**ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ**

УДК 519.216.2, 512.625.5, 517.986

# СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НАД БЕСКОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ С НЕАРХИМЕДОВЫМИ НОРМИРОВАНИЯМИ

**Людковский С.В.**
Кафедра прикладной математики
технического университета МИРЭА, г. Москва

*Поступила в редакцию 16.07.2011, после переработки 25.07.2011.*

Статья посвящена спектральным представлениям стохастических процессов со значениями в банаховых пространствах над бесконечными полями $\mathbf{K}$ нулевой характеристики с нетривиальными неархимедовыми нормами. Исследованы различные типы стохастических процессов контролируемых векторнозначными мерами и их стохастические интегралы. Доказаны теоремы о спектральных разложениях таких стохастических процессов.

The article is devoted to spectral representations of stochastic processes with values in Banach spaces over infinite fields $\mathbf{K}$ of zero characteristic with non-trivial non-archimedean norms. Different types of stochastic processes controlled by vector valued measures and their stochastic integrals are investigated. Theorems about spectral representations of such stochastic processes are proved.

**Ключевые слова:** стохастический процесс, неархимедово поле, нулевая характеристика, случайный процесс, линейное пространство, банахово пространство, стохастический интеграл, спектральное представление.
**Keywords:** stochastic process, non-archimedean field, zero characteristic, random process, linear space, Banach space, stochastic integral, spectral representation.

## 1. Введение

Спектральные представления случайных процессов широко используются над полями действительных и комплексных чисел для решения различных задач и проблем теории случайных процессов [5, 4, 2]. Однако, над неархимедовыми полями теория случайных процессов сравнительно мало исследована, хотя неархимедов анализ быстро развивается в последние годы [7, 18, 19, 3]. Он нашел обширные приложения в квантовой механике, квантовой теории поля, математической биологии, психологии, теории кодирования [3, 1, 6, 21]. Более того, неархимедов анализ является естественным инструментом исследования вполне несвязных топологических пространств и вполне несвязных топологических групп [18, 12]. При этом стохастическим процессы на вполне несвязных группах позволяют изучать их изометрические представления в неархимедовых пространствах.

Данная статья является продолжением предыдущей [8]. В ней были исследованы стохастические процессы со значениями в полях, намечены пути исследования векторно-значных стохастических процессов и стохастических интегралов. В настоящей работе исследуются стохастические процессы со значениями в векторных пространствах и алгебрах, которые могут быть как конечномерными, так и бесконечномерными над полями, доказаны теоремы о спектральных разложениях стохастических векторно-значных и скалярных процессов. Это потребовало соответствующего развития стохастического векторного анализа, векторно-значных и операторно-значных мер над бесконечными полями с неархимедовыми нормированиями. В работе выяснены специфические особенности неархимедова случая, которые возникают из-за многочисленных различий классического над полями вещественных и комплексных чисел анализа с одной стороны и неархимедова анализа с другой стороны.

В данной статье используются обозначения и результаты предыдущей статьи автора [8].

## 2. Стохастические процессы в банаховых пространствах

**1. Замечание.** Обозначим через $L^2(\xi, \mathsf{g})$ пополнение пространства $L^0(\xi, \mathsf{g})$ относительно семейства непрерывных преднорм

(1) $\|f\|_{2,P,u} := [\sup_{x\in G,\omega\in\Omega} u^2(f(x)\xi(\omega,x))N_P(\omega)]^{1/2}$

индуцированных из $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P, X)$, где $L^0(\xi, \mathsf{g})$ - это пространство всех ступенчатых функций вида $\sum_{k=1}^l a_k\xi(A_k)$, $a_k \in \mathsf{g}$, $A_k \in \mathcal{R}(G)$, $A_j \cap A_k = \emptyset$ для любого $k \ne j$, $l \in \mathbf{N}$, где $\mathsf{g}$ - это полная локально $\mathbf{K}$-выпуклая алгебра с единицей 1, а $X$ - это полное локально $\mathbf{K}$-выпуклое пространство удовлетворяющее условию $32(D)$ [8].

**2. Определение.** Предположим, что $Z$ - это локально $\mathbf{K}$-выпуклое пространство, а $\mu : \mathcal{R} \to Z$ - это мера, где $\mathcal{R} = \mathcal{R}(G)$ - это разделяющее покрывающее кольцо множества $G$. Для любой преднормы $u$ в $Z$ и всякого $A \in \mathcal{R}(G)$ определим преднорму подмножества

(1) $\|A\|_{\mu,u} := \sup\{u(\mu(B)) : \ B \in \mathcal{R}, B \subset A\}$.

**3. Лемма.** *Если $\mu : \mathcal{R} \to Z$ - это мера, тогда для любой преднормы $u$ в $Z$ существует и единственная функция $N_{\mu,u} : G \to [0,\infty)$ такая, что*

*(1) $\|Ch_A\|_{N_{\mu,u}} = \|A\|_{\mu,u}$ для любого $A \in \mathcal{R}$ (смотри определение 2);*

*(2) если $\phi : G \to [0,\infty)$ и $\|Ch_A\|_\phi \le \|A\|_{\mu,u}$ для всех $A \in \mathcal{R}$, тогда $\phi \le N_{\mu,u}$; Более того,*

*(3) $N_{\mu,u}(x) = \inf_{A:x\in A\in\mathcal{R}} \|A\|_{\mu,u}$ для любого $x \in G$.*

**Доказательство.** Если $N_{\mu,u}(x)$ определено формулой (3), то (2) очевидно, так как $\|Ch_A\|_\phi \le \|A\|_{\mu,u}$ для всех $A \in \mathcal{R}$, где $Ch_A$ - характеристическая функция подмножества $A$. Возьмём $A \in \mathcal{R}$ и рассмотрим семейство $\mathcal{E} := \{B \in \mathcal{R} : \ B \subset A, \ \|A \setminus B\|_{\mu,u} \le \|Ch_A\|_{N_{\mu,u}} + \epsilon\}$.

С другой стороны, из формулы 2(1) следует, что

$$\|A_1 \cup A_2\|_{\mu,u} \le \max(\|A_1\|_{\mu,u}, \|A_2\|_{\mu,u}\}$$

для любых $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$, так как $\mu$ аддитивна, а для любого $B \subset A_1 \cup A_2$ мы имеем $B = B_1 \cup B_2$, и также выполняется неравенство $u(\mu(A_1 \cup A_2)) \le \max\{u(\mu(A_1 \setminus A_2)), u(\mu(A_2 \setminus A_1)), u(\mu(A_1 \cap A_2))\}$, где $B_1 := A_1 \cap B$ и $B_2 := A_2 \cap B$. Поэтому, $\mathcal{E}$ - это сжимающееся семейство.

Тогда для любого $x \in A$ существует подмножество $B \in \mathcal{R}$ такое, что $x \in B$ и $\|B\|_{\mu,u} \le N_{\mu,u}(x) + \epsilon \le \|Ch_B\|_{N_{\mu,u}} + \epsilon$, следовательно, $A \setminus B \in \mathcal{E}$. Тогда $\bigcap_{A \in \mathcal{E}} A = \emptyset$, следовательно, существует $B \in \mathcal{E}$ такое, что $\|B\|_{\mu,u} \le \epsilon$ и неизбежно выполняется неравенство $\|A\|_{\mu,u} \le \max\{\|B\|_{\mu,u}, \|A \setminus B\|_{\mu,u} + \epsilon\}$.

**4. Определения.** Пусть $\mu$ является $X$-значной мерой как §§37, 39 [8]. Для отображения $f : G \to \mathsf{g}$ мы рассмотрим семейство преднорм

$$\|f\|_{q,\mu,u} := [\sup_{x \in G} u^q(f) N_{\mu,u}(x)]^{1/q}$$

всякий раз, когда она существует, где $1 \le q < \infty$ и $u$ - это преднорма на $X$. Определим пространство $L^q(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g})$ как пополнение семейства всех ступенчатых (простых) функций $f$ относительно семейства преднорм $\{\| * \|_{q,\mu,u} : \ u \in \mathcal{S}\}$. Если $f \in L^1(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g})$, то она называется $\mu$-интегрируемой.

В частном случае поля $\mathsf{g} = \mathbf{K}$ мы можем опустить $\mathsf{g}$ из обозначений. Когда $G$, $\mathcal{R}$, $\mu$, $X$ и $\mathsf{g}$ заданы, то можно также кратко писать $L^q(\mu)$, для $q = 1$ индекс можно опустить, записывая пространство в виде $L(\mu)$.

Функция $f$ называется $\mu$-интегрируемой, если $f \in L(\mu)$. Положим $\mathcal{R}_\mu := \{A \subset G : Ch_A \in L(\mu)\}$ для $X$-значной меры $\mu$ и продолжим её посредством формулы:

$$\bar{\mu}(A) := \int_G Ch_A(x) \mu(dx),$$

так как алгебра $\mathsf{g}$ содержит единицу $1 \in \mathsf{g}$.

**5. Лемма.** *Если $\mu$ и $\mathcal{R}_\mu$ такие же, как и в §4, то $A \in \mathcal{R}_\mu$ тогда и только тогда, когда для любого $\epsilon > 0$ и каждой преднормы $u$ в $X$ существует $B \in \mathcal{R}$ такое, что $N_{\mu,u}(x) \le \epsilon$ для всякого $x \in A \triangle B$.*

**Доказательство.** Если для любых $\epsilon > 0$ и преднормы $u$ в $X$ существует $B \in \mathcal{R}$ такое, что выполняется неравенство $\|Ch_A - Ch_B\|_{N_{\mu,u}} < \epsilon$. Тогда беря последовательность $\epsilon_n = p^{-n}$ положительных чисел монотонно убывающую и стремящуюся к нулю, мы получим, что выполняется включение $Ch_A \in L(\mu)$, следовательно, $A \in \mathcal{R}_\mu$.

С другой стороны, если $A \in \mathcal{R}_\mu$, тогда для любого $1 > \epsilon > 0$ существует простая функция $f \in L(\mu)$ такая, что $\|Ch_A - f\|_{N_{\mu,u}} < \epsilon$. Рассмотрим множество $B := \{x : u(f(x) - 1) < 1\}$, которое принадлежит покрывающему разделяющему кольцу подмножеств $\mathcal{R}$, $\ B \in \mathcal{R}$. Тогда $u(f(x) - Ch_B(x)) \le \min[u(f(x)), u(f(x) - 1)] \le u(f(x) - Ch_A(x))$ для любого $x \in G$ и неизбежно

$$\|Ch_A - Ch_B\|_{N_{\mu,u}} \le \max[\|f - Ch_A\|_{N_{\mu,u}}, \|f - Ch_B\|_{N_{\mu,u}}] = \|f - Ch_A\|_{N_{\mu,u}} \le \epsilon.$$

**6. Лемма.** *Если $\mu : \mathcal{R} \to X$ удовлетворяет условиям 37$(i, ii)$ статьи [8], тогда условие 37$(iii)$ [8] эквивалентно следующему:*

$(iii')$ *если* $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}$ *- это сжимающееся семейство и* $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \emptyset$*, тогда* $\lim_{A\in\mathcal{A}} \|A\|_{\mu,u} = 0$ *для любой преднормы* $u \in \mathcal{S}$ *in* $X$.

**Доказательство.** Поскольку $\|A\|_{\mu,u} \ge u(\mu(A))$ для любого $A \in \mathcal{R}$, тогда $(iii')$ влечёт $37(iii)$.

Докажем теперь обратное утверждение, предполагая, что $\mu$ удовлетворяет условиям $37(i-iii)$. Предположим, что $\mathcal{A}$ является сжимающимся семейством с $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \emptyset$. Для любого $\epsilon > 0$ и всякого $u \in \mathcal{S}$ существует $E \in \mathcal{A}$ такое, что $u(\mu(A)) < \epsilon$ для любого $A \in \mathcal{A}$ такого, что $A \subset E$. Возьмём преднорму $u \in \mathcal{S}$ in $X$. Для всякого $A \in \mathcal{A}$ выберем $V_A \in \mathcal{R}$ таким, что $V_A \subset A$ и $u(\mu(V_A)) > \min(\epsilon, \|A\|_{\mu,u}/2)$. Если $A \in \mathcal{A}$, то семейство $\mathcal{C} := \{V_A \cap B : B \in \mathcal{A}, B \subset A\}$ сжимающееся с пустым пересечением $\bigcap_{U\in\mathcal{C}} U = \emptyset$, следовательно, для любого $A \in \mathcal{A}$ существует $W_A \in \mathcal{A}$ такое, что $W_A \subset A$ и $u(\mu(V_A \cap W_A)) < \epsilon$.

Возьмём семейство $\mathcal{V} := \{V_A \cup W_A : A \in \mathcal{A}, A \subset E\}$. Если $A, B \in \mathcal{A}$, тогда существует $C \in \mathcal{A}$ с $C \subset W_A \cap W_B$. Поэтому $V_C \cup W_C \subset C \subset W_A \subset V_A \cup W_A$, а также $V_C \cup W_C \subset V_B \cup W_B$, следовательно, семейство $\mathcal{V}$ сжимающееся. Более того, $\bigcap_{C\in\mathcal{V}} C = \emptyset$. Таким образом, существует $A \in \mathcal{A}$ с $A \subset E$ и $u(\mu(V_A \cup W_A)) < \epsilon$, а также $u(\mu(V_A \cup W_A)) < \epsilon$ и $u(\mu(V_A \cap W_A)) < \epsilon$ в силу определения $W_A$. При этом выполняется неравенство $u(\mu(W_A)) < \epsilon$, так как $W_A \in \mathcal{A}$ и $W_A \subset A \subset E$. Итак, $u(\mu(V_A)) = u(\mu(V_A \cup W_A) + \mu(V_A \cap W_A) - \mu(W_A)) < \epsilon$. Поэтому, $\|A\|_{\mu,u} \le 2\epsilon$, так как $u(\mu(V_A)) > \min(\epsilon, \|A\|_{\mu,u}/2)$.

**7. Теорема.** *Пусть* $\mu$ *- это* $X$*-значная мера на* $\mathcal{R}$*. Тогда* $\mathcal{R}_\mu$ *- это покрывающее кольцо для* $G$*, и* $\bar{\mu}$ *является* $X$*-значной мерой продолжающей* $\mu$*.*

**Доказательство.** В силу леммы 5 $\mathcal{R}_\mu$ является покрывающим кольцом для $G$ и продолжение меры $\bar{\mu}$ аддитивно. Если $A \in \mathcal{R}_\mu$, тогда для любого $B \subset A$ такого, что $B \in \mathcal{R}$ и всякой преднормы $u$ в $X$ выполняются неравенства:

$u(\bar{\mu}(B)) \le \|Ch_B\|_{N_{\mu,u}} \le \|Ch_A\|_{N_{\mu,u}} < \infty$, следовательно, $\bar{\mu}$ обладает свойством $37(ii)$ [8].

Рассмотрим теперь сжимающееся семейство $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}_\mu$ имеющее пустое пересечение. Для $\epsilon > 0$ и преднормы $u$ в $X$ возьмём $\mathcal{E} := \{B \in \mathcal{R} : \ \exists A \in \mathcal{A}$ , так что $A \cap G_{\epsilon,u} = B \cap G_{\epsilon,u}\}$, где $G_{\epsilon,u} := \{x \in G : N_{\mu,u}(x) \ge \epsilon\}$. Тогда семейство $\mathcal{E}$ является сжимающимся. Если $x \notin G_{\epsilon,u}$, тогда существует $V \in \mathcal{R}$ такое, что $x \in V$ и $\epsilon > \|V\|_{\mu,u}$, следовательно, $B \setminus V \in \mathcal{E}$ для любого $B \in \mathcal{E}$. Поэтому мы получаем $V \cap (\bigcap_{B\in\mathcal{E}} B) = \emptyset$ и неизбежно $\bigcap_{B\in\mathcal{E}} B \subset G_{\epsilon,u}$. Тогда из конструкции семейства $\mathcal{E}$ мы получим: $\bigcap_{B\in\mathcal{E}} B = \bigcap_{B\in\mathcal{E}} B \cap G_{\epsilon,u} = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \cap G_{\epsilon,u} = \emptyset$.

В силу леммы 6 существует $B \in \mathcal{E}$ такое, что $\|B\|_{\mu,u} < \epsilon$, следовательно, $B \cap G_{\epsilon,u} = \emptyset$. Тогда существует $A \in \mathcal{A}$ такое, что $A \cap G_{\epsilon,u} = B \cap G_{\epsilon,u} = \emptyset$, следовательно, $\|A\|_{\mu,u} < \epsilon$. Снова в силу леммы 6 существует передел $\lim_{A\in\mathcal{A}} \bar{\mu}(A) = 0$. Таким образом, $\bar{\mu}$ является $X$-значной мерой.

**8. Лемма.** *Если* $\mu$ *является* $X$*-значной мерой на* $\mathcal{R}$*, тогда выполняется равенство* $N_{\mu,u} = N_{\bar{\mu},u}$ *для любой преднормы* $u$ *в* $X$*. Поэтому,* $\| * \|_{N_{\mu,u}} = \| * \|_{N_{\bar{\mu},u}}$*,* $L(\bar{\mu}) = L(\mu)$*,*

$$\int_G f d\bar{\mu} = \int_G f d\mu,$$

$\mathcal{R}_{\bar{\mu}} = \mathcal{R}_\mu$.

**Доказательство.** Возьмём преднорму $u$ в $X$ и точку $x \in G$, а также число $b > N_{\mu,u}(x)$. Тогда существует $A \in \mathcal{R} \subset \mathcal{R}_\mu$ такое, что $x \in A$ и $\|A\|_{N_{\bar{\mu},u}} \le b$. Тогда для всякого $B \in \mathcal{R}$ такого, что $B \subset A$ выполняются неравенства

$$u(\bar{\mu}(B)) \leq \|B\|_{N_{\bar{\mu},u}} \leq \|A\|_{N_{\bar{\mu},u}} \leq b, \text{ следовательно,}$$

$$(1) \quad \|A\|_{N_{\bar{\mu},u}} \leq b \text{ и неизбежно}$$

$$N_{\bar{\mu},u}(x) \geq \inf\{\|A\|_{\bar{\mu},u} : \ A \in \mathcal{R}_\mu, x \in A\}.$$

Возьмём теперь $0 < d < N_{\mu,u}(x)$ и $A \in \mathcal{R}_\mu$ с $x \in A$. В силу леммы 5 существует $B \in \mathcal{R}$ такое, что $N_{\bar{\mu},u}(y) \leq d$ для любого $y \in A \triangle B$. Поэтому, $\|B\|_{N_{\bar{\mu},u}} \geq N_{\bar{\mu},u} > d$, а значит $u(\mu(E)) > d$ для некоторого $E \in \mathcal{R}$ такого, что $E \subset B$. Мы также имеем $u(\mu(E) - \bar{\mu}(E \cap A)) = u(\bar{\mu}(E \setminus A) \leq \|E \setminus A\|_{N_{\bar{\mu},u}} \leq \|E \setminus B\|_{N_{\bar{\mu},u}} \leq d < u(\mu(E))$. Таким образом, $u(\bar{\mu}(E \cap A)) = u(\mu(E))$, следовательно,

$$(2) \quad \|A\|_{\bar{\mu},u} \geq u(\bar{\mu}(E \cap A)) = u(\mu(E)) > d.$$

В итоге, из этих неравенств $(1,2)$ вытекает равенство $N_{\bar{\mu},u}(x) = N_{\mu,u}(x)$ для любого $x \in G$.

**9. Теорема.** (1). *Если $\mu$ - это мера на $\mathcal{R}$, тогда $N_{\mu,u}$ полунепрерывна сверху для любой преднормы $u \in \mathcal{S}$ в $X$, следовательно, она является $\mathcal{R}_\mu$ полунепрерывной сверху для всякого $A \in \mathcal{R}_\mu$ и $\epsilon > 0$ множество $\{x \in A : N_{\mu,u}(x) \geq \epsilon\}$ является $\mathcal{R}_\mu$-компактным, следовательно, оно является $\mathcal{R}$-компактным.*

(2). *Обратно, пусть $\mu : \mathcal{R} \to X$ удовлетворяет $37(i)$ и пусть для всякого $u \in \mathcal{S}$ существуют $\mathcal{R}$-полунепрерывная сверху функция $\phi_u : G \to [0, \infty)$ такая, что $u(\mu(A)) \leq \sup_{x \in A} \phi_u(x)$ для любого $A \in \mathcal{R}$ и пусть множество $\{x \in A : \phi_u(x) \geq \epsilon\}$ является $\mathcal{R}$-компактным для любого $\epsilon > 0$. Тогда $\mu$ является $X$-значной мерой на $N_{\mu,u}(x) \leq \phi_u(x)$ для любого $x \in G$ и всякого $u \in \mathcal{S}$.*

**Доказательство.** (1). Положим $G_{\epsilon,u} := \{x \in G : N_{\mu,u}(x) \geq \epsilon\}$, где $\epsilon > 0$. Тогда для любого $x \in G \setminus G_{\epsilon,u}$ существует $A \in \mathcal{R}$ такое, что $x \in A$ и $\|A\|_{\mu,u} < \epsilon$, следовательно, $A \subset G \setminus G_{\epsilon,u}$ и неизбежно $G_{\epsilon,u}$ является $\mathcal{R}$-замкнутым и $N_{\mu,u}$ является $\mathcal{R}$ полунепрерывной сверху. Возьмём теперь $A \in \mathcal{R}_\mu$ и покрытие $\mathcal{V}$ для $A \cap G_{\epsilon,u}$ элементами из $\mathcal{R}_\mu$. Тогда множества $A \setminus (V_1 \cup ... \cup V_n \cup V)$, где $n \in \mathbf{N}$, $V_1, ..., V_n \in \mathcal{V}$, $V \in \mathcal{R}_\mu$ и $V \subset G \setminus G_{\epsilon,u}$, образуют сжимающееся подсемейство $\mathcal{A}$ в $\mathcal{R}_\mu$ с пустым пересечением $\bigcap_{E \in \mathcal{A}} E = \emptyset$. Согласно свойству $6(iii')$ для $X$-значной меры существуют подмножества $V_1, ..., V_n \in \mathcal{V}$ и $V \subset G \setminus G_{\epsilon,u}$ такие, что $\|A \setminus (V_1 \cup ... \cup V_n \cup V)\|_{\bar{\mu},u} < \epsilon$, следовательно, $A \setminus (V_1 \cup ... \cup V_n \cup V) \subset G \setminus G_{\epsilon,u}$. Поскольку $V \subset G \setminus G_{\epsilon,u}$, тогда $A \cap G_{\epsilon,u} \subset V_1 \cup ... \cup V_n$. Таким образом, пересечение $A \cap G_{\epsilon,u}$ является $\mathcal{R}_\mu$-компактным.

(2). Каждая функция $\phi_u$ является $\mathcal{R}$ полунепрерывной сверху и $\phi_u$ ограничена сверху на каждом $\mathcal{R}$-компактном множестве, также $\|A\|_{\mu,u} \leq \|Ch_A\|_{\phi_u}$ для любого $A \in \mathcal{R}$. Таким образом, для любого $u \in \mathcal{S}$ и всякого $A \in \mathcal{R}$ выполняется неравенство $\|A\|_{\mu,u} < \infty$, следовательно, условие $37(ii)$ [8] удовлетворено.

Возьмем $\epsilon > 0$ и сжимающееся подсемейство $\mathcal{A}$ в $\mathcal{R}$ такое, что $\bigcap_{E \in \mathcal{A}} = \emptyset$. Тогда совокупность множеств $\{x \in A : \phi_u(x) \geq \epsilon\}$ из семейства $\mathcal{E}$ всех $\mathcal{R}$-компактных множеств замкнута относительно конечных пересечений и $\bigcap_{B \in \mathcal{E}} B = \emptyset$. Итак, существует $E \in \mathcal{A}$ такое, что $\{x \in E : \phi_u(x) \geq \epsilon\} = \emptyset$. Следовательно, $E \subset \{x \in G : \ \phi_u(x) < \epsilon\}$, а тогда и $\|A\|_{\mu,u} < \epsilon$.

**10. Следствие.** *Если $\mu$ является $X$-значной мерой на $\mathcal{R}$, тогда для всякого $\epsilon > 0$ и каждой преднормы $u \in \mathcal{S}$ множество $\{x \in G : N_{\mu,u}(x) \geq \epsilon\}$ является $\mathcal{R}$-локально компактным.*

**11. Теорема.** *Пусть $\mu$ - это мера на $\mathcal{R}$, и пусть также $\mathcal{U}$ - это разделяющее покрывающее кольцо для $G$ являющееся подкольцом в $\mathcal{R}_\mu$, и пусть $\nu$ является ограничением меры $\mu$ на $\mathcal{U}$. Тогда $\mathcal{U}_\nu = \mathcal{R}_\mu$ и $\bar{\nu} = \bar{\mu}$.*

**Доказательство.** Пусть $u \in \mathcal{S}$ - это преднорма на $X$. Сначала мы докажем, что $N_{\mu,u}(x) \geq N_{\nu,u}(x)$ для любого $x \in G$. Предположим противное, что существует $y \in G$ такое, что $N_{\mu,u}(y) < N_{\nu,u}(y)$. Этот предполагает, что существует $V \in \mathcal{R}$ такое, что $\|V\|_{\mu,u} < N_{\nu,u}(y)$.

Согласно лемме 8 $\|V\|_{\mu,u} = \|V\|_{\bar{\mu},u}$. Тогда для всякой точки $x \in G \setminus V$ существует подмножество $B \in \mathcal{U}$ такое, что $y \in B$ и $x \notin B$, так как $\mathcal{U}$ - это разделяющее покрывающее кольцо. Поэтому, $\{B \setminus V : B \in \mathcal{U}, y \in B\}$ является сжимающимся подсемейством в $\mathcal{R}_\mu$ с пустым пересечением. В силу свойства $6(iii')$ существует $B \in \mathcal{U}$ такое, что $y \in B$ и $\|B \setminus V\|_{\bar{\mu},u} < N_{\nu,u}(y)$. С другой стороны, выполняется неравенство $\|V\|_{\bar{\mu},u} < N_{\mu,u}(y)$. Но $\nu$ - это ограничение меры $\bar{\mu}$ на $\mathcal{U}$ и $B \in \mathcal{U}$, тогда $\|B\|_{\nu,u} \leq \|B\|_{\bar{\mu},u} < N_{\nu,u}(y)$, что приводит к противоречию, так как $y \in B$.

Теперь покажем, что $\mathcal{R}_\mu \subset \mathcal{U}_\nu$. Пусть $A \in \mathcal{R}_\mu$ и $\epsilon > 0$. В силу лемма 5 достаточно для любого $u \in \mathcal{S}$ построить подмножество $B \in \mathcal{U}$ такое, что $N_{\nu,u}(x) < \epsilon$ для всякого $x \in A \triangle B$. Возьмём $W := \{x \in A : N_{\mu,u}(x) \geq \epsilon\}$. В силу теоремы 9 множество $W$ является $\mathcal{R}_\mu$-компактным, следовательно, $\mathcal{U}$-компактным. Отметим, что для любого $x \in G \setminus W$ существует $B \in \mathcal{U}$ такое, что $W \subset B$ с $x \notin B$. Тогда сжимающееся подсемейство $\{B \setminus A : \ B \in \mathcal{U}, B \supset W\}$ в $\mathcal{R}_\mu$ имеет пустое пересечение и существует $B \in \mathcal{U}$ такое, что $B \supset W$, для которого $\|B \setminus A\|_{\bar{\mu},u} < \epsilon$. Таким образом, $N_{\bar{\mu},u} = N_{\mu,u} < \epsilon$ на разности множеств $B \setminus A$. С другой стороны, $N_{\mu,u}(x) < \epsilon$ на $A \setminus W$ следовательно, также на $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Далее мы покажем, что $\mu$ может быть получена ограничением $\bar{\nu}$. Для $A$, $B$, $\epsilon$, $u$ таких же, как и в предыдущем параграфе, мы имеем $u(\bar{\nu}(A) - \bar{\mu}(A)) = u(\bar{\nu}(A) - \nu(B) + \bar{\mu}(B) - \bar{\nu}(A)) = u(\bar{\nu}(A \setminus (A \cap B)) - \bar{\nu}(B \setminus (A \cap B)) + \bar{\mu}((B \setminus (A \cap B)) - \bar{\mu}(B \setminus (A \cap B))) \leq \max(\|A \triangle B\|_{\bar{\nu},u}, \|A \triangle B\|_{\bar{\mu},u}) = \|A \triangle B\|_{\bar{\mu},u} = \sup_{x \in A \triangle B} N_{\mu,u}(x)$. Поэтому, $\bar{\nu} = \bar{\mu}$ на $\mathcal{R}_\mu$.

Таким образом, $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}_\nu$ и $\mu$ является ограничением меры $\bar{\nu}$ на $\mathcal{R}$. Симметрично переставляя $\mu$ и $\nu$ в доказательстве выше, мы получим $\mathcal{U}_\nu = \mathcal{R}_\mu$ и $\bar{\mu} = \bar{\nu}$.

**12. Лемма.** *Пусть $\mu$ является $X$-значной мерой на $\mathcal{R}$. Для преднормы $u$ на $X$ и всякого $\epsilon > 0$ положим $G_{\epsilon,u} := \{x \in G : \ N_{\mu,u}(x) \geq \epsilon\}$. Тогда ограничение $\mathcal{R}$- и $\mathcal{R}_\mu$-топологий на $G_{\epsilon,u}$ совпадают. Функция $f : G \to \mathsf{g}$ является $\mathcal{R}_\mu$-непрерывной тогда и только тогда, когда для любого $u \in \mathcal{S}$ и $\epsilon > 0$ ограничение $f|_{G_{\epsilon,u}}$ является $\mathcal{R}$-непрерывным.*

**Доказательство.** В силу лемма 5 $\mathcal{R}$-топология и $\mathcal{R}_\mu$-топология индуцируют одну и ту же топологию на $G_{\epsilon,u}$. Таким образом, если $f : G \to \mathsf{g}$ является $\mathcal{R}_\mu$-непрерывной, тогда она $\mathcal{R}$-непрерывна на $G_{\epsilon,u}$.

Предположим, что $f : G \to \mathsf{g}$ имеет $\mathcal{R}$-непрерывное ограничения $f|_{G_{\epsilon,u}}$ для любого $u \in \mathcal{S}$ и всякого $\epsilon > 0$. Возьмём произвольное подмножество $V$ открыто-замкнутое в $\mathsf{g}$. Если $A \in \mathcal{R}_\mu$, то $A \cap G_{\epsilon,u}$ является $\mathcal{R}$-компактным в силу теоремы 51, а также $f^{-1}(V) \cap A \cap G_{\epsilon,u}$ является $\mathcal{R}$-открыто-замкнутым как подмножество в $G_{\epsilon,u}$. Для любого $x \in f^{-1}(V) \cap A \cap G_{\epsilon,u}$ возьмём $U_x \in \mathcal{R}$ с $x \in U_x$, так что $U_x \cap G_{\epsilon,u} \subset f^{-1}(V) \cap A \cap G_{\epsilon,u}$. Из этого покрытия компактного множества $G_{\epsilon,u}$ мы выберем конечное подпокрытие такое, что $f^{-1}(V) \cap A \cap G_{\epsilon,u} \subset U$, где $U := \bigcup_{j=1}^k U_{x_j}$, следовательно, $U \in \mathcal{R}$. Поэтому, $f^{-1}(V) \cap A \cap G_{\epsilon,u} = U \cap G_{\epsilon,u}$. В силу леммы 5 $f^{-1}(V) \cap A \in \mathcal{R}_\mu$ для любого $A \in \mathcal{R}$. Таким образом, $f^{-1}(V)$ является $\mathcal{R}_\mu$-открыто-замкнутым. Тогда функция $f$ является $\mathcal{R}_\mu$-непрерывной.

**13. Следствие.** *Если функция $f : G \to \mathsf{g}$ является $\mathcal{R}_\mu$-непрерывной на каждом $\mathcal{R}_\mu$-компактном множестве, тогда $f$ является $\mathcal{R}_\mu$-непрерывной на $G$. Если $u \in \mathcal{S}$ и $E \subset G$ является $\mathcal{R}_\mu$-компактным, тогда $H := \{x \in E : N_{\mu,u}(x) = 0\}$ конечно и существует $\delta > 0$ такое, что $N_{\mu,u} > \delta$ на $E \setminus H$.*

**Доказательство.** В силу лемма 12 каждое $\mathcal{R}$-компактное множество $G_{\epsilon,u}$ является $\mathcal{R}_\mu$-компактным, а функция $f$ непрерывна на каждом $\mathcal{R}$-компактном подмножестве в $G_{\epsilon,u}$. С другой стороны, $G_{\epsilon,u}$ является $\mathcal{R}$-локально компактным в силу следствия 10. Итак, функция $f$ является $\mathcal{R}$-непрерывной на множестве $G_{\epsilon,u}$ и $\mathcal{R}_\mu$-непрерывной на $G$.

Мы имеем, что каждое подмножество $A$ в $\{x \in G : N_{\mu,u}(x) = 0\}$ является $\mathcal{R}_\mu$-открыто-замкнутым, так как $Ch_A \in L(\mu)$. Возьмём $\mathcal{R}_\mu$-компактное подмножество $E$ в $G$. Тогда $H$ конечно. Пусть $\pi \in \mathbf{K}$ с $0 < |\pi| < 1$. Если

$$\inf\{N_{\mu,u}(x) : x \in E \setminus H\} = 0,$$

то существует последовательность $\{x_k \in E : k \in \mathbf{N}\}$ в $E$ такая, что $N_{\mu,u}(x_k) < |\pi|^k$ и $N_{\mu,u}(x_k) < N_{\mu,u}(x_{k-1})$ для любого $k$. Выберем $A_k \in \mathcal{R}$ таким, что $x_k \in A_k$ и $N_{\mu,u}(x) < |\pi|^k$ для любого $x \in A_k$ и $A_k \cap A_l = \emptyset$ для любого $k \neq l$. Без ограничения общности мы можем рассмотреть семейство неархимедовых преднорм $\mathcal{S}$ в $X$ таких, что если $u, q \in \mathcal{S}$, то функционал

$x \mapsto t(x) := \max(u(x), q(x)) \in \mathcal{S},\ \ x \in X,$

также задаёт преднорму на $X$ (смотри также [17]). Поэтому,

$\|A\|_{\mu,t} = \max(\|A\|_{\mu,u}, \|A\|_{\mu,q})$

для любого $A \in \mathcal{R}$, а также $N_{\mu,t}(x) = \max(N_{\mu,u}(x), N_{\mu,q}(x))$ для любого $x \in G$. Таким образом, $G_{\epsilon,q} \cap G_{\epsilon,u} \supset G_{\epsilon,t}$ для любого $\epsilon > 0$ и $t = \max(u, q)$, $u, q, t \in \mathcal{S}$. Если ограничение $f|_U$ непрерывно на множестве $U$, и $W$ - это подмножество в $U$, $W \subset U$, тогда очевидно ограничение $f|_W$ непрерывно.

В силу лемма 12 и теоремы 9 функция

$$g(x) := \sum_k \pi^{-k} Ch_{A_k \cap \{x \in G : N_{\mu,u}(x) > 0\}}(x) v_k$$

является $\mathcal{R}_\mu$-непрерывной, где $v_k \in X$, $u(v_k) = 1$ для любого $k$, так как ограничение $g$ на каждое $G_{\gamma,q}$ непрерывно для любого $q \in \mathcal{S}$ и $\gamma > 0$. Но функция $g$ оказывается неограниченной на $\mathcal{R}_\mu$-компактном множестве $E$. Этот дает противоречие, следовательно, $\inf\{N_{\mu,u}(x) : x \in E \setminus H\} > 0$.

**14. Теорема.** *Пусть $\mu$ - это $X$-значная мера на $\mathcal{R}$. Функция $f : G \to \mathsf{g}$ является $\mu$-интегрируемой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим двум условиям* (1) *и* (2)*:*

(1) *$f$ является $\mathcal{R}_\mu$-непрерывной;*

(2) *для любого $u \in \mathcal{S}$ и $\epsilon > 0$ множество $\{x : x \in G, u(f(x))N_{\mu,u}(x) \geq \epsilon\}$ является $\mathcal{R}_\mu$-компактным, следовательно, оно содержится в некотором $\{x : N_{\mu,u}(x) \geq \delta\}$ с $\delta > 0$.*

**Доказательство.** Если $u$ - это преднорма в $X$ и $\epsilon > 0$, то множество $G_{\epsilon,u} := \{x \in G : N_{\mu,u}(x) \geq \epsilon\}$ является $\mathcal{R}$-компактным согласно теореме 9. Без ограничения общности мы рассмотрим полные $\mathbf{K}$-линейное локально выпуклое пространство $X$ и топологическую алгебру $\mathsf{g}$. Для любого $f \in L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g})$ и всякой преднормы $u$ в $X$ существует последовательность простых функций $\{f_k : k \in \mathbf{N}\}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{\mu,u} = 0.$$

Тогда каждая функция $f_k$ является $\mathcal{R}$-непрерывной и последовательность $\{f_k : k\}$ равномерно сходится на $G_{\epsilon,u}$ к $f$, следовательно, $f$ является $\mathcal{R}$-непрерывной на $G_{\epsilon,u}$. В силу следствия 13 функция $f$ является $\mathcal{R}_\mu$-непрерывной.

Возьмём ступенчатую функцию $g$ такой, чтобы выполнялось неравенство $\|f - g\|_{\mu,u} < \epsilon$, следовательно, $\{x : u(f(x))N_{\mu,u}(x) \geq \epsilon\} = \{x : u(g(x))N_{\mu,u}(x) \geq \epsilon\}$ и это множество компактно согласно теореме 9. Таким образом, из принадлежности $f \in L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g})$ следуют свойства $(1, 2)$.

Пусть теперь выполнены свойства $(1, 2)$ для функции $f : G \to X$. Для произвольного $\delta > 0$ и преднормы $u$ в $X$ возьмём $\mathcal{R}_\mu$-ступенчатую функцию $g$ такую, что $\|f - g\|_{\mu,u} < \delta$. Рассмотрим множество $V := \{x \in G : u(f(x))N_{\mu,u}(x) \geq \delta\}$. Функция $N_{\mu,u}$ является $\mathcal{R}_\mu$ полунепрерывной сверху по теореме 9 и $\sup_{x\in C} N_{\mu,u}(x) =: w < \infty$. Поскольку $V$ компактно, то существует конечное открыто-замкнутое подпокрытие $B_1, ..., B_k$ для $V$ такое, что $u(f(x) - f(y))w < \delta$ для любых $x, y \in B_j \cap V$ с теми же $j$, $j = 1, ..., k$. Теперь выберем $b_j \in B_j$, следовательно, множество $\{x \in G : u(f(x) - f(b_j))N_{\mu,u}(x) < \delta\}$ является $\mathcal{R}_{\mu,u}$-открытым и содержит $B_j$. Поэтому, существуют дизъюнктные множества $W_1, ..., W_k$ такие, что $W_j \subset \{x \in G : u(f(x) - f(b_j))N_{\mu,u}(x) < \delta\}$ и $B_j := W_j \cap V$, так как $G$ является $\mathcal{R}$ вполне несвязным с открыто-замкнутой базой её топологии. Возьмём ступенчатую функцию

$$g(x) := \sum_{j=1}^{k} f(b_j)Ch_{W_j}(x).$$

Для произвольной точки $x \in W_j$ мы имеем $u(f(x) - g(x))N_{\mu,u}(x) = u(f(x) - f(b_j))N_{\mu,u}(x) < \delta$. В то же время для $x \notin \bigcup_{j=1}^k W_j$ имеет силу формула $u(f(x) - g(x))N_{\mu,u}(x) = u(f))N_{\mu,u}(x) < \delta$, следовательно, $\|f - g\|_{\mu,u} \leq \delta$.

**15. Следствие.** *Пусть $\mu$ - это $X$-значная мера на $\mathcal{R}$, $g \in L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g})$, функция $f : G \to \mathsf{g}$ является $\mathcal{R}_\mu$-непрерывной на множестве $u(f(x)) \leq u(g(x))$ для любой преднормы $u$ на алгебре $\mathsf{g}$ и для всякого $x \in G$, тогда $f \in L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g})$.*

**16. Следствие.** *Пространство $L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g})$ полно и локально $\mathbf{K}$-выпукло. Если $X$ и $\mathsf{g}$ являются нормированными пространствами, тогда $L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g})$ - это банахово пространство.*

**Доказательство.** Согласно конструкции данной выше $L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g})$ является пополнением пространства ступенчатых функций относительно семейства преднорм $\| * \|_{\mu,u}$, где $u$ - это преднорма на $X$, $\mathsf{g}$. Поэтому, $L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g})$ изоморфно с $L(G, \mathcal{R}, \mu, \tilde{X}; \mathsf{g})$ и полно, где $\tilde{X}$ - это пополнение $X$ и $\tilde{\mathsf{g}}$ - это пополнение $\mathsf{g}$ как $\mathbf{K}$-выпуклых пространств. В частности, когда $X$ и $\mathsf{g}$ являются нормированными пространствами, тогда $\tilde{X}$ и $\tilde{\mathsf{g}}$, и $L(G, \mathcal{R}, \mu, \tilde{X}; \tilde{\mathsf{g}})$ являются банаховыми пространствами.

**17. Определение.** Если $X$ - это нормированное пространство над $\mathbf{K}$ и $x_1, x_2, ...$ - это последовательность в $X$ такая, что $\|a_1x_1 + ... + a_nx_n\| \geq t \max\{\|a_jx_j\| : j = 1, ..., n\}$ для любых чисел $a_1, ..., a_n \in \mathbf{K}$, а натуральное число $n \in \mathbf{N}$ не превышает длины последовательности, где $0 < t \leq 1$ - это отмеченное число, тогда система

$\{x_1, x_2, ...\}$ называется $t$-ортогональной. Если $t = 1$, тогда $\{x_1, x_2, ...\}$ называется ортогональной.

Естественно, что в случае $t = 1$ неравенство, $\geq$, сводится к равенству, $=$, в силу неархимедова свойства нормы.

**18. Теорема.** *Пусть $\mu$ - это $X$-значная мера на $(G, \mathcal{R})$, и пусть банахова алгебра $\mathsf{g}$ имеет $t_0$-ортогональный базис, где $0 < t_0 \leq 1$. Тогда пространство $L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g})$ имеет $t$-ортогональный базис с $0 < t < t_0$. Если группа нормирования поля $\mathbf{K}$ дискретна в $(0, \infty)$, тогда пространство $L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g})$ имеет ортогональный базис.*

**Доказательство.** Если группа нормирования поля $\mathbf{K}$ дискретна, то банахово пространство над полем $\mathbf{K}$ имеет ортогональный базис в силу теоремы 5.16 [18], в частности, для $L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g})$ благодаря следствию 16.

В общем случае мы предположим, что группа нормирований поля $\mathbf{K}$ является плотной в $(0, \infty)$ и $N_\mu(x) > 0$ для любого $x \in G$. Возьмём отмеченное число $0 < t < t_0$ такое, что $\mathsf{g}$ имеет $t_0$-ортогональный базис. Тогда выберем элемент $\pi \in \mathbf{K}$ таким, что $t_1 < |\pi| < 1$, где $t_1 = t/t_0$, и определим функцию $h : G \to \mathbf{K}$ таким образом, что $h(x) = \pi^n$, когда $|\pi|^{n+1} < N_\mu(x) \leq |\pi|^n$ и $n \in \mathbf{Z}$, следовательно, $|\pi||h(x)| < N_\mu(x) \leq |h(x)|$ для любой точки $x \in G$. Обозначим через $G_d$ множество $G$ в дискретной топологии и зададим отображение $q : L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g}) \ni f \mapsto hf \in BC(G_d, \mathsf{g})$, где $BC(Y, W)$ обозначает пространство всех ограниченных непрерывных отображений из топологического пространства $Y$ в $\mathbf{K}$-линейное нормированное пространство $W$. Пространство $BC(G_d, \mathsf{g})$ снабжено нормой

$$\|v\|_\infty := \sup_{x \in G_d} \|v(x)\|,$$

где $\| * \|$ - это норма в $\mathsf{g}$. Поэтому,

$$(1) \quad |\pi| \|qf\|_\infty < \|f\|_\mu \leq \|qf\|_\infty$$

для любой функции $f \in L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g})$. Если $A \in \mathcal{R}$ и $b \in \mathsf{g}$, тогда $hb\ Ch_A \in BC(G_d, \mathsf{g})$, так как $\|h(x) b Ch_A(x) : x \in G\} \subset \{\pi^n : n \in \mathbf{Z}; |\pi|^{n+1} < \|b\| |Ch_A(x)|\}$.

В силу $\mathbf{K}$ линейности и свойства (1) отображения $q$ область значений $q(L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g}))$ является замкнутым $\mathbf{K}$-линейным подпространством в $BC(G_d, \mathsf{g})$. В пространстве $BC(G_d, \mathsf{g})$ всюду плотно произведение $BC(G_d, \mathbf{K}) \times \mathsf{g}$, в то время как $L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathbf{K}) \times \mathsf{g}$ всюду плотно в $L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g})$. В силу следствий 5.23 и 5.25 [18] $BC(G_d, \mathbf{K})$ имеет ортогональный базис, следовательно, $BC(G_d, \mathsf{g})$ имеет $t_0$-ортогональный базис.

Согласно теореме Грюсона 5.9 [18], если $E$ - это банахово пространство с ортогональным базисом, то каждое замкнутое $\mathbf{K}$-линейное подпространство имеет ортогональный базис. Пространство $q(L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathbf{K}))$ замкнуто в $BC(G_d, \mathbf{K})$, следовательно, оно имеет ортогональный базис $\{e_j : j\}$. Таким образом, $L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g})$ имеет $t$-ортогональный базис $q^{-1}(e_j \times s_k)$, где $\{s_k : k\}$ - это $t_0$-ортогональный базис в $\mathsf{g}$.

**19. Теоремы.** *Пусть $X$ и $\mathsf{g}$ такие же, как и в §39 [8], и дополнительно пусть $X$ - это алгебра над полем $\mathbf{K}$ с семейством мультипликативных преднорм. Предположим, что $\mu$ и $\nu$ являются $X$-значными мерами на разделяющих покрывающих кольцах $\mathcal{R}$ множества $G$ и $\mathcal{T}$ множества $H$. Тогда*

(1) *конечное объединение множеств $A\times B$, $A\in\mathcal{R}$, $B\in\mathcal{T}$ образует разделяющее покрывающее кольцо $\mathcal{R}\otimes\mathcal{T}$ для $G\times H$;*

(2) *существует и единственная мера $\mu\times\nu$ на $\mathcal{R}\times\mathcal{T}$ такая, что $\mu\times\nu(A\times B)=\mu(A)\nu(B)$ для любого $A\in\mathcal{R}$ и $B\in\mathcal{T}$, $N_{\mu\times\nu,u}(x,y)=N_{\mu,u}(x)N_{\nu,u}(y)$ для любого $x\in G$, $y\in H$ и любой преднормы $u\in\mathcal{S}$ в $X$;*

(3) *если $f\in L(G\times H,\mathcal{R}\times\mathcal{T},\mu\times\nu,X;\mathsf{g})$, тогда $H\ni y\mapsto\int_G f(x,y)\mu(dx)$ является $\nu$-почти всюду определённой $\nu$-интегрируемой функцией на $H$ и отображение $G\ni x\mapsto\int_H f(x,y)\nu(dy)$ определено $\mu$-почти всюду, и оно является $\mu$-интегрируемой функцией на $G$, причём*

$$\int_{G\times H}f(x,y)\mu\times\nu(dx,dy)=\int_H(\int_G f(x,y)\mu(dx))\nu(dy).$$

*Более того, если $X$ коммутативна, то*

$$\int_H(\int_G f(x,y)\mu(dx))\nu(dy)=\int_G(\int_H f(x,y)\nu(dx))\mu(dy);$$

(4) *в частности, если $\mathsf{g}$ и $X$ коммутативны, $f\in L(G,\mathcal{R},\mu,X;\mathsf{g})$ и $h\in L(H,\mathcal{T},\nu,X;\mathsf{g})$, тогда $f(x)h(y)\in L(G\times H,\mathcal{R}\times\mathcal{T},\mu\times\nu,X;\mathsf{g})$ и*

$$\int_{G\times H}f(x)g(y)\mu(dx)\nu(dy)=(\int_G f(x)\mu(dx))(\int_H g(y)\nu(dy));$$

(5) *алгебра $L(G\times H,\mathcal{R}\times\mathcal{T},\mu\times\nu,X;\mathsf{g})$ является $\mathbf{K}$-линейно топологически изоморфной тензорному произведению $L(G,\mathcal{R},\mu,X;\mathsf{g})\hat{\otimes}L(H,\mathcal{T},\nu,X;\mathsf{g})$.*

**Доказательство.** (1). Если $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ - это покрытия для $G$ и $H$ элементами из $\mathcal{R}$ и $\mathcal{T}$ соответственно, то $\bigcup_{A\in\mathcal{U},B\in\mathcal{V}}A\times B=G\times H$. Если $(x_1,y_1)\ne(x_2,y_2)\in G\times H$, тогда или $x_1\ne x_2$, или $y_1\ne y_2$. В первом случае мы возьмём $A\in\mathcal{R}$ таким, что $x_1\in A$ и $x_2\in G\setminus A$, и $x_1\in B$ с $B\in\mathcal{T}$, тогда $A\times B$ различает точки в них: $(x_1,y_1)\in A\times B$ и $(x_2,y_2)\notin A\times B$.

(2). Положим

$$\mu\times\nu(E):=\int_{G\times H}Ch_E(x,y)\mu(dx)\nu(dy)$$

для любого $E\in\mathcal{R}\times\mathcal{T}$, следовательно, мера $\mu\times\nu$ аддитивна. При $N_u(x,y):=N_{\mu,u}(x)N_{\nu,u}(y)$ и всяких $A\in\mathcal{R}$, $B\in\mathcal{T}$ мы получим неравенство $u((\mu\times\nu))(A\times B))\le\|Ch_{A\times B}\|_{N_u}$, следовательно, $\|C\|_{\mu\times\nu,u}\le\|Ch_C\|_{N_u}$.

Естественно, $G$ и $H$, и $G\times H$ снабжены топологиями $\mathcal{R}$ и $\mathcal{T}$, и $\mathcal{R}\times\mathcal{T}$ соответственно. Тогда получается включение $\{(x,y)\in A\times B: N_u(x,y)\ge\epsilon\}\subset\{x\in A: N_{\mu,u}(x)\ge\epsilon\}\times\{y\in B: N_{\nu,u}(y)\ge\epsilon\}$ для любых $A\in\mathcal{R}$ и $B\in\mathcal{T}$, и $\epsilon>0$. Функция $N_u$ является полунепрерывной сверху и $\{x\in A: N_{\mu,u}(x)\ge\epsilon\}\times\{y\in B: N_{\nu,u}(y)\ge\epsilon\}$ компактно, следовательно, $\{(x,y)\in A\times B: N_u(x,y)\ge\epsilon\}$ компактно, и неизбежно $\{(x,y)\in C: N_u(x,y)\ge\epsilon\}$ компактно для любого $C\in\mathcal{R}\times\mathcal{T}$ и всякого $\epsilon>0$. Поэтому, согласно теореме 9 $\mu\times\nu$ - это мера и $N_{\mu\times\nu,u}(x,y)\le N_u(x,y)$ для любого $u\in\mathcal{S}$ и каждого $x\in G$, и всякого $y\in H$. Каждая $u$ является мультипликативной преднормой на $X$ и $u((\mu\times\nu)(A\times B))=u(\mu(A))u(\nu(B))$ и, следовательно, $\sup\{u((\mu\times\nu)(C)): C\in\mathcal{R}\times\mathcal{T}, C\subset A\times B\}=\|A\times B\|_{\mu\times\nu,u}\ge\|A\|_{\mu,u}\|B\|_{\nu,u}$ для любого $A\in\mathcal{R}$ и каждого $B\in\mathcal{T}$. Поэтому, $N_{\mu\times\nu,u}(x,y)\ge N_u(x,y)$ для любых $u$, $x$ и $y$.

(3). Если $f$ - это ступенчатая функция, тогда (3) выполняется в силу (2). Если $f \in L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g})$, тогда для любого $u$ существует последовательность ступенчатых функций $f_1, f_2, ...$ сходящаяся к $f$, так что $\|f - f_n\|_{N_u} \leq 1/n$ для любого натурального числа $n \in \mathbf{N}$. Мы видим, что $u(f(x, y) - f_n(x, y))N_{\mu,u}(x)N_{\nu,u}(y) \leq 1/n$ для любых $x, y \in G$. Таким образом, $f(*, y) \in L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g})$ для $\nu$-почти всех $y \in H$, следовательно,

$$u(\int_G f(x, y)\mu(dx) - \int_G f_n(x, y)\mu(dx))N_{\nu,u}(y) \leq 1/n.$$

Поэтому, функция $H \ni y \mapsto \int_G f(x, y)\mu(dx)$ определена для $\nu$-почти всех $y \in H$ и является $\nu$-интегрируемой. Поскольку

$$\int_H (\int_G f_n(x, y)\mu(dx))\nu(dy) = \int_{G\times H} f_n(x, y)\mu \times \nu(dx, dy) \text{ для любого } n, \text{ то}$$

$$u(\int_H (\int_G f_n(x, y)\mu(dx))\nu(dy) - \int_{G\times H} f_n(x, y)\mu \times \nu(dx, dy)) \leq 1/n$$

для любого натурального числа $n \in \mathbf{N}$ и каждой преднормы $u \in \mathcal{S}$, следовательно,

$$\int_H (\int_G f(x, y)\mu(dx))\nu(dy) = \int_{G\times H} f(x, y)\mu \times \nu(dx, dy).$$

Часть (4) вытекает из пунктов $(2, 3)$ как частный случай.

(5). Существует билинейное непрерывное отображение $\mathsf{m} : L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g}) \times L(H, \mathcal{T}, \nu, X; \mathsf{g}) \ni (f, h) \mapsto fh \in L(G \times H, \mathcal{R} \times \mathcal{T}, \mu \times \nu, X; \mathsf{g})$. Если $X$ - это банахово пространство, тогда норма для $\mathsf{m}$ равна $\|\mathsf{m}\| = 1$.

Пусть $Y$ - это полное локально $\mathbf{K}$-выпуклое пространство над $\mathbf{K}$ и пусть $F : L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g}) \times L(H, \mathcal{T}, \nu, X; \mathsf{g}) \to Y$ является непрерывным $\mathbf{K}$-билинейным отображением. Тогда существует отображение $F_{\mathsf{m}}(Ch_{A\times B}) = F_{\mathsf{m}}(Ch_A \otimes Ch_B) = F(Ch_A, Ch_B) \in Y$ для любых $A \in \mathcal{R}$ и $B \in \mathcal{T}$. Ступенчатую функцию $f : G\times H \to \mathsf{g}$ мы запишем в виде

$$f(x, y) = \sum_j b_j Ch_{A_j\times B_j}(x, y),$$

где $b_j \in \mathsf{g}$ - элементы алгебры, а $A_j \in \mathcal{R}$ - подмножества, $B_j \in \mathcal{T}$ для любого $j$, причём $(A_j \times B_j) \cap (A_i \times B_i) = \emptyset$ для любого $i \neq j$.

Для любой преднормы $v$ в $Y$ и каждой преднормы $u$ на $X$ существует натуральное число $k$ такое, что

$$\sup_{x\in G, y\in H} v(F_{\mathsf{m}}(b_k Ch_{A_k\times B_k})(x, y))N_{\mu\times\nu,u}(x, y)$$

$$= \max_j v(F_{\mathsf{m}}(b_j Ch_{A_j\times B_j})(x, y))N_{\mu\times\nu,u}(x, y), \text{ следовательно,}$$

$$v(F_{\mathsf{m}} f(x, y))N_{\mu\times\nu,u}(x, y) \leq \sup_{x\in G, y\in H} v(F_{\mathsf{m}}(b_k Ch_{A_k\times B_k})(x, y))N_{\mu\times\nu,u}(x, y)$$

$$\leq u(b_k)\|F\|_{u,v}\|Ch_{A_k}\|_{\mu,u}\|Ch_{B_k}\|_{\nu,u} \leq \|F\|_{u,v}\|f\|_{\mu\times\nu,u},$$

где $\|F\|_{u,v} := \sup_{w\in X, u(w)>0} v(Fw)/u(w)$.

Поэтому, отображение $F_{\mathsf{m}}$ имеет непрерывное продолжение $F_{\mathsf{m}}$ с $L(G\times H,\mathcal{R}\times\mathcal{T},\mu\times\nu,X;\mathsf{g})$ на $Y$. Таким образом, $F_{\mathsf{m}}(f\otimes h)=F(f,h)$ для любых $f\in L(G,\mathcal{R},\mu,X;\mathsf{g})$ и $h\in L(H,\mathcal{T},\nu,X;\mathsf{g})$, и неизбежно алгебра $L(G\times H,\mathcal{R}\times\mathcal{T},\mu\times\nu,X;\mathsf{g})$ является $\mathbf{K}$-линейно топологически изоморфной с тензорным произведением $L(G,\mathcal{R},\mu,X;\mathsf{g})\hat{\otimes}L(H,\mathcal{T},\nu,X;\mathsf{g})$.

**20. Теорема.** *Пусть $\mathsf{g}_j$ и $X_j$ - это семейство алгебр и локально выпуклых пространств и модулей над полем $\mathbf{K}$ удовлетворяющие условиям §39 [8], $j\in\beta$, где $\beta$ - это множество. Предположим, что для всякого $j$ имеется мера $\mu_j:\mathcal{R}\to X_j$, а $X=\bigotimes_{j\in\beta}X_j$ и $\mathsf{g}=\bigotimes_{j\in\beta}\mathsf{g}_j$ снабжены топологиями произведений. Тогда существует мера $\mu=\bigotimes_{j\in\beta}\mu_j$ на $\mathcal{R}$ со значениями в $X$ такая, что $L(G,\mathcal{R},\mu,X;\mathsf{g})$ - это пополнение прямой суммы $\bigoplus_{j\in\beta}L(G,\mathcal{R},\mu_j,X_j;\mathsf{g}_j)$.*

**Доказательство.** Поскольку каждое $X_j$ и всякое $\mathsf{g}_j$ являются полными, тогда $X$ и $\mathsf{g}$ полны (смотри [20, 17]). Естественно, что $X$ локально $\mathbf{K}$-выпуклое пространство, и $\mathsf{g}$ является алгеброй такой, что $x+y=(x_j+y_j:j)$ и $ab=(a_jb_j:j)$, где $x,y\in X$, $a,b\in\mathsf{g}$, $x=(x_j:j)$, $a=(a_j:j)$, $ax=(a_jx_j:j)$ (смотри теорему 5.6.1 [17]). Таким образом, $X$ - это унитальный левый $\mathsf{g}$-модуль. Для любого $j\in\beta$ определена проекционные операторы $\pi_j(x)=x_j$ и $\pi_j(a)=a_j$ на $X$ и $\mathsf{g}$. Поэтому, топологии $X$ и $\mathsf{g}$ характеризуются семействами преднорм $u$ такими, что $u(x)=\max\{u_j(x_j):j\in\alpha\}$ и $u(b)=\max\{u_j(b_j):j\in\alpha\}$, где $\alpha$ - это конечное подмножество в $\beta$, $u_j\in\mathcal{S}_j$, где $\mathcal{S}_j$ - это согласованное семейство преднорм $u_j$ в $X_j$, и $\mathsf{g}_j$ обозначается тем же символом для сокращения обозначений.

Если $A,B\in\mathcal{R}$ и $A\cap B=\emptyset$, тогда $\mu(A\cup B)=(\mu_j(A\cup B):j)=(\mu_j(A)+\mu_j(B):j)=(\mu_j(A):j)+(\mu_j(B):j)=\mu(A)+\mu(B)$, следовательно, мера $\mu$ аддитивна. Если $u$ - это преднорма на $X$, а $A\in\mathcal{R}$, тогда для любого $C\subset A$, $C\in\mathcal{R}$ выполняется неравенство $u(\mu(C))=\max\{u_j(\mu_j(C)):j\in\alpha\}<\infty$, так как $\alpha$ - это конечное множество и каждая мера $\mu_j$ ограничена. Если $\mathcal{A}$ - это сжимающееся семейство в $\mathcal{R}$ и $\bigcap_{A\in\mathcal{A}}A=\emptyset$, тогда $\lim_{A\in\mathcal{A}}u_j(\mu_j(A))=0$ для любого $j$ и всякого $u_j\in\mathcal{S}_j$, следовательно, $\lim_{A\in\mathcal{A}}u(\mu(A))=0$ для любой преднормы $u\in\mathcal{S}$ в $X$. Таким образом, $\mu$ - это мера на $\mathcal{R}$ со значениями в $X$.

Если $f\in L(G,\mathcal{R},\mu,X;\mathsf{g})$, тогда для любого $u\in\mathcal{S}$ существует последовательность $\{f_n:n\in\mathbf{N}\}$ простых функций таких, что $\|f-f_n\|_{\mu,u}\le 1/n$. Мы также имеем, что $\bigoplus_j\mathsf{g}_j$ всюду плотно в $\mathsf{g}$, где элементы прямой суммы как обычно $b=(b_j:j\in\beta,b_j\in\mathsf{g}_j\}$ таковы, что множество $\{j:b_j\ne 0\}$ конечно (смотри пример 5.10.6 в [17]). Таким образом, каждая простая функция может быть выбрана со значениями в $\bigoplus_{j\in\beta}\mathsf{g}_{\mathsf{j}}$. Поэтому, $L(G,\mathcal{R},\mu,X;\mathsf{g})$ - это пополнение прямой суммы $\bigoplus_{j\in\beta}L(G,\mathcal{R},\mu_j,X_j;\mathsf{g}_j)$.

Естественно, если $\beta$ конечно, то прямая сумма и прямое произведения совпадают.

**21. Следствие.** *Если выполнены предположения теоремы 20 и $f\in L(G,\mathcal{R},\mu,X;\mathsf{g})$, то $\int_G f(x)\mu(dx)=(\int_G f_j(x)\mu_j(dx_j):j\in\beta)$, где $f_j\in L(G,\mathcal{R},\mu,X_j;\mathsf{g}_j)$ для любого $j$.*

**Доказательство.** Формула этого следствия выполняется для любого $f$ в $\bigoplus_{j\in\beta}L(G,\mathcal{R},\mu_j,X_j;\mathsf{g}_j)$, но последнее пространство всюду плотно в $L(G,\mathcal{R},\mu,X;\mathsf{g})$ согласно теореме 19. Отображение $\int_G:L(G,\mathcal{R},\mu,X;\mathsf{g})\to X$ непрерывно: $u(\int_G f(x)\mu(dx))\le\|f\|_{\mu,u}$ в силу леммы 3, следовательно, утверждение этого следствие вытекает по непрерывности.

**22. Теорема.** *Пусть $\mathsf{g}$, $X$, $G$, $\mathcal{R}$, $\mu$ как и в* §39*[8] пусть $F$ - это непре-*

*рывный гомоморфизм левого унитального* $\mathsf{g}$*-модуля* $X$ *в равномерно полный левый унитальный* $\mathsf{h}$*-модуль* $Y$*. Тогда* $F$ *индуцирует непрерывный гомоморфизм* $\hat{F} : L(G,\mathcal{R},\mu,X;\mathsf{g}) \to L(G,\mathcal{R},\nu,Y;\mathsf{h})$ *такой, что* $F(\int_G f(x)\mu(dx)) = \int_G \hat{F}(f)\nu(dx)$ *для любого* $f \in L(G,\mathcal{R},\mu,X;\mathsf{g})$*, где* $\nu = F(\mu)$ *- это* $Y$*-значная мера. Если* $F(\mathsf{g}) = \mathsf{h}$*, тогда отображение* $\hat{F}$ *эпиморфно.*

**Доказательство.** Если $A, B \in \mathcal{R}$ с $A \cap B = \emptyset$, то $\nu(A \cup B) := F(\mu(A \cup B)) = F(\mu(A)) + F(\mu(B)) = \nu(A) + \nu(B) \in Y$. Если $A \in \mathcal{R}$ и $u$ - это преднорма в $X$, то $\sup_{C \subset A, C \in \mathcal{R}} u(\mu(C)) < \infty$, следовательно, для любой преднормы $v$ в $Y$ выполняется неравенство $\sup_{C \subset A, C \in \mathcal{R}} v(\nu(C)) < \infty$, так как функция $F$ непрерывна. Если $\mathcal{A}$ - это сжимающееся семейство в $\mathcal{R}$ с $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset$, тогда $\lim_{\mathcal{A}} \mu(A) = 0$, следовательно,

$$0 = \lim_{A \in \mathcal{A}} F(\mu(A)) = \lim_{A \in \mathcal{A}} \nu(A),$$

так как функция $F$ непрерывна. Таким образом $\nu$ - это $Y$-значная мера.

Если $v$ - это преднорма в $Y$, тогда $v_F(q) := v(F(q))$ является непрерывной преднормой в $X$, где $q \in X$, следовательно, $v_F(\mu(A)) = v(\nu(A))$ для любого $A \in \mathcal{R}$ и неизбежно $N_{\mu, v_F}(x) = N_{\nu, v}(x)$ для любого $x \in G$.

Если $f : G \to \mathsf{g}$ - это ступенчатая функция $f(x) = \sum_j a_j Ch_{A_j}(x)$, где $a_j \in \mathsf{g}$, $A_j \in \mathcal{R}$, тогда

$$\hat{F}(f) = F(f) = \sum_j F(a_j) Ch_{A_j}(x),$$

так как $F(a_1 b_1 + a_2 b_2) = F(a_1)F(b_1) + F(a_2)F(b_2)$ для любого $a_j, b_j \in \mathsf{g}$, также $0, 1 \in \mathsf{g}$, $F(0) = 0$, $F(1) = 1 \in \mathsf{h}$. Более того, $\|F(f)\|_{\nu,v} = \|f\|_{\mu, v_F}$ для любой ступенчатой функции $f$ и всякой преднормы $v$ in $Y$, следовательно, отображение $\hat{F}$ непрерывно и $\mathbf{K}$-линейно, и оно имеет непрерывное продолжение $\hat{F} : L(G,\mathcal{R},\mu,X;\mathsf{g}) \to L(G,\mathcal{R},\nu,Y;\mathsf{h})$.

Для любого $s \in L(G,\mathcal{R},\nu,Y;\mathsf{h})$ и всякой преднормы $v$ на $Y$ возьмём последовательность $s_n$ простых функций $s_n : G \to \mathsf{h}$ сходящуюся к $s$ такой, что $\|s - s_n\|_{\nu,v} \le 1/n$ для любого натуральное число $n$. Если $F(\mathsf{g}) = \mathsf{h}$, тогда для любого $s_n = \sum_j b_{j,n} Ch_{A_j}$ существует простая функция $f_n = \sum_j a_{j,n} Ch_{A_j}$ такая, что $f_n : G \to \mathsf{g}$ и $\hat{F}(f_n) = s_n$, $a_{j,n} \in \mathsf{g}$ для любого $j, n$, где $b_{j,n} \in \mathsf{h}$, $A_j \in \mathcal{R}$. Но последовательность $\{f_n : n\}$ фундаментальна относительно $\| * \|_{\mu, v_f}$, следовательно, существует $f \in L(G,\mathcal{R},\mu,X;\mathsf{g})$ такая, что $\hat{F}(f) = s$.

Согласно условиям этой теоремы имеет силу равенство $F(a_1 w_1 + a_2 w_2) = F(a_1)F(w_1) + F(a_2)F(w_2)$ для любых $a_1, a_2 \in \mathsf{g}$, $w_1, w_2 \in X$, где $F(a_j) \in \mathsf{h}$ и $F(w_j) \in Y$. Поэтому, для любой ступенчатой функции $f(x) = \sum_j a_j Ch_{A_j}(x)$ мы получаем формулы

$$F(\int_G f(x)\mu(dx)) = F(\sum_j a_j \mu(A_j)) = \sum_j F(a_j)\nu(A_j) = \int_G \hat{F}(f)(x)\nu(dx) \text{ и}$$

$$v_F(\int_G f(x)\mu(dx)) = v(\int_G \hat{F}(f)(x)\nu(dx))$$

для любой преднормы $v$ на $Y$, следовательно, по непрерывности

$$F(\int_G f(x)\mu(dx)) = \int_G \hat{F}(f)(x)\nu(dx)$$

для любой функции $f \in L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathsf{g})$.

**23. Определение.** Пусть $\mathcal{R} = \mathsf{Bco}(G)$ - это кольцо всех открыто-замкнутых подмножеств нульмерного топологического хаусдорфова пространства. Мера $\mu : \mathsf{Bco}(G) \to X$ называется тесной мерой, где $X$ то же, что и в §39 [8]. Семейство $M = M(G, X)$ всех тесных мер образует $\mathbf{K}$-линейное пространство с семейством преднорм

$$\|\mu\|_u = \sup_{A \in \mathsf{Bco}(G)} u(\mu(A)) = \|G\|_{\mu,u} = \sup_{x \in G} N_{\mu,u}(x),$$

где $u \in \mathcal{S}$ - это преднорма на $X$. В частности, если $X$ - это нормированное пространство, тогда $M(G, X)$ - это нормированное пространство.

Замыкание множества $\{x \in G : \exists u \in \mathcal{S}, N_{\mu,u}(x) > 0\}$ мы назовём носителем меры $\mu$.

**24. Теорема.** *Если $\mathcal{R}$ - это покрывающее кольцо для $G$ являющееся базой нульмерной хаусдорфовой топологии в $G$, и если $\mu$ - это $X$-значная мера на $\mathcal{R}$, тогда*

$$(f\mu)(A) := \int_G Ch_A(x) f(x) \mu(dx)$$

*- это тесная мера для $f \in L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathbf{K})$, а отображение $\psi_\mu := \psi : L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathbf{K}) \ni \mapsto (f\mu)$ является $\mathbf{K}$-линейным топологическим вложением пространства $L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathbf{K})$ в $M(G, X)$.*

**Доказательство.** Для любого $u \in \mathcal{S}$ множества $\{x \in G : N_{\mu,u}(x) > 0\}$ является $\sigma$-компактным, то есть счётным объединением компактных подмножеств по теореме 9. Поэтому, если $A$ - это открыто-замкнутое подмножество в $G$, то $Ch_A \in L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathbf{K})$, так как для любых $u \in \mathcal{S}$ и $\epsilon > 0$ существует последовательность $f_n \in L(G, \mathcal{R}, \mu, X; \mathbf{K})$ с $\|Ch_A - f_n\|_{\mu,u} \le 1/n$ и носителями $supp(f_n) \supset \{x \in G : N_{\mu,u}(x) \ge 1/n\}$. Таким образом $f\mu$ определена на $\mathcal{R}_{f\mu} \supset \mathsf{Bco}(G)$, следовательно, $f\mu \in M(G, X)$. Очевидно, выполняется свойство линейности $\psi(af + bg) = a\psi(f) + b\psi(g) = af\mu + bg\mu$. С другой стороны, $N_{f\mu,u}(x) \le \|f\|_{\mu,u} N_{\mu,u}(x)$, следовательно, $\psi$ непрерывна. В силу теоремы 14 $u(f(x)) N_{\mu,u}(x) = N_{f\mu,u}(x)$ для любых $u \in \mathcal{S}$ и $x \in G$, следовательно, $\psi$ - это топологическое вложение. Если $X$ - это банахово пространство, тогда $\psi$ является изометрическим вложением.

**25. Обозначения.** Пусть $Y^*$ обозначает топологически двойственное пространство всех непрерывных $\mathbf{K}$-линейных функционалов на $\mathbf{K}$-линейном пространстве $Y$, $Mat_n(\mathbf{K})$ обозначает алгебру всех квадратных $n \times n$ матриц, $n \in \mathbf{N}$, $BC(G, Y)$ обозначает пространство всех непрерывных ограниченных функций из $G$ в $Y$.

**26. Теорема.** *Если $G$ - это нульмерное хаусдорфово пространство и $\mu \in M(G, Mat_n(\mathbf{K}))$, тогда $BC(G, Mat_n(\mathbf{K})) \subset L(G, \mathcal{R}, \mu, Mat_n(\mathbf{K}); Mat_n(\mathbf{K}))$ и интеграл*

$$\lambda_\mu(f) := \int_G f(x) \mu(dx)$$

*дает $\mathbf{K}$-линейное изометрическое вложение $\lambda : M(G, Mat_n(\mathbf{K})) \hookrightarrow BC(G, Mat_n(\mathbf{K}))^*$. Если $G$ компактно, тогда $\lambda$ является изоморфизмом.*

**Доказательство.** В силу теоремы 14 мы получим включение $BC(G, Mat_n(\mathbf{K})) \subset L(G, \mathcal{R}, \mu, Mat_n(\mathbf{K}); Mat_n(\mathbf{K}))$. Более того, отображение $\lambda$ определено и $\mathbf{K}$-линейно.

Поскольку алгебра квадратных матриц $Mat_n(\mathbf{K})$ размера $n \times n$ конечномерна над полем $\mathbf{K}$, то она является топологически двойственным $\mathbf{K}$-линейным пространством изоморфным с $Mat_n(\mathbf{K})$. Она имеет естественную топологию нормы $\|b\| := \max_{1 \le i,j \le n} |b_{i,j}|$. Если $\mu \in M(G, Mat_n(\mathbf{K}))$, то

$$\|\mu\| = \sup_{A \in \mathsf{Bco}(G)} \max_{i,j} |\mu_{i,j}(A)| = \sup_{A \in \mathsf{Bco}(G)} |\lambda_\mu(Ch_A)| \le \|\lambda_\mu\|,$$

следовательно, $\lambda$ является изометрическим вложением.

Если $q \in BC(G, Mat_n(\mathbf{K}))^*$, то $\mu(A)$ имеет матричные элементы $q(E_{i,j}Ch_A) =: \mu^q_{i,j}(A)$ и является аддитивной функцией на $\mathsf{Bco}(G)$ со значениями в алгебре $Mat_n(\mathbf{K})$, где $E_{i,j}$ - это $n \times n$ матрица с 1 на $(i,j)$-м месте и нулями на других местах. Для любых $A \in \mathsf{Bco}(G)$ и $b \in Mat_n(\mathbf{K})$ мы имеем $b\, Ch_A \in BC(G, Mat_n(\mathbf{K}))$. Поэтому, $\mu^q$ определена на $\mathsf{Bco}(G)$. Если $\mathcal{A} \subset \mathsf{Bco}(G)$ - это сжимающееся семейство и $G$ компактно, то из $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset$ вытекает, что $\emptyset \in \mathcal{A}$, так как всякое $A \in \mathcal{A}$ замкнуто в $G$. Поскольку $q$ непрерывна, то для компактного $G$ отображение $\mu^q$ является мерой. В частности, $BC(G, Mat_n(\mathbf{K}))$ изоморфно пространству $C(G, Mat_n(\mathbf{K}))$ всех непрерывных функций из $G$ в $Mat_n(\mathbf{K})$.

**27. Теорема.** *Функция $f : G \to \mathsf{g}$ является $\mu$-интегрируемой для любой тесной меры $\mu \in M(G, X)$ тогда и только тогда, когда $f$ ограничена и для любого компактного подмножества $V$ в $G$ ограничение $f|_V$ функции $f$ на $V$ непрерывно.*

**Доказательство.** Предположим, что $f$ является $\mu$-интегрируемой функцией для любой тесной меры $\mu \in M(G, X)$. Возьмём преднорму $u \in \mathcal{S}$ на $X$ и число $\pi \in \mathbf{K}$ такое, что $0 < |\pi| < 1$. Если функция $f$ неограничена, то существует последовательность $b_j \in \mathbf{G}$ такая, что $b_i \ne b_j$ для любого $i \ne j$ и $\lim_{n \to \infty} u(\pi^n f(b_n)) = \infty$. Положим $\mu := \sum_n \pi^n x_n \delta_{b_n}$, где $\delta_b(A) := 1$ при $b \in A$, $\delta_b(A) = 0$ при $b \notin A$, $x_n \in X$, $u(x_n) = 1$. Поэтому, $\mu \in M(G, X)$ и $N_{\mu,u}(b_n) = |\pi|^n$ для всякого $n \in \mathbf{N}$, следовательно, $\|f\|_{\mu,u} = \infty$ и $f \notin L(G, \mathsf{Bco}(G), \mu, X; \mathsf{g})$. В силу теоремы 7.9 [18], если $V$ - это компактное подмножество в $G$, то существует мера $\lambda : \mathsf{Bco}(G) \to \mathbf{K}$ такая, что $N_\lambda(x) = 1$ для любого $x \in V$ и $N_\lambda(x) = 0$ для любого $x \in G \setminus V$. Возьмём $y \in X$ с $u(y) = 1$, тогда $\mu = y\lambda$ является $X$-значной мерой на множестве $N_{\mu,u} = Ch_V$. Поэтому, благодаря лемме 12 и теореме 14 ограничение $f|_V$ непрерывно.

Предположим теперь, что функция $f$ ограничена и её ограничение на всякое компактное подмножество в $G$ непрерывно. Возьмём произвольную тесную меру $\mu \in M(G, X)$, тогда благодаря следствию 13 отображение $f$ является $\mathsf{Bco}(G)_\mu$-непрерывным. Если $z \in \mathsf{g}$, то $q_z \in L(G, \mathsf{Bco}(G), \mu, X; \mathsf{g})$, где $q_z(x) = z$ для всякого $x \in G$. Возьмём элемент $z \in \mathsf{g}$ таким, что $u(f(x)) \le u(z)$ для любого $x \in G$, следовательно, в силу следствия 15 $f \in L(G, \mathsf{Bco}(G), \mu, X; \mathsf{g})$.

**28. Определение.** Пусть $G$ - это нульмерное хаусдорфово топологическое пространство. Если для любого подмножества $U \subset G$ выполняется свойство, что $U$ открыто-замкнуто в $G$ тогда и только тогда, когда пересечение $U \cap V$ открыто-замкнуто в $V$ для любого компактного подмножество $V$ в $G$, тогда $G$ называется $k_0$-пространством.

**29. Следствие.** *Если $G$ - это $k_0$-пространство, то*

$$BC(G, \mathsf{g}) = \bigcap_{\mu \in M(G,X)} L(G, \mathsf{Bco}(G), \mu, X; \mathsf{g}).$$

**Доказательство.** В силу теоремы 3.3.21 [20] отображение $f : G \to Y$ из $k$-пространства $G$ в топологическое пространство $Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого компактного подмножества $V$ в $G$ ограничение $f|_V$ функции $f$ на $V$ непрерывно. Поэтому, благодаря теореме 25 мы получаем утверждение этого следствия.

**30. Определение.** Говорят, что функционал $J \in BC(G, \mathsf{g})^*$ имеет компактный носитель, если существует компактное подмножество $V$ в $G$ такое, что $J(f) = 0$ для любого $f \in BC(G, \mathsf{g})$ с $f(x) = 0$ для всякого $x \in V$.

Компактифицирующей функцией (hood) на $G$ назовём отображение $h : G \to [0, \infty)$ такое, что множество $\{x \in G : h(x) \geq \epsilon\}$ компактно для любого $\epsilon > 0$.

Подмножество $W \subset BC(G, \mathsf{g})$ называется строго открытым, если для любых $f \in W$ и преднормы $u \in \mathcal{S}$ в $\mathsf{g}$ существует компактифицирующая функция $h$ такая, что
$$W \supset \{g \in BC(G, \mathsf{g}) : \sup_{x \in G} u(f(x) - g(x))h(x) \leq 1\}.$$
Строго открытые подмножества в $BC(G, \mathsf{g})$ образуют топологию в $BC(G, \mathsf{g})$ называемую строгой топологией.

**31. Теорема.** *Следующие условия на $J \in BC(G, Mat_n(\mathbf{K}))^*$ эквивалентны:*

(1) *существует $\mu \in M(G, Mat_n(\mathbf{K}))$ такое, что $J = \lambda_\mu$ (смотри теорему 24);*

(2) *для любого $\epsilon > 0$ существует компактное подмножество $V$ в $G$ такое, что $|J(f)| \leq \max\{\|J\| \sup_{x \in V} \|f(x)\|, \epsilon \|f\|)$ для всякого $f \in BC(G, Mat_N(\mathbf{K}))$;*

(3) *функционал $J$ является пределом элементов из $BC(G, Mat_n(\mathbf{K}))^*$ имеющих компактные носители;*

(4) *функционал $J$ строго непрерывен.*

**Доказательство.** Если $W_1$ и $W_2$ являются строго открытыми, $f \in W = W_1 \cap W_2$, $u \in \mathcal{S}$, тогда существуют компактифицирующие функции $h_j$ такие, что $W_j \supset \{g \in BC(G, \mathsf{g}) : \sup_{x \in G} u(f(x) - g(x))h_j(x) \leq 1\}$ для $j = 1, 2$, тогда $W \supset \{g \in BC(G, \mathsf{g}) : u(f(x) - g(x))h(x) \leq 1\}$, где $h(x) = \max(h_1(x), h_2(x))$ для любого $x$ является компактифицирующей функцией такой, что подмножество $\{x \in G : h(x) \geq \epsilon\} = \{x \in G : h_1(x) \geq \epsilon\} \cup \{x \in G : h_2(x) \geq \epsilon\}$ компактно для всякого $\epsilon > 0$ как объединение двух компактных множеств. Таким образом строго открытые подмножества образуют базу топологии.

$\mathbf{K}$-алгебра $Mat_n(\mathbf{K})$ нормирована. Поскольку $Mat_n(\mathbf{K})$ является конечномерным пространством над $\mathbf{K}$, то его топологически двойственное $\mathbf{K}$-линейное пространство изоморфно с $Mat_n(\mathbf{K})$. Для компактного подмножества $W$ в $G$ пусть $R_W$ обозначает ограничение отображения $R_W : BC(G, Mat_n(\mathbf{K})) \to C(W, Mat_n(\mathbf{K}))$. В силу теоремы 5.24 [18] существует $\mathbf{K}$-линейное изометрическое вложение $T_W : C(W, Mat_n(\mathbf{K})) \hookrightarrow PC(G, Mat_n(\mathbf{K}))$ такое, что $R_W \circ T_W = I$, так как $n \in \mathbf{N}$, где $PC(G, X)$ обозначает замкнутую $\mathbf{K}$-линейную оболочку в $BC(G, X)$ семейства $\{Ch_A : A \in \mathsf{Bco}(G), A$ компактно$\}$.

Если $J = \lambda_\mu$ с $\mu \in M(G, Mat_n(\mathbf{K}))$, тогда $N_\mu$ - это компактифицирующая функция и $|J(f)| \leq \|f\|_{N_\mu}$ для всякого $f \in BC(G, Mat_n(\mathbf{K}))$, следовательно, функционал $J$ строго непрерывен, то есть (1) $\Rightarrow$ (4).

Если функционал $J$ строго непрерывен, то возьмём $\pi \in \mathbf{K}$ с $0 < |\pi| < 1$. Существует компактифицирующая функция $h$, для которой $\{f : \|f\|_h < 1\} \subset \{f : |J(f)| \leq |\pi|\}$. Поэтому, $|J(f)| \leq \|f\|_h$ для любого $f$. При $\epsilon > 0$ положим

$W := \{x \in G : h(x) \geq \epsilon\}$. Если $f \in BC(G, Mat_n(\mathbf{K}))$, тогда возьмём $g := T_W R_W f$, следовательно, $J(f) = J(f-g) + J(g)$ и $|J(f-g)| \leq \sup_{x \in G} \|f(x) - g(x)\| h(x) \leq \sup_{x \in G \setminus W} \|f(x) - g(x)\| \epsilon \leq \|f\| \epsilon$ и $|J(g)| \leq \|J\| \|g\| \leq \|J\| \sup_{x \in W} \|f(x)\|$, следовательно, (4) $\Rightarrow$ (3).

Предположим, что (2) выполняется, тогда $J_W$ имеет компактный носитель. Поэтому, $|J(f) - J_W(f)| = |J(f - T_W R_W f)| \leq \epsilon \|f - T_W R_W f\| < \epsilon \|f\|$, следовательно, $\|J - J_W\| \leq \epsilon$, значит, (2) $\Rightarrow$ (3).

Пусть (3) выполнено. Мы имеем, что алгебра $M(G, Mat_n(\mathbf{K}))$ является полной и $\lambda$ - это изометрия, следовательно, область значений $\lambda$ замкнута в $BC(G, Mat_n(\mathbf{K}))^*$. Поэтому, без ограничения общности рассмотрим $J$ с компактным носителем. Предположим, что $W \subset G$ и $J(f)$ для $f$ тождественно равного нулю на $W$. Положим $\mu^J_{i,j}(A) := J(E_{i,j}\ Ch_A)$ для любого $A \in \mathsf{Bco}(G)$ и всех $i, j = 1, ..., n$, следовательно, $\mu : \mathsf{Bco}(G) \to Mat_n(\mathbf{K})$ аддитивна, где $E_{i,j}$ - это матрица с единичным элементом 1 на $(i,j)$-м месте и нулями на других местах, $\mu(A) = \mu^J(A)$ - это матрица с матричными элементами $\mu^J_{i,j}(A)$. Тогда $N_\mu(x) = 0$ для всякого $x \in G \setminus W$ и $N_\mu$ ограничена на $G$, следовательно, $\mu$ - это мера на $\mathsf{Bco}(G)$.

Нормированное пространство $C(W, Mat_n(\mathbf{K}))$ имеет ортонормированный базис состоящий из функций $E_{i,j} Ch_A$, где $i, j = 1, ..., n$ и $A \in \mathsf{Bco}(G)$. Предположим, что $f \in BC(G, Mat_n(\mathbf{K}))$, тогда существуют подмножества $A_k \in \mathsf{Bco}(G)$ и матрицы $b_k \in Mat_n(\mathbf{K})$ такие, что $b_k = a_k E_{i(k),j(k)}$ и $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$, и $f = \sum_k b_k Ch_{A_k}$ равномерно на $W$. Поэтому,

$$J(f) = J(\sum_k b_k Ch_{A_k}) = \sum_k a_k \mu_{i(k),j(k)}(A_k)$$

$$= \int_G \sum_k a_k Ch_{A_k} \mu_{i(k),j(k)}(dx) = \int_G \sum_k b_k \mu(A_k) = \int_G f(x) \mu(dx),$$

так как $\mu(A) = \sum_{i,j=1}^n E_{i,j} J(E_{i,j}\ Ch_A)$, следовательно, (3) $\Rightarrow$ (1).

**32. Следствие.** *Пусть $G$ и $H$ - это нульмерные хаусдорфовы пространства. Пусть также $X$ - это полная топологическая алгебра над полем $\mathbf{K}$. Если $\mu \in M(G, X)$ и $\nu \in M(H, X)$ - это тесные меры, тогда $\mu \times \nu$ является тесной мерой на $G \times H$, $\mu \times \nu \in M(G \times H, X)$.*

**Доказательство.** Этот вытекает из теоремы 31(2).

**33. Пример.** Рассмотрим свертки тесных мер. Предположим что $G$ - это нульмерная хаусдорфова топологическая полугруппа и $X$ - это топологическая алгебра над полем $\mathbf{K}$. Для тесных мер $\mu, \nu \in M(G, X)$ и функции $f \in BC(G, \mathsf{g})$ определим интеграл

$$Jf := \int_G f(xy)(\mu(dx) \times \nu(dy)).$$

Если $u \in \mathcal{S}$ является согласованной преднормой на $X$ и $\mathsf{g}$, то

$u(Jf) \leq \sup_{x,y \in G} u(f(xy)) N_{\mu,u}(x) N_{\nu,u}(y)$.

Для любого положительного числа $\epsilon > 0$ мы имеем, что множества $G_{\mu,u,\epsilon} := \{x \in G : N_{\mu,u}(x) \geq \epsilon\}$ и $G_{\nu,u,\epsilon} := \{y \in G : N_{\nu,u}(y) \geq \epsilon\}$ компактны, следовательно, их произведение $G_{\mu,u,\epsilon} G_{\nu,u,\epsilon}$ компактно. Более того, $u(Jf) \leq \max\{\sup\{u(f(z)) : z \in$

$G_{\mu,u,\epsilon}G_{\nu,u,\epsilon}\}\|\mu\|_u\|\nu\|_u; \|f\|_u\|\mu\|_u\epsilon; \|f\|_u\|\nu\|_u\epsilon\}$. Поэтому, функционал $J$ индуцирован тесной мерой обозначенной $\mu * \nu$ такой, что

$$\int_G f(x)[\mu * \nu](dx) = \int_G f(xy)(\mu(dx) \times \nu(dy))$$

для любой функции $f \in BC(G, X)$. В частности, для характеристической функции $f = Ch_A$ открыто-замкнутого подмножества $A \in \mathsf{Bco}(G)$ мы получим

$$(i) \quad [\mu * \nu](A) = (\mu \times \nu)(\{(x, y) \in G \times G, xy \in A\}).$$

Тесная мера $\mu*\nu$ называется сверткой $\mu$ и $\nu$. Очевидно, что $(a\mu+b\zeta)*\nu = (a\mu*\nu)+(b\zeta * \nu)$ и $\mu * (a\nu + b\zeta) = (a\mu * \nu) + (b\mu * \zeta)$ для любого $a, b \in \mathbf{K}$ и $\mu, \nu, \zeta \in M(G, X)$, так как $\mathbf{K}$ - это коммутативное поле. Следовательно, $M(G, X)$ является алгеброй со сложением $(\mu + \nu)(A) = \mu(A) + \nu(A)$ для любого $A \in \mathsf{Bco}(G)$ и умножением даваемым сверткой мер.

Из формулы $(i)$ вытекает, что $N_{\mu*\nu,u}(z) = \sup_{x,y \in G, xy=z} N_{\mu,u}(x)N_{\nu,u}(y) < \infty$, следовательно, $M(G, X)$ - это топологическая алгебра с семейством преднорм $\|\mu\|_u := \sup_{x\in G} N_{\mu,u}(x)$, $u \in \mathcal{S}$ таким, что $\|\mu * \nu\|_u \le \|\mu\|_u\|\nu\|_u$ для любого $\mu, \nu \in M(G, X)$.

**34. Лемма.** *Отображение 39$(SI)$ и условия 35$(M1 - M4)$ [8] индуцируют изометрию между пространствами $L^2(\mathcal{R}(G), \mathsf{g})$ и $L^2(\xi, \mathsf{g})$.*

**Доказательство.** Сначала покажем, что существует линейное изометричное отображение из $L^0(\mathcal{R}, \mathsf{g})$ на $L^0(\xi, \mathsf{g})$. Пусть $f(x) = \sum_k a_k Ch_{A_k}(x)$ и $g(x) = \sum_l b_l Ch_{A_l}(x)$ - это простые функции в $L^0(\mathcal{R}, \mathsf{g})$, где $a_k, b_l \in \mathsf{g}$ - элементы алгебры (смотри определение 39). Тогда благодаря условиям 35$(M1 - M4)$ и 39$(1 - 7)$ [8] выполняются равенства:

$$(1) \quad M[(\int_G [f(x)\xi(dx)), (\int_G g(x)\xi(dx))] = \sum_k [a_k, b_k]\mu(A_k)$$

$$= \int_G [f(x), g(x)]\mu(dx),$$

так как $\mathsf{g}^2 \ni \{a, b\} \mapsto [a, b] \in Lc(\mathsf{g})$ - это непрерывное отображение, $\mu(A) \in Lc(X)$ для любого $A \in \mathcal{R}$.

В силу леммы 38 [8] существует $\mathbf{K}$-значная мера $Tr\mu$. Поэтому,

$$(2) \quad M((\int_G f(x)\xi(dx)), (\int_G g(x)\xi(dx))) = \sum_k Tr(b_k^T a_k \mu)(A_k)$$

$$= \int_G Tr(g^T(x)f(x)\mu)(dx),$$

так как $\mathsf{g}^2 \ni \{a, b\} \mapsto (a, b) \in \mathbf{K}$ - это непрерывное отображение из $\mathsf{g}^2$ в поле $\mathbf{K}$, где $(Tr\mu)(A) := Tr\mu(A)$ для любого $A \in \mathcal{R}(G)$.

Если $F_1 \in Lin(X)$ и $F_2 \in Lc(X)$, тогда $F_1F_2 \in Lc(X)$. Поэтому всякому элементу $b \in \mathsf{g}$ соответствует $\mathbf{K}$-линейный непрерывный оператор $X \ni x \mapsto bx \in X$. Естественно, $Lin(X)$ и $Lc(X)$ являются левыми $\mathsf{g}$-модулями, так как $(bF) \in Lin(X)$

для любого $F \in Lin(X)$ и $(bF) \in Lc(X)$ для всякого $F \in Lc(X)$ и каждого элемента $b \in \mathsf{g}$, где $(bF)(x) := b(Fx)$ для каждого $x \in X$. Поскольку $\mu(A) \in Lc(X)$ и $g^T(x)f(x) \in \mathsf{g}$, то $g^T(x)f(x)\mu(A) \in Lc(X)$ для любого $x \in G$ и каждого $A \in \mathcal{R}(G)$ и всех простых функций $f, g \in L^0(\mathcal{R}, \mathsf{g})$.

Возьмём в $L^0(\mathcal{R}, \mathsf{g})$ преднорму

$$(3) \quad \|f\|_{2,\mu} = [\sup_{x\in G} N_{Trf^Tf\mu}(x)]$$

и в пространстве $L^0(\xi, \mathsf{g})$ положим

$$(4) \quad \|\eta_f\|_{2,N_P} := [\sup_{x\in G} |(f(x)\xi(x), f(x)\xi(x))|N_P(x)]^{1/2}$$

для любого $\eta_f = \eta = \int_G f(x)\xi(dx)$. Преднорма (4) является непрерывной относительно семейства преднорм 1(1).

Преднорма (3) непрерывна относительно семейства преднорм:

(5) $\|f\|_{\mu,u} := \sup_{x\in G} N_{f^Tf\mu,u}(x)$.

Поскольку $M((a\xi(A), b\xi(A))) = Tr(b^Ta\mu(A))$ для любого подмножества $A \in \mathcal{R}(G)$, то

$$N_{Trf^Tf\mu}(x) = \inf_{A\in\mathcal{R}(G), x\in A} \|A\|_{Trf^Tf\mu},$$

где $(f^Tf\mu)(dx) = f^T(x)f(x)\mu(dx)$. В тоже время выполняются формулы

$$M(a\xi(B), b\xi(B)) = \int_\Omega (a\xi(\omega, B), b\xi(\omega, B))P(d\omega),$$

$$|M(a\xi(B), b\xi(B))| \leq \sup_{\omega\in\Omega} |(a\xi(\omega, B), b\xi(\omega, B))|N_P(\omega)$$

для любых $a, b \in \mathsf{g}$.

В силу леммы 38 [8] $Trg^Tf\mu$ - это мера для любых $f, g \in L^0(\mathcal{R}, \mathsf{g})$, следовательно, взятие сжимающегося семейства $\mathcal{S}$ в $\mathcal{R}(G)$ таким, что $\bigcap_{A\in\mathcal{S}} A = \{x\}$ дает равенство

$$N_{Trg^Tf\mu}(x) = \inf_{A\in\mathcal{R}(G), x\in A} [\sup_{B\in\mathcal{R}(G), B\subset A_k, k} \sup_{\omega\in\Omega, k} |(a_k\xi(\omega, B), b_k\xi(\omega, B))|N_P(\omega)].$$

Таким образом,

$$N_{Trg^Tf\mu}(x) = \inf_{A\in\mathcal{R}(G), x\in A} [\sup_{B\in\mathcal{R}(G), B\subset A_k, k} \|(a_k\xi(*, B), b_k\xi(*, B))\|_{L^2(P,\mathbf{K})}]$$

и $\|A_k\|_{Trg^Tf\mu} = \|(a_k\xi(*, A_k), b_k\xi(*, A_k))\|_{L^2(P)}]$ для любого $k = 1, ..., m$ в силу леммы 2 [8] и благодаря выбору $\|A_k\|_{Trb_k^Ta_k\mu} = |Trb_k^Ta_k\mu(A_k)|$, который достаточен для нашего рассмотрения.

С другой стороны, $M[a\xi(A), b\xi(A)] = b^Ta\mu(A) \in Lc(X)$ для любого $A \in \mathcal{R}(G)$. Тогда

$$\begin{aligned} N_{b^Ta\mu,u}(x) &= \inf_{A\in\mathcal{R}(G), x\in A} [\sup_{B\in\mathcal{R}(G), B\subset A} u(b^Ta\mu(B))] \\ &\leq u(b^Ta)N_{\mu,u}(x) < \infty, \end{aligned}$$

где $N_{\mu,u}(x) := \inf_{A\in\mathcal{R}(G),x\in A}[\sup_{B\in\mathcal{R}(G),B\subset A} u(\mu(B))$. Поэтому, $\|f\|_{\mu,u} = \|f\|_{2,P,u}$ для любой простой функции $f \in L^0(\mathcal{R}, \mathsf{g})$ и всякой согласованной преднормы $u$ в $\mathsf{g}$, $X$ и $Lin(X)$.

Отображение $\psi$ из $39(SI)$ [8] также является $\mathbf{K}$-линейным из пространства $L^0(\xi, \mathsf{g})$ в $L^0(\mathcal{R}(G), \mathsf{g})$, так что $\psi$ - это изометрия относительно согласованного семейства преднорм 1(1) и 34(5) благодаря формуле (1) и леммам 2 [8], 3 и теореме 14.

Два пространства $L^2(P, \mathsf{g})$ и $L^2(\mu, \mathsf{g})$ являются полными в силу их определений, следовательно, $\psi$ имеет $\mathbf{K}$-линейное продолжение из $L^2(\mathcal{R}(G), \mathsf{g})$ в $L^2(\xi, \mathsf{g})$, которое является изометрией между $L^2(\mathcal{R}(G), \mathsf{g})$ и $L^2(\xi, \mathsf{g})$.

**35. Определение.** Если $f \in L^2(\mathcal{R}(G), \mathsf{g})$, то мы положим по определению:

$$\eta = \psi(f) = \int_G f(x)\xi(dx).$$

Случайный вектор $\eta$ мы назовем неархимедовым стохастическим интегралом функции $f$ по ортогональной стохастической мере $\xi$.

**36. Замечание.** Рассмотрим случайный вектор вида:

$\eta(t) = \int_G g(t,x)\xi(dx)$, где $\xi$ - это ортогональная стохастическая мера на измеримом пространстве $(G, \mathcal{R}(G))$ со значениями в $X$ и структурной мерой $\mu$ со значениями в $Lc(X)$ как выше, $t \in T$, $g(t,x) \in L^2(G, \mathcal{R}(G), \mu, \mathsf{g})$ как функция по $x \in G$ для любого $t \in T$, где $T$ - это множество.

Оператор ковариаций случайного вектора $\eta$ таков:

(1) $B(t_1,t_2) = M\{\eta^T(t_1), \eta(t_2)\} = \int_G \{g^T(t_1,x), g(t_2,x)\}\mu(dx)$, более того,

(2) $M\{\eta(t_1), \eta^T(t_2)\} = \int_G \{g(t_1,x), g^T(t_2,x)\} Tr\mu(dx)$

в обозначениях §§31, 39 [8], где $X$ - это левый $\mathsf{g}$-модуль, в то время как $Lc(X)$ снабжено естественной структурой левого $Lc(\mathsf{g})$-модуля, $\{a^T, b\} \in Lin(\mathsf{g})$, $\{a, b^T\} \in \mathsf{g}$ для любых $a, b \in \mathsf{g}$. Обозначим через $L^2\{g\}$ замыкание в $L^2(G, \mathcal{R}(G), \mu, \mathsf{g})$ для $\mathbf{K}$-линейной оболочки семейства функций $\{g(t,x) : t \in T\}$. Поэтому, $L^2\{g\}$ - это $\mathbf{K}$-линейное замкнутое подпространство в $L^2(G, \mathcal{R}(G), \mu, \mathsf{g})$. Если $L^2\{g\} = L^2(G, \mathcal{R}(G), \mu, \mathsf{g})$, тогда система функций $\{g(t,x) : t \in T\}$ называется полный в $L^2(G, \mathcal{R}(G), \mu, \mathsf{g})$.

Пусть $\{\eta(t) : t \in T\}$ - это $X$-значный случайный вектор. Обозначим через $L^0\{\eta\}$ семейство всех случайных векторов вида

$$\zeta = \sum_{k=1}^{l} a_k \eta(t_k),$$

где $l \in \mathbf{N}$, $t_k \in T$, $a_k \in \mathsf{g}$. Тогда $L^2\{\eta\}$ обозначает замыкание пространства $L^0\{\eta\}$ в $L^2(\Omega, \mathcal{R}, P, X)$.

Семейство случайных векторов $\{\zeta_\beta : \zeta_\beta \in L^2(\Omega, \mathcal{R}, P, X); \beta \in \Lambda\}$ называется подчиненным случайной $X$-значной функции $\{\eta(t) : t \in T\}$, если $\zeta_\beta \in L^2\{\eta\}$ для любого $\beta \in \Lambda$.

**37. Лемма.** *Если $X$ - это левый $\mathsf{g}$-модуль, тогда $Lin(X)$ является левым $Lin(\mathsf{g})$-модулем, а $Lc(X)$ - это левый $Lin(\mathsf{g})$-модуль и также левый $Lc(\mathsf{g})$-модуль.*

**Доказательство.** Пусть $x \in X$, $y \in \mathsf{g}$, $A \in Lin(\mathsf{g})$ и $B \in Lin(X)$, тогда $Bx \in X$, $y(Bx) \in X$ и $Ay \in \mathsf{g}$, следовательно, $AyBx \in X$, так как левый модуль ассоциативен. В частности, для $1 \in \mathsf{g}$ это дает $AB \in Lin(X)$. Поэтому, существует умножение $Lin(\mathsf{g}) \times Lin(X) \ni (A, B) \mapsto AB \in Lin(X)$. Если $B \in Lc(X)$, тогда $AyB \in Lc(X)$, так как $vB \in Lc(X)$ для любого $v \in \mathsf{g}$. В частности, для $y = 1$, следовательно, $Lc(X)$ - это левый $Lin(\mathsf{g})$-модуль и неизбежно также левый $Lc(\mathsf{g})$-модуль, так как $Lc(\mathsf{g}) \subset Lin(\mathsf{g})$.

**38. Теорема.** *Пусть оператор ковариации $B(t_1, t_2)$ случайной $X$-значной функции $\{\eta(t) : t \in T\}$ допускает представление 35(1), где $X$ и $\mathsf{g}$ такие же, как в §§30 и 39 [8], $\mu$ является $Lc(X)$-значной мерой на $(G, \mathcal{R}(G))$, $\mu^T = \mu$, $g(t,x) \in L^2(G, \mathcal{R}(G), \mu, Lc(X); \mathsf{g})$ для любого $t \in T$, а семейство $\{g(t,x) : t \in T;\}$ полно в $L^2(G, \mathcal{R}(G), \mu, Lc(X); \mathsf{g})$. Тогда $\eta(t)$ можно представить в виде:*

$$(1) \quad \eta(t) = \int_G g(t,x)\xi(dx)$$

*с вероятностью 1 для любого $t \in T$, где $\xi$ является стохастической ортогональной $X$-значной мерой подчиненной случайной функции $\eta(t)$ и со структурной функцией $\mu$.*

**Доказательство.** Рассмотрим функции вида:

$$(2) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{l} b_k g(t_k, x),$$

где $t_k \in T$, $b_k \in \mathsf{g}$, $l \in \mathbf{N}$.

Мы напомним, что семейство $\Psi$ векторов в топологическом векторном пространстве $H$ над полем $\mathbf{K}$ называется полным, если его линейная оболочка $span_{\mathbf{K}}\Psi$, состоящая из всевозможных конечных линейных комбинаций векторов из $\Psi$ над $\mathbf{K}$, всюду плотна в пространстве $H$. Положим

$$(3) \quad \psi(f) = \zeta = \sum_{k=1}^{l} b_k \eta(t_k).$$

Обозначим через $L^0\{g\}$ семейство всех векторов вида (2). В $L^0\{g\}$ существует $\mathbf{K}$-билинейный функционал:

$$(4) \quad (f_1, f_2) := \int_G \{f_1(x), f_2^T(x)\} Tr\mu(dx).$$

В силу леммы 34 отображение $\zeta = \psi(f)$ является $\mathbf{K}$-линейным топологическим изоморфизмом из $L^0\{g\}$ на $L^0\{\eta\}$. Когда, в частности, $X$ и $\mathsf{g}$ являются нормированными, тогда $\psi$ - это изометрия. Таким образом, $\psi$ имеет непрерывное продолжение до $\mathbf{K}$-линейного топологического изоморфизма из $L^2\{g\}$ на $L^2\{\eta\}$.

Если $A \in \mathcal{R}(G)$, тогда $Ch_A \in L^2(G, \mathcal{R}(G), \mu, \mathsf{g})$, так как $1 \in \mathsf{g}$. Но выполняется равенство $L^2\{g\} = L^2(G, \mathcal{R}(G), \mu, \mathsf{g})$ в силу полноты семейства $\{g(t,x) : t \in T\}$. Поэтому, $Ch_A \in L^2(G, \mathcal{R}(G), \mu, \mathsf{g})$. Положим $\xi(A) := \psi(Ch_A)$, тогда $\xi(A)$ - это ортогональная стохастическая мера со структурной функцией $\mu$ в силу леммы 37, так как

$$(5) \quad M\{\xi^T(A), \xi(B)\} = \int_G \{Ch_A^T(x), Ch_B(x)\}\mu(dx) = \mu(A \cap B)$$

для всяких подмножеств $A, B \in \mathcal{R}(G)$.

Пусть теперь

$$\gamma(t) := \int_G g(t,x)\xi(dx).\ \text{Поскольку}$$

$$M\{\eta^T(t), \xi(A)\} = \int_G \{g^T(t,x), Ch_A(x)\}\mu(dx)$$

и $M\{\xi^T(A), \eta(t)\} = \int_G \{Ch_A^T(x), g(t,x)\}\mu(dx)$ и $\psi$ является $\mathbf{K}$-линейным топологическим изоморфизмом, то

$$M\{\eta^T(t), \gamma(t)\} = M\{\gamma^T(t), \eta(t)\} = \int_G \{g^T(t,x), g(t,x)\}\mu(dx).$$

Поэтому, мы получаем
$M\{Ch_A(\eta(t)-\gamma(t))^T, Ch_A(\eta(t)-\gamma(t))\} =$
$M\{Ch_A\eta^T(t), Ch_A\eta(t)\} - M\{Ch_A\eta^T, Ch_A\gamma(t)\} - M\{Ch_A\gamma^T(t), Ch_A\eta(t)\}$
$+M\{Ch_A\gamma^T(t), Ch_A\gamma(t)\} = 0$
для любого подмножества $A \in \mathcal{R}(G)$, следовательно, формула 38(1) выполняется с вероятностью 1 для любого $t \in T$.

**39. Определение.** Пусть $\eta(t)$ является $\mathsf{g}$-значным стохастическим процессом или стохастической функцией такой, что для любого натурального числа $n \in \mathbf{N}$ и всяких $t_1, ..., t_n \in \mathbf{T}$ с $t, t+t_1, ..., t+t_n \in \mathbf{T}$ взаимное распределение для случайных векторов $\eta(t+t_1), ..., \eta(t+t_n)$ не зависит от $t$, где $\mathbf{T}$ - это аддитивная полугруппа. Тогда $\eta(t)$ называется стационарной стохастической функцией, где $P : \mathcal{R} \to \mathbf{K}$ - это вероятностная мера.

Предположим, что $\mathbf{T}$ - это равномерное пространство. $\mathsf{g}$-значная стохастическим функция $\eta(t) \in L^b(\Omega, \mathcal{R}, P, \mathbf{K}; \mathsf{g})$, $t \in \mathbf{T}$, $1 \le b < \infty$, называется средне-$b$-непрерывной в $t_0 \in \mathbf{T}$, если существует $\lim_{t\to t_0} \eta(t) = \eta(t_0)$ в смысле сходимости в пространстве $L^b(\Omega, \mathcal{R}, P, \mathbf{K}; \mathsf{g})$, когда $t$ стремится к $t_0$ в $\mathbf{T}$. В частности, для $b = 2$ мы имеем средне-квадратичную непрерывность и сходимость соответственно. Если $\eta(t)$ является средне-$b$-непрерывной во всякой точке в $\mathbf{T}$, то $\eta(t)$ является средне-$b$-непрерывной на $\mathbf{T}$.

**40.** Предположим, что алгебра $\mathsf{g}$ над полем комплексных $p$-адических чисел $\mathbf{C_p}$ имеет равномерность $\tau$, относительно которой она полна. Пусть $\mathsf{g}$ имеет $\mathbf{Q_p}$-линейное вложение в $c_0(\gamma, \mathbf{Q_p})$ для некоторого множества $\gamma$ такого, что равномерность нормы $n_u$ в $\mathsf{g}$ наследуемой из банахова пространства $c_0(\gamma, \mathbf{Q_p})$ со стандартной нормой $\| * \|$ не сильнее, чем $\tau$, то есть $n_u \subset \tau$, Более того, $\mathsf{g}$ всюду плотно в $(c_0(\gamma, \mathbf{Q_p}), \| * \|)$.

**41. Теорема.** *Пусть $\eta(t)$ - это стационарный среднеквадратически непрерывный стохастическим процесс со значениями в алгебре $\mathsf{g}$, $t \in \mathbf{T} = \mathbf{C_r}$, где $r$ и $p$ взаимно простые числа, $M\eta(t) = 0$, тогда существует ортогональная $\mathsf{g}$-значная стохастическая мера $\xi(A)$ на алгебре открыто-замкнутых подмножеств $\mathsf{Bco}(\mathbf{C_r})$ подчиненная $\eta(t)$ такая, что*

$$(1) \quad \eta(t) = \int_{\mathbf{C_r}} g(t,x)\xi(dx),$$

*где $g(t,x)$ - это $\mathbf{C_p}$-значный характер из аддитивной группы $(\mathbf{C_r}, +)$ в мультипликативную группу $(\mathbf{C_p}, \times)$. Между $L^2\{\eta\}$ и $L^2\{\mu\}$ существует $\mathbf{K}$-линейный топологический изоморфизм $\psi$ такой, что*

(2) $\psi(\eta(t)) = g(t,*)$, $\psi(\xi(A)) = Ch_A$, *если*
(3) $\zeta_j = \psi(f_j)$, *то*

$$\zeta_j = \int_{\mathbf{C_r}} f_j(x)\xi(dx) \text{ и}$$

$$M\{\zeta_1^T, \zeta_2\} = \int_{\mathbf{C_r}} \{f_1(x)^T, f_2(x)\}\mu(dx).$$

**42. Определение.** Формула 41(1) называется спектральным разложением стационарного стохастического процесса $t \mapsto \eta(t)$, $t \in \mathbf{T}$. Мера $\xi(A)$ называется стохастической спектральной мерой стационарного стохастического процесса $\eta(t)$.

**Доказательство теоремы 41.** Поскольку $\eta(t)$ - это стационарный стохастический процесс, тогда для любой непрерывной функции $f : \mathrm{g}^n \to \mathbf{K}$ среднее значение $Mf(\eta(t+t_1), ..., \eta(t+t_n))$ не зависит от $t$, где $n \in \mathbf{N}$ - натуральное число. Согласно условиям данной теоремы $\eta(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{R}, P, \mathbf{C_p}; \mathrm{g})$, следовательно, существуют средние значения (математические ожидания) $M\eta(t) = m$ и

(4) $M\{[\xi(t)-m]^T, [\xi(q)-m]\} = B(t-q) \in Lc(\mathrm{g})$ для любых $t, q \in \mathbf{C_r}$, где $m = 0$. Очевидно, что $B^T(t-q) = B(q-t)$ для любых $t, q \in \mathbf{C_r}$.

Рассмотрим теперь $\mathbf{C_p}$-значный характер для $(\mathbf{C_r}, +)$ как аддитивной группы, где $r = p'$, $p \neq p'$ - это различные простые числа. Для $p$-адических чисел

$$x = \sum_{k=N}^{\infty} x_k p^k,$$

где $x \in \mathbf{Q_p}$, $x_k \in \{0, 1, ..., p-1\}$, $N \in \mathbf{Z}$, $N = N(x)$, $x_N \neq 0$, $x_j = 0$ для любого $j < N$, мы положим как обычно в качестве порядка $ord_p(x) = N$ числа $x$, таким образом, норма такова: $|x|_{\mathbf{Q_p}} = p^{-N}$. Определим функцию

$$[x]_{\mathbf{Q_p}} := \sum_{k=N}^{-1} x_k p^k$$

при $N < 0$, $[x]_{\mathbf{Q_p}} = 0$ при $N \geq 0$ на поле $p$-адических чисел $\mathbf{Q_p}$. Поэтому, функция $[x]_{\mathbf{Q_p}}$ на $\mathbf{Q_p}$ рассматривается со значениями в отрезке $[0,1] \subset \mathbf{R}$.

Рассмотрим поле $\mathbf{C_r}$ как векторное пространство над полем $\mathbf{Q_r}$. Существует мультипликативная неархимедова норма $|*|_{\mathbf{C_r}} = |*|$ в $\mathbf{C_r}$, которая дает равномерность в этом поле. Возьмём эквивалентную равномерность даваемую нормой $|*|_r$, так что $|x|_r \in \{r^l : l \in \mathbf{Z}\} \cup \{0\}$ для любого $x \in \mathbf{C_r}$. Если $x \neq 0$, то положим $|x|_r := \min\{r^l : |x|_{\mathbf{C_r}} \leq r^l, l \in \mathbf{Z}\}$, $|0|_r = 0$, следовательно,

($i$) $|x|_r/r \leq |x|_{\mathbf{C_r}} \leq |x|_r$ для любого $x \in \mathbf{C_r}$. Таким образом, $\mathbf{C_r}$ - это топологическое векторное пространство над $\mathbf{Q_r}$ относительно $|x|_r$. Поскольку $\mathbf{C_r}$ является расширением поля $\mathbf{Q_r}$, тогда ограничение нормы $|*|_r$ на $\mathbf{Q_r}$ является $r$-адической нормой. На всём поле $\mathbf{C_r}$ эта норма $|*|_r$ в общем не обязана быть мультипликативной. Проверим, что она является неархимедовой нормой. Сначала мы отметим, что $|x|_r \geq 0$ для любого $x \in \mathbf{C_r}$, причём $|x|_r = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$ в силу ($i$). Если $x, y \in \mathbf{C_r}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, то $|x| = r^a$, $|y| = r^b$, $|x+y| = r^c$ с $a, b, c \in \mathbf{R}$, $c \leq \max(a,b)$, где $r \geq 2$ - это простое число. Тогда $|x|_r = r^A$, $|y|_r = r^B$, $|x+y|_r = r^C$, где $a \leq A$, $b \leq B$, $c \leq C$, $A, B, C \in \mathbf{Z}$ - это наименьшие целые числа, удовлетворяющие этим неравенствам. Поэтому, $C \le max(A,B)$, следовательно, $|x+y|_r \le \max(|x|_r, |y|_r)$ для любого $x, y \in \mathbf{C_r}$.

В силу теорем 5.13 и 5.16 [18] $\mathbf{Q_r}$-линейное пространство $(\mathbf{C_r}, |*|_r)$ изоморфно банахову пространству $c_0(\alpha, \mathbf{Q_r})$, где $\alpha$ - это множество, которое удобно считать ординалом в силу теоремы Цермело [20].

Положим

$$(x,y) := (x,y)_{\mathbf{Q_r}} := \sum_{j \in \alpha} x_j y_j$$

для любых $x, y \in \mathbf{C_r}$, $x = (x_j : j \in \alpha, x_j \in \mathbf{Q_r})$. Этот ряд $(x,y)$ сходится в $\mathbf{Q_r}$, так как для любого $\epsilon > 0$ множество $\{j : |x_j|_r \ge \epsilon\}$ конечно.

Если $X$ - это полное локально $\mathbf{C_r}$-выпуклое пространство, тогда оно представимо в виде проективного предела банаховых пространств $V_u := X/Y_u$ над полем $\mathbf{C_r}$, где $Y_u := \{x \in X : u(x) = 0\}$, $u$ - это преднорма на $X$, $u \in \mathcal{S}$ [17]. Каждое $V_u$ можно снабдить структурой банахова пространства над полем $\mathbf{Q_r}$. Поэтому, $X$ можно снабдить структурой $X_r$ полного локально $\mathbf{Q_r}$-выпуклого пространства с топологией $\tau_r$.

Рассмотрим случай такого $X$, когда $X_r$ вложено в $c_0(\beta, \mathbf{Q_r})$ для некоторого $\beta \ge \alpha$ и топология $n_r$ нормы $|*|_r$ в $X_r$ наследуемая из $c_0(\beta, \mathbf{Q_r})$ такова, что $\tau_r \supset n_r$. Тогда всякий $\mathbf{Q_r}$-линейный непрерывный функционал на $(c_0(\beta, \mathbf{C_r}), |*|_r)$ также непрерывен на $(X_r, \tau_r)$.

Определим также характер со значениями в $\mathbf{C_p}$ для $(X, +)$ как аддитивной группы, $r \ne p$. Положим

$$\chi_{r,p;s}(x) = \epsilon^{[(s,z)_{\mathbf{Q_r}}]_{\mathbf{Q_r}}/z},$$

где $\epsilon = 1^z$ - это корень из единицы в $\mathbf{C_p}$, $z = r^{ord_r[(s,z)_{\mathbf{Q_r}}]_{\mathbf{Q_r}}}$, $s, z \in X_r$ или мы можем рассмотреть $s, z$ также как элементы в $X$ (смотри выше).

Для тесной меры $\mu : \mathcal{R}(X) \to Lc(\mathsf{g})$ или $\mu : \mathcal{R}(X) \to \mathbf{C_p}$ характеристический функционал $\hat{\mu}$ дается формулой:

$$\hat{\mu}(s) := \int_X \chi_{r,p;s}(z)\mu(dz),$$

где $s \in X_r$, пространство $X$ задается над полем $\mathbf{C_r}$.

В общем характеристический функционал меры $\mu : \mathcal{R}(G) \to Lc(\mathsf{g})$ или $\mu : \mathcal{R}(G) \to \mathbf{C_p}$ определен на пространстве $C^0(G, \mathbf{C_r})$ непрерывных функций $f : G \to \mathbf{C_r}$

$$\hat{\mu}(f) := \int_G \chi_{r,p;1}(f(z))\mu(dz),$$

где $1 \in \mathbf{C_r}$, $G$ - это вполне несвязное топологическое хаусдорфово пространство с покрывающим кольцом $\mathcal{R}(G)$.

В силу теорем 2.21 и 2.30 [15], и теоремы 22 и формулы (4) выше существует $Lc(\mathsf{g})$-значная мера $\mu$ на алгебре $\mathsf{Bco}(\mathbf{C_r})$ открыто-замкнутых подмножеств такая, что

$$B(t) = \int_{\mathbf{C_r}} \chi_{r,p;1}(ty)\mu(dy).$$

Функции $g(t,y) := \chi_{r,p;1}(ty)$ являются непрерывными и равномерно ограниченными. Поскольку $|g(t,y)|_{C_p} = 1$ для любых $t, y \in \mathbf{C_r}$, то $g(t,y) \in L^2\{\mu\}$.

В силу теорема Капланского А.4 [19] и теоремы 14 выше семейство функций $\{g(t,y): \ t,y \in \mathbf{C_r}\}$ полно в $L^2(\mathsf{g}, \mathsf{Bco}(\mathsf{g}), \mu, Lc(\mathsf{g}); \mathbf{C_p})$. Таким образом, утверждения $41(1-3)$ вытекают из теоремы 38.

**Заключение**

Выведенные выше формулы для спектральных разложений стохастических процессов со значениями в алгебрах и полях с неархимедовыми нормированиями можно использовать для решения дифференциальных уравнений для стохастических процессов и случайных функций как векторно-значных, так и скалярных. Стохастические дифференциальные уравнения возникают в неархимедовой квантовой механике и квантовой теории поля, математической биологии и психологии. Они могут быть также полезны в экономических приложениях, когда появляются расходящиеся интегралы над полем комплексных чисел, но над полями с неархимедовыми нормированиями их аналоги сходятся.

## Список литературы

[1] Aref'eva I.Ya., Dragovich B., Volovich I.V. On the $p$-adic summability of the anharmonic oscillator // Phys. Lett. V. B200, P. 512-514 (1988).

[2] Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. Наука, Москва (1985).

[3] Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И. $p$-адический анализ и математическая физика. Физ.-мат. лит., Москва (1994).

[4] Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Наука, Москва (1977).

[5] Dalecky Yu.L., Fomin S.V. Measures and differential equations in infinite-dimensional spaces. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1991).

[6] Дйордевич Г.С., Драгович Б. $p$-адический и адельный гармонический осциллятор с частотой зависящей от времени // Теор. и матем. физ. Т. 124: 2, С. 1059-1067 (2000).

[7] Koblitz N. $p$-adic numbers, $p$-adic analysis and zeta functions. Springer-Verlag, New York, 1977.

[8] Людковский С.В. Спектральные функции стохастических процессов над бесконечными полями с неархимедовыми нормированиями // Вестник Тверского государственного университета. Серия «Прикладная математика», № 28: 3 (18), С. 15-33 (2010).

[9] Ludkovsky S.V. Topological transformation groups of manifolds over non-Archimedean fields, representations and quasi-invariant measures // J. Mathem. Sci. I 147: 3, P. 6703-6846 (2008); II 150: 4, P. 2123-2223 (2008).

[10] Людковский С.В. Стохастические процессы на группах диффеоморфизмов и петель действительных, комплексных и неархимедовых многообразий // Фундам. и Прикл. Матем. Т. 7: 4, С. 1091-1105 (2001).

[11] Ludkovsky S.V. Stochastic processes on non-Archimedean Banach spaces // Int. J. of Math. and Math. Sci. V. 2003: 21, P. 1341-1363 (2003).

[12] Ludkovsky S.V. Stochastic processes on totally disconnected topological groups // Int. J. of Math. and Math. Sci. V. 2003: 48, P. 3067-3089 (2003).

[13] Ludkovsky S.V. Stochastic processes and antiderivational equations on non-Archimedean manifolds // Int. J. of Math. and Math. Sci. V. 31: 1, P. 1633-1651 (2004).

[14] Ludkovsky S.V. Non-Archimedean valued quasi-invariant descending at infinity measures // Int. J. of Math. and Math. Sci. V. 2005: 23, P. 3799-3817 (2005).

[15] Ludkovsky S.V. Quasi-invariant and pseudo-differentiable measures on non-Archimedean Banach spaces with values in non-Archimedean fields // J. Math. Sci. 2004. V. 122: 1. P. 2949-2983.

[16] Ludkovsky S., Khrennikov A. Stochastic processes on non-Archimedean spaces with values in non-Archimedean fields // Markov Processes and Related Fields. V. 9: 1, P. 131-162 (2003).

[17] Narici L., Beckenstein E. Topological vector spaces. Marcel Dekker Inc., New York (1985).

[18] A.C.M. van Rooij. Non-Archimedean functional analysis. Marcel Dekker Inc., New York (1978).

[19] Schikhof W.H. Ultrametric calculus. Cambidge University Press, Cambridge (1984).

[20] Энгелькинг Р. Общая топология. Мир, Москва (1986).

[21] Jang Y. Non-archimedean quantum mechanics. Tohoku Math. Publ. V. 10 (1998).