, микрополярная модель.
Keywords: chirality, beam-like microstructure, micropolar model.

1. Введение

Разработка структурных моделей материалов с необычными свойствами, математических моделей для прогноза характеристик таких материалов и поведения изделий из них представляется актуальной задачей.

Решетки с балочной микроструктурой, в которых соединяющие частицы элементы сопротивляются изгибам, часто используются при моделировании гранулированных материалов, сложных кристаллов, пористых материалов, биоматериалов (костная ткань), а также балочных конструкций [1]. В таких моделях используется обычный конечный элемент балочного типа. Математические модели для таких материалов разрабатывались, например, в статьях [2-5]. Отмечается прикладное значение континуальных аппроксимирующих моделей. Такие модели позволяют выразить макро-характеристики тел через параметры микроструктуры [2, 3]. Кроме того, континуальные модели позволяют получать аппроксимационные решения, используя развитые аналитические методы континуальной механики. Например, в статье [4] на основе континуализации рассматриваются вопросы разрушения ячеистых материалов с балочной микроструктурой с использованием развитых методов и решений континуальной механики разрушения. Как правило, структурные материалы включают большое количество элементов, что затрудняет расчет и анализ на основе дискретных уравнений, построенных для элементов. Поэтому континуальные модели могут быть основой эффективных расчетных схем. В статье [5] обобщенные континуальные модели используются для анализа напряженного состояния вблизи отверстий в материалах с балочной микроструктурой с использованием метода конечных элементов континуальной механики с расчетными ячейками, включающими несколько ячеек моделируемого материала.

2. Модель трехзвенного балочного соединения

В качестве базового при построении моделей используем обычный балочный конечный элемент (рис. 1а) с потенциальной энергией, часто используемой при моделировании в методе конечных элементов [1, 2]

$$E_p = \frac{1}{2}C_{11}\Delta u^2 + \frac{1}{2}C_{22}\gamma^2 + \frac{1}{2}C_{33}\Delta\varphi^2. \tag{1}$$

Здесь введены обозначения

$$\Delta u = u_2 - u_1, \quad \gamma = v_2 - v_1 - L(\varphi_2 + \varphi_1)/2, \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1, \tag{2}$$

$$C_{11} = \frac{EA}{L}, C_{22} = \frac{12EI}{L^3}, C_{33} = \frac{EI}{L}, \tag{3}$$

где u_1, u_2 - продольные, а v_1, v_2 – поперечные смещения левого и правого концов балки, φ_1, φ_2 - углы поворотов концов балки, E- модуль Юнга, I- момент инерции, A- площадь поперечного сечения, L- длина балочного элемента.

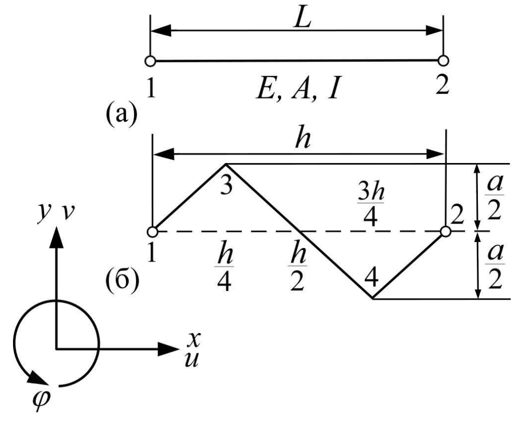

Рис. 1: (а) Балочный конечный элемент. (б) Трехзвенное соединение балочного типа.

В настоящей статье рассматриваем более общий трехзвенный балочный элемент (рис. 1б). Для каждого звена, предполагая жесткое соединение в узлах, в частности, неизменность угла соединения балочных элементов при общем повороте в узле, используем балочную модель (1) [1, 2]. Узлы “3” и “4” являются внутренними узлами трехзвенного элемента. Их перемещения и вращения могут быть однозначно выражены через перемещения и вращения узлов “1” и “2”. Исключив, используя такое выражение, степени свободы узлов “3” и “4” (выполнив статическую конденсацию в терминологии МКЭ), получаем выражение для потенциальной энергии составного элемента через степени свободы только узлов “1” и “2”

$$E_p = \frac{1}{2}K_{11}\Delta u^2 + \frac{1}{2}K_{22}\gamma^2 + \frac{1}{2}K_{33}\Delta\varphi^2 + \frac{1}{2}K_{12}\gamma\Delta u, \tag{4}$$

где использованы обозначения (2) для характеристик деформированного состояния трехзвенного элемента (в них принято $L = h$). Выражения параметров K_{ij}потенциальной энергии сложного соединения через микроструктурные параметры составляющих балочных элементов имеют вид:

$$K_{11} = \beta\left(h^2\bar{h}^2 A + 48a^2 I\right), \quad K_{22} = \beta\left(a^2\bar{h}^2 A + 12h^2 I\right),$$

$$K_{33} = EI/\bar{h}, \quad K_{12} = -\frac{3}{2}\beta a h\bar{h}^2 A,$$

$$\beta = \frac{192\bar{h}IAE}{7a^2h^2\bar{h}^4A^2 + 192\bar{h}^2\left(h^4+4a^4\right)AI + 9216a^2h^2I^2}, \quad \bar{h} = \sqrt{h^2+4a^2}.$$

Аналоги первых трех составляющих потенциальной энергии (4) сложного балочного элемента есть в потенциальной энергии обычного балочного элемента (1). Если изгиб отсутствует, то есть при $a = 0$, параметр $K_{12} = 0$ и выражение (4) дает потенциальную энергию (1-3). Отметим, что аналогичную структуру имеет потенциальная энергия, используемая при моделировании материалов с учетом конечности частиц в [6-8], а также ее континуальный аналог, используемый в микрополярной теории упругости [9]. Потенциальная энергия трехзвенного балочного элемента (4) содержит дополнительно качественно новый четвертый член, определяющий особенности деформирования такого элемента. Продольные и поперечные перемещения в нем связаны. Например, в случае, если узел “1” жестко закреплен, при малом продольном перемещении узла “2” Δu он отклоняется в поперечном направлении (рис. 2а, 2б) на величину

$$\Delta v = -\frac{1}{2}\frac{K_{12}}{K_{22}}\Delta u.$$

В случае обычного балочного элемента, когда $K_{12} = 0$, такое отклонение отсутствует. То есть трехзвенный элемент, в отличие от обычного, частично преобразует продольное смещение в поперечное, при этом по направлению отклонения можно судить сжимается элемент или растягивается.

3. Дискретная модель

На основе введенного в предыдущем разделе трехзвенного балочного соединяющего элемента можно построить квадратную решетку. Благодаря специфике элемента, эта решетка хирального типа (рис. 3а). Узлы квадратной решетки на рисунке отмечены кружочками. С использованием потенциальной энергии (4) строим для них разностные уравнения статики. Для узла (i, j) уравнения имеют вид

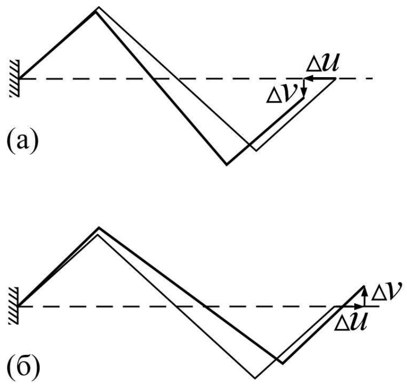

Рис. 2: Схематически представлены поперечные смещения Δv в зависимости от различных по знаку малых продольных перемещений узла "2" на Δu

$$K_{11}\Delta_{xx}u + K_{22}\left(\Delta_{yy}u + \frac{1}{2}h\Delta_y\varphi\right) + \frac{1}{2}K_{12}\left(\Delta_{xx}v - \Delta_{yy}v - \frac{1}{2}h\Delta_x\varphi\right) + F^x_{i,j} = 0,$$

$$K_{11}\Delta_{yy}v + K_{22}\left(\Delta_{xx}v - \frac{1}{2}h\Delta_x\varphi\right) + \frac{1}{2}K_{12}\left(\Delta_{xx}u - \Delta_{yy}u - \frac{1}{2}h\Delta_y\varphi\right) + F^y_{i,j} = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned}&\left(K_{33} - \tfrac{1}{4}h^2K_{22}\right)(\Delta_{xx}\varphi + \Delta_{yy}\varphi) + \tfrac{1}{2}hK_{22}\left(\Delta_x v - \Delta_y u - 4h\varphi_{i,j}\right) + \\ &+ \tfrac{1}{4}K_{12}h\left(\Delta_x u + \Delta_y v\right) + M_{i,j} = 0,\end{aligned}$$

где $F^x_{i,j}$, $F^y_{i,j}$ - компоненты силы, а $M_{i,j}$ - момент, приложенный в узле, и использованы стандартные обозначения для конечно-разностных производных:

$$\Delta_x w = w_{i+1,j} - w_{i-1,j}, \quad \Delta_{xx} w = w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j},$$

$$\Delta_y w = w_{i,j+1} - w_{i,j-1}, \quad \Delta_{yy} w = w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}.$$

На рис. 3б представлен результат расчета деформирования хиральной решетки. В вычислительном эксперименте узлы нижней и верхней граней, отмеченные кружочками, жестко перемещаются на малую величину Δv в поперечном направлении, при этом эти узлы могут свободно перемещаться в продольном направлении. Чтобы исключить продольный сдвиг образца, предполагается отсутствие продольного сдвига центрального узла. Обычная балочная решетка деформируется при этом симметрично. В отличие от нее хиральная решетка наклоняется. Для наглядности отмеченные кружочками узлы внешнего контура в исходном состоянии соединены пунктирной линией, а в деформированном состоянии – сплошной.

4. Обобщенная континуальная модель

Во введении было отмечено значение континуальных моделей. Уравнения континуальной модели получаем длинноволновым переходом, раскладывая компо-

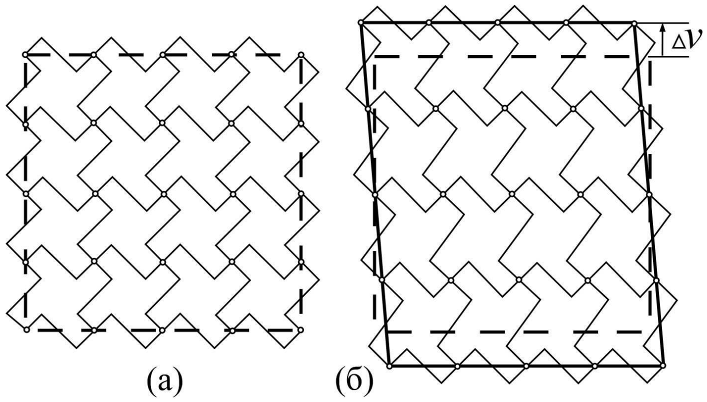

Рис. 3: (а) Хиральная квадратная решетка с балочной микроструктурой. (б) Схематичное представление смещений узлов решетки при малом поперечном смещении узлов верхней и нижней границ на величину $2\Delta v$.

ненты обобщенных перемещений в дискретных уравнениях (5) в ряд Тейлора до производных второго порядка включительно

$$K_{11}u_{xx} + K_{22}\left(u_{yy} + \varphi_y\right) + \frac{1}{2}K_{12}\left(v_{xx} - v_{yy} - \varphi_x\right) + f_x\left(x, y\right) = 0,$$

$$K_{11}v_{yy} + K_{22}\left(v_{xx} - \varphi_x\right) + \frac{1}{2}K_{12}\left(u_{xx} - u_{yy} - \varphi_y\right) + f_y\left(x, y\right) = 0, \qquad (6)$$

$$\begin{aligned}&\left(K_{33} - \tfrac{1}{4}h^2K_{22}\right)\left(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}\right) + K_{22}\left(v_x - u_y - 2\varphi\right) + \\ &+\tfrac{1}{2}K_{12}\left(u_x + v_y\right) + m\left(x, y\right) = 0,\end{aligned}$$

где $f_x(x,y) = F^x_{i,j}/h^2, \quad f_y(x,y) = F^y_{i,j}/h^2, \quad m(x,y) = M_{i,j}/h^2$ - плотность распределенных сил и моментов.

Особенностью моделируемой системы является важность учета вращений узлов. Соответственно уравнениями континуальной модели являются не уравнения классической теории упругости, а уравнения микрополярного типа [9]. Уравнения такого типа являются моделями материалов с учетом конечного размера и поворотов частиц [6-8], а также материалов с балочной микроструктурой [2-5]. В отличие от стандартных случаев уравнения (6) включают дополнительный член с K_{12}, описывающий определяемые хиральностью структуры свойства материала.

Отметим, что при $a = 0$, то есть при $K_{12} = 0$, уравнения (6) дают микрополярные уравнения обычной квадратной балочной решетки [2].

Заключение

В настоящее время привлекают нарастающее внимание проблемы разработки структурных и математических моделей материалов с необычными свойствами, которые находят все более широкое применение в различных технологических приложениях. В частности, разрабатываются структурные и математические модели материалов с ауксетическими свойствами [10, 11], то есть материалов, обладающих свойством расширяться при растяжении (с отрицательным коэффициентом Пуассона). Настоящая статья посвящена разработке моделей и изучению особенностей деформирования материалов с хиральной микроструктурой. Тела с хиральной структурой на основе частиц конечного размера рассматривались, например, в работе [12]. В данной статье строятся математические модели и изучаются свойства материала с хиральной балочной микроструктурой. Ауксетические свойства рассмотренного материала обсуждались в статье [13].

В разделе 2 статьи строится потенциальная энергия трехзвенного соединения, которая обобщает часто используемую в моделировании материалов с балочной микроструктурой потенциальную энергию балочного элемента. Внесенное изменение позволяет строить модели тел с хиральной структурой. Далее построена дискретная модель (раздел 3), получена континуальная модель соответствующей хиральной среды микрополярного типа (раздел 4). Отмечены особенности потенциальной энергии, дискретной и континуальной моделей, отличающие их от классических микрополярных моделей. Приведены результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующие особенности деформирования введенных соединений и обусловленные хиральностью интересные особенности поведения материала. Интерес, на наш взгляд, представляют, в частности, модель трехзвенного балочного элемента, которую удалось представить в компактном виде соотношения (4), развитие структурного подхода [2-5] для интерпретаций и выделения практически значимых вариантов феноменологических моделей микрополярной теории.

Дальнейшая разработка теории, обобщение моделей, более углубленное изучение свойств и эффектов материалов с хиральной микроструктурой на взгляд авторов представляет интерес и планируется в последующих статьях.

Список литературы

[1] Bathe K.J., Wilson E.L. Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, 1976. 528 p.

[2] Sun C.T., Yang T.Y. A continuum approach toward dynamics of gridworks. J. Appl. Mech., Trans. ASME 40, 186 (1973).

[3] Kim K.S., Piziali R.L. Continuum models of materials with beam-microstructure. Int. J. Solids Struct. 23 (11), 1563 (1987).

[4] Chen J.Y., Huang Y., Ortiz M. Fracture analysis of cellular materials: A strain gradient model. J. Mech. Phys. Solids. 46 (5), 789 (1998).

[5] Kumar R.S., McDowell D.L. Generalized continuum modeling of 2-D periodic cellular solids Int. J. Solids Struct. 41, 7399 (2004).

[6] Suiker A.S.J., Metrikine A.V., R. de Borst. Comparison of wave propagation characteristics of the Cosserat continuum model and corresponding discrete lattice models. Int. J. Solids Struct. 38, 1563 (2001).

[7] Pavlov I.S., Potapov A.I., Maugin G.A. A 2D granular medium with rotating particles. Int. J. Solids Struct. 43, 6194 (2006).

[8] Vasiliev A.A., Miroshnichenko A.E., Ruzzene M. Multi-field model for Cosserat media. J. Mech. Mater. Struct. 3(7), 1365 (2008).

[9] Eringen A.C. Theory of micropolar elasticity. In: Liebowitz H. (ed), Fracture, V. 2. Academic Press, New York, 1968. Pp. 621-729.

[10] Konyok D.A., Wojciechowski K.W., Pleskachevsky Yu.M., Shilko S.V. Materials with negative Poisson's ratio (a review). Compos. Mech. Design 10 (1), 35 (2004).

[11] Yang W., Li Z.-M., Shi W., Xie B.-H., Yang M.-B. Review on auxetic materials. J. Mater. Sci. 39, 3269 (2004).

[12] Spadoni A. Application of chiral cellular materials for the design of innovative components. Ph.D. thesis. Atlanta: Georgia Institute of Technology, 215 (2008).

[13] Smith C.W., Grima J.N., Evans K.E. A Novel Mechanism for Generating Auxetic Behaviour in Reticulated Foams. Acta Mater. 48, 4349 (2000).