УДК 519.224.24

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ U-СТАТИСТИК: ОЦЕНКА ФУНКЦИЙ КОНЦЕНТРАЦИИ

Зубайраев Т.А.
Кафедра математической статистики
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 14.09.2011, после переработки 28.09.2011.

Основной результат работы — получение оценки функции концентрации U-статистики, имеющей степенной порядок зависимости от собственных значений оператора, ассоциированного с U-статистикой. Результат был получен путем использования новых условий невырожденности аналогичных примененным в [1]: наши условия невырожденности опираются на некоторое условие на детерминант матрицы, составленной из скалярных произведений случайных сумм векторов.

Our main result here is bounds for concentration function of U-statistic, which depends on eigenvalues of Hilbert-Schmidt operator as a power function. The result were obtained using non-degeneracy conditions similar to those used in [1]: our new conditions are based on some conditions on determinant of matrix with elements equal to scalar product of random sums.

Ключевые слова: U-статистики, вырожденные U-статистики, симметричные статистики, функция концентрации.
Keywords: U-statistics, degenerate U-statistics, symmetric statistics, concentration function.

Введение

Пусть $X, \bar{X}, X_1, ..., X_N$ - независимые, одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения в произвольном измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$. Пусть ϕ_1: $\mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ и ϕ: $\mathfrak{X}^2 \to \mathbb{R}$ измеримые функции, принимающие вещественные значения. Предположим, что ϕ симметрична, т.е. $\phi(x, y) = \phi(y, x)$, для любых $x, y \in \mathfrak{X}$. Рассмотрим U-статистику

$$T = \frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \phi(X_i, X_j) + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} \phi_1(X_i),$$

предполагая, что

$$\mathbb{E}\phi_1(X) = 0, \mathbb{E}\phi(x, X) = 0, \text{ для всех } x \in \mathfrak{X},$$

$$\mathbb{E}\phi^2(x,X)<\infty, \mathbb{E}\phi_1^2(X)<\infty.$$

Пусть $\mathbb{Q}: L^2 \to L^2$, оператор Гильберта-Шмидта, ассоциированный с ядром ϕ и определяемый формулой

$$\mathbb{Q}f(x)=\int_{\mathfrak{X}}\phi(x,y)f(y)\mu(dy)=\mathbb{E}\phi(x,X)f(X),$$

$q_1, q_2...$ - его собственные значения. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $|q_1| \geqslant |q_2| \geqslant \ldots$.

Пусть $\{e_j : j \geqslant 1\}$ полная ортонормированная система, составленная из собственных функций оператора $\mathbb{Q}$, соответствующих собственным значениям $q_1, q_2....$ Тогда

$$\sigma^2=\mathbb{E}\phi^2(\bar{X},X)=\sum_{j\geqslant 1}q_j^2\ ,\ \phi(x,y)=\sum_{j\geqslant 1}q_je_j(x)e_j(y), \tag{1}$$

т.к. $\mathbb{Q}$ - оператор Гильберта-Шмидта и ядро ϕ вырождено. Ряды в (1) сходятся в $L^2(\mathfrak{X}^2, \mathfrak{B}^2, \mu\times\mu)$. Рассмотрим подпространство $L^2(\phi,\phi_1) \subset L^2(\mathfrak{X}^2, \mathfrak{B}^2, \mu\times\mu)$, образованное ϕ_1 и собственными функциями e_j, которые соответствуют ненулевым собственным значениям q_j. Добавляя, если необходимо, собственную функцию $e_0 : \mathbb{Q}e_0 = 0$, мы можем предположить, что функции $e_0, e_1, \ldots$ образуют ортонормированный базис в L^2 (ϕ,ϕ_1). Таким образом, справедливо следующее разложение

$$\phi_1(x)=\sum_{j\geqslant 0}a_je_j(x) \text{ в } L_2\ ,\ \beta_2=\mathbb{E}\phi_1^2(X)=\sum_{j\geqslant 0}a_j^2, \tag{2}$$

где $a_j = \mathbb{E}\phi_1(X)e_j(X)$ и $\mathbb{E}e_j(X) = 0$, для любого j. Следовательно, система $(e_j(X))_{j\geqslant 0}$ является ортонормированной системой случайных величин с нулевым средним.

Гильбертово пространство $\ell_2 \subset \mathbb{R}^\infty$ состоит из элементов $x = (x_1, x_2 \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$, таких что $\mid x \mid < \infty$, где

$$\mid x\mid^2 =_{def} \langle x,x\rangle\ ,\ \langle x,y\rangle=\sum_{j\geqslant 0}x_jy_j.$$

Рассмотрим случайный вектор:

$$\mathbf{X}=_{def}(e_0(X),e_1(X),e_2(X),\ldots), \tag{3}$$

который принимает значения в $\mathbb{R}^\infty$. Поскольку $(e_j(X))_{j\geqslant 0}$ - система некоррелированных случайных величин с единичными дисперсиями, случайный вектор $\mathbf{X}$ имеет нулевое среднее и $cov(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij}- дельта-функция. В силу (1) и (2), справедливы равенства

$$\phi(X,\bar{X})=\langle\mathbb{Q}\mathbf{X},\bar{\mathbf{X}}\rangle,\ \phi_1(X)=\langle a,\mathbf{X}\rangle, \tag{4}$$

где определяем $\mathbb{Q}x = (0, q_1x_1, q_2x_2, \ldots)$ для $x \in \mathbb{R}^\infty$ и $a = (a_j)_{j\geqslant 0} \in \mathbb{R}^\infty$. Равенства в (4) позволяют нам в качестве измеримого пространства $\mathfrak{X}$ взять пространство $\mathbb{R}^\infty$. Пусть X - случайный вектор, принимающий значения в $\mathbb{R}^\infty$ с нулевым средним и $cov(X_i, X_j) = \delta_{ij}$ и такой, что

$$\phi(X,\bar{X})=\langle\mathbb{Q}X,\bar{X}\rangle,\ \phi_1(X)=\langle a,X\rangle. \tag{5}$$

Предположим, не ограничивая общности рассуждений, что ядра $\phi(x,y)$ и $\phi_1(x)$ - линейные функции по каждому из своих аргументов (см.[2]).

Введем ряд обозначений:

$$\beta_s = \mathbb{E}|\phi_1(X)|^s, \gamma_s = \mathbb{E}|\phi(X,\bar{X})|^s,$$

$$\sigma^2 = \gamma_2, \gamma_{s,r} = \mathbb{E}(\mathbb{E}\{|\phi(X,\bar{X})|^s|X\})^r$$

также предположим, что

$$\beta_2 < \infty, 0 < \sigma^2 < \infty.$$

Тогда дисперсию T можно переписать в виде

$$\mathbb{E}T^2 = \beta_2 + \frac{N-1}{2N}\sigma^2.$$

Статистика T является вырожденной по той причине, что квадратическая ее часть не является асимптотически несмещенной из-за условия $\sigma^2 > 0$ и, следовательно, статистика T не является асимптотически нормальной. Более точно асимптотическое распределение T задается распределением случайной величины

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_{j\geqslant 1} q_j(\eta_j^2 - 1) + \sum_{j\geqslant 0} a_j\eta_j, \qquad (6)$$

где η_j - последовательность независимых, одинаково распределенных стандартных нормальных случайных величин, $a_0, a_1, \dots$ - последовательность суммируемых в квадрате весов и $|q_1| \geqslant |q_2| \geqslant \dots$ - собственные значения оператора Гильберта-Шмидта, например $\mathbb{Q}$, ассоциированного с ядром ϕ.

Рассмотрим U-статистику T_* следующего вида

$$T_* = \sum_{1\leqslant i<k\leqslant N} \phi(X_j, X_k) + f_1(X_1,\dots,X_M) + f_2(X_{M+1},\dots,X_N), 1 \leqslant M \leqslant N/2,$$

где $f_1 = f_1(X_1,\dots,X_M)$ - произвольная статистика, зависящая только от $X_1,\dots,X_M$, $f_2 = f_2(X_{M+1},\dots,X_N)$ также произвольная статистика, но не являющаяся зависимой от $X_1,\dots,X_M$. Заметим, что класс статистик T_* является более общим, чем класс статистик T.

Введем ряд обозначений. Пусть $c, c_1, \dots$ - константы. В случае, если константа зависит, например от s, мы будем писать $c(s) = c_s$. Будем писать $A \ll B$ или $A \ll_s B$, если $A \leqslant cB$ или $A \leqslant c_s B$, соответственно. Далее, $A \asymp B$ означает, что $A \ll B \ll A$.

Для статистики T_* определим функцию концентрации

$$Q(T_*;\lambda) = \sup_x \mathbb{P}\{x \leqslant T_* \leqslant x+\lambda\}, \lambda \geqslant 0. \qquad (7)$$

Сформулируем теорему с оценкой функции концентрации (7).

Теорема 1. Пусть $q_9 \neq 0$ и $m_0 \asymp |q_1 \dots q_9|^{-3}p^{-1}(|q_1\dots q_9|^{-3}p^{-1}\gamma_{2,3/2} + \gamma_3), p \asymp c(s)$. Тогда

$$Q(T_*;\lambda) \ll (|q_9|^{-9} + max\{1, |q_9|^{-18}\})\frac{\max\{\lambda; m_0\}}{M}.$$

В данной теореме получена оценка, которая имеет порядок зависимости $O(|q_9|^{-\alpha})$ от собственных значений $|q_1| \geqslant |q_2| \geqslant \ldots$ оператора $\mathbb{Q}$, ассоциированного с ядром ϕ. Результат отличается от полученного в работе [2], где оценка имеет порядок зависимости $O(\exp\{-\alpha q_9\})$. Улучшить порядок оценки удалось, заменив условия невырожденности, использованные в [2], на сформулированные в (9). В доказательстве теоремы было использовано неравенство для функции концентрации, в правой части которого содержится интеграл от характеристической функции статистики. Данный интеграл был оценен в лемме 8 с использованием мультипликативного неравенства из леммы 7 и теоремы 3, в которой мы получили оценку характеристической функции U-статистики.

Рассмотрим функции распределения

$$F(x) = \mathbb{P}\{T \leqslant x\}, F_0(x) = \mathbb{P}\{T_0 \leqslant x\},$$

$$\Delta_N = \sup_x |\Delta_N(x)|, \Delta_N(x) = F(x) - F_0(x) - F_1(x),$$

$F_1(x)$ - поправка Эджворта. Заметим, что $F_1 \equiv 0$, если $\phi_1 = 0$ или равенства

$$\mathbb{E}\phi_1^3(X) = \mathbb{E}\phi_1^2(X)\phi(X,x) = \mathbb{E}\phi_1(X)\phi^2(X,x) = \mathbb{E}\phi^3(X,x) = 0, \tag{8}$$

справедливы для всех $x \in \mathfrak{X}$. С помощью использованной в данной работе техники может быть получен результат для оценки аппроксимации функции распределения U-статистики, который также имеет порядок зависимости от собственных значений оператора $O(|q_9|^{-\alpha})$. Данный результат можно сформулировать в виде теоремы, доказательство которой можно найти в [4].

Теорема 2. (i) Пусть $s \geqslant 13$,
$m_0 \asymp |q_1 \ldots |q_9|^{-3} p^{-1}(|q_1 \ldots q_9|^{-3} p^{-1}\gamma_{2,3/2} + \gamma_3), p \asymp c(s)$. Тогда

$$\Delta_N \ll \frac{m_0(|q_9|^{-9} + max\{1, |q_9|^{-18}\})}{cN} + N^{-1}(\beta_3^2 + \sigma^2\gamma_{2,2})(\frac{1}{|q_{13}|^{13}} + \frac{1}{|q_{13}|^6}) +$$

$$+\frac{|q_9|^{-9}}{cN} \cdot (\beta_4 + \beta_3^2 + \sigma^2 + \gamma_3 + \sigma^2\gamma_3 + \gamma_{2,2} + \sigma^2\gamma_{2,2}),$$

(ii) Пусть выполнено условие (8) и $s \geqslant 9$. Тогда

$$\Delta_N \ll \frac{m_0(|q_9|^{-9} + max\{1, |q_9|^{-18}\})}{cN} + N^{-1}(\beta_3^2 + \sigma^2\gamma_{2,2})(\frac{1}{|q_9|^9} + \frac{1}{|q_9|^6}) +$$

$$+\frac{|q_9|^{-9}}{cN} \cdot (\beta_4 + \sigma^2 + \gamma_3 + \gamma_{2,2}).$$

1. Вспомогательные результаты

Рассмотрим вектор $G = (\eta_0, \eta_1 \ldots)$ со значениями в $\mathbb{R}^\infty$, где $\eta_0, \eta_1 \ldots$ - стандартные нормальные случайные переменные. Сформулируем лемму, в которой получены равенства для моментов детерминантов случайных матриц, составленных из скалярных произведений вида $\langle \mathbb{Q}G_i, G_j \rangle$. Аналог данной леммы доказан в работе [1] для матриц, составленных из скалярных произведений $\langle G_i, G_j \rangle$ и гауссовских векторов с параметрами $(0, C)$, где C - матрица ковариаций.

Лемма 1. *Пусть $G_1, \ldots, G_s, G'_1, \ldots, G'_s$ - независимые, одинаково распределенные случайные величины в гильбертовом пространстве H, $G = (\eta_0, \eta_1 \ldots)$. Пусть $|q_1| \geqslant |q_2| \geqslant \ldots$ - собственные значения оператора Гильберта-Шмидта $\mathbb{Q}$. $W = (det\mathbb{A})^2$, где $\mathbb{A}(G) = \{a_{ij}(G)\}_{i,j=1}^s$, $a_{ij}(G) = \phi(G_i, G'_j) = \langle \mathbb{Q}G_i, G_j\rangle$.*

Тогда,

$$\mathbb{E}W = (s!)^2 \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_s<\infty} (q_{i_1} \ldots q_{i_s})^2,$$

$$(\mathbb{E}W^2)^{1/2} \leqslant c(s)\mathbb{E}W.$$

Сформулируем ***условия невырожденности:***

Будем считать, что для некоторого случайного вектора Z, ядра ϕ и параметров c, c_1, s и p выполнены условия невырожденности, если

$$\mathbb{P}\{W(\bar{Z}) > \delta\} \geqslant p, \delta = q_1^2 \ldots q_9^2, \tag{9}$$

$$\mathbb{P}\{|\phi(Z_i, \bar{Z}_j)| \leqslant c\} \geqslant c_1,\ 1 \leqslant i, j \leqslant s,$$

$$\text{где } W(\bar{Z}) = (detA)^2, A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^s, a_{ij} = \phi(Z_i, \bar{Z}_j),$$

$$Z_i, \bar{Z}_j - \text{ независимые копии вектора } Z.$$

При этом, параметр p мал, а параметр c_1 близок к единице. Множество векторов Z, для которых выполнены условия невырожденности, обозначим $\mathcal{N}(\delta, p)$.

Отметим, что гауссовский вектор G заведомо удовлетворяет описанным выше условиям невырожденности. Пусть ковариации и средние векторов G и X совпадают, тогда

$$\mathbb{E}\phi_1(G) = \mathbb{E}\phi(G, x) = 0, \mathbb{E}\phi_1^2(G) = \mathbb{E}\phi_1^2(X),$$

$$\mathbb{E}\phi_1(G)\phi(G, x) = \mathbb{E}\phi_1(X)\phi(X, x),$$

$$\mathbb{E}\phi(G, x)\phi(G, y) = \mathbb{E}\phi(X, x)\phi(X, y).$$

Сформулируем лемму, результат которой говорит нам о том, что с ростом n выполнение условий невырожденности для суммы слагаемых эквивалентно выполнению условий невырожденности для гауссовского вектора.

Лемма 2. *Пусть случайный гауссовский вектор $G \in \mathcal{N}(4q_1^2 \ldots q_9^2, 1-p)$ и $\mathbb{P}\{W(\bar{G}) > 4q_1^2 \ldots q_9^2\} \geqslant 1-p$. Тогда при $m \geqslant c_s|q_1 \ldots q_9|^{-3}p^{-1}(|q_1 \ldots q_9|^{-3}p^{-1}\gamma_{2,3/2}+\gamma_3)$ случайная сумма $S_m \in \mathcal{N}(q_1^2 \ldots q_9^2, 1-2p)$, где $S_m = m^{-1/2}(X_1 + \ldots + X_m)$.*

Далее, необходимо оценить характеристическую функцию статистики T_*.

Сформулируем лемму, которая позволит ограничить характеристическую функцию статистики T_* характеристической функцией специального вида, зависящей от дискретных случайных величин. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...$ - случайные, одинаково распределенные величины Радемахера, т.е $\mathbb{P}\{\varepsilon_j = -1\} = \mathbb{P}\{\varepsilon_j = 1\} = 1/2$. Мы предполагаем, что все случайные величины и случайные вектора независимы, если обратное не вытекает из контекста. Пусть $m \in \mathbb{N}$, определим случайную величину

$\vartheta_1 = \varepsilon_1, ..., \vartheta_m = \varepsilon_m$. Аналогично, величины $\vartheta_j, j > m$ определены следующим образом:

$$\vartheta_j = \varepsilon_l \text{ для } j \in I(l) =_{def} (ml - m, ml],$$

Для натуральных чисел m и s мы введем неотрицательные числа:

$$L = [M/(2ms)], \quad K = sL \text{ и } K_0 = mK = smL.$$

Лемма 3. *Пусть $m, s \in \mathbb{N}$. Тогда статистика T_*, определенная в (7), удовлетворяет*

$$|\mathbb{E}exp\{itT_*\}| \leqslant \mathbb{E}|\mathbb{E}_\vartheta exp\{itT^\vartheta\}|, \tag{10}$$

где $\mathbb{E}_\vartheta = \mathbb{E}_{\vartheta_j, 1 \leqslant j \leqslant 3K_0}$

$$T^\vartheta = \sum_{1 \leqslant j \leqslant 3K_0} \vartheta_j \vartheta_k a_{jk} + F_1 + F_2, \; a_{jk} =_{def} 1/4\phi(\tilde{X}_j, \tilde{X}_k),$$

номер K_0 определен как $K_0 = mK = smL$ и $F_1(F_2)$ является функцией от $\vartheta_j, j \in [1, K_0]$, $(\vartheta_j, j \in (K_0, 3K_0])$.

Доказательство данной леммы представлено в работе [2]. В дальнейшем лемма 3 нам понадобится для оценки интегралов в лемме 10. Используя лемму 3, мы можем доказать лемму 4.

Лемма 4. *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Обозначим:*

$$Y = (2m)^{-1/2} \sum_{j=1}^{m} \tilde{X}_j, \quad \Lambda = \sum_{j=1}^{K} \tilde{\varepsilon}_j Y_j,$$

где $Y_1, Y_2, ...$ - независимые копии Y и $K{=}sL$. Тогда мы имеем

$$|\mathbb{E}\{tT_*\}|^2 \leqslant \mathbb{E}exp\{2^{-1}itm\phi(\Lambda, \bar{\Lambda}\}. \tag{11}$$

Определим $\tau, \tau_1, \tau_2 \ldots$ как независимые копии симметричной случайной величины τ с неотрицательной характеристической функцией, такие, что выполнены условия:

$$1 \leqslant \mathbb{E}\tau^2 \leqslant 2 \;, \; \mathbb{P}\{|\tau| \leqslant 2\} = 1. \tag{12}$$

В сформулированной ниже лемме 5 мы получим оценку сверху характеристической функции в правой части неравенства (11).

Лемма 5. *Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $L \in \mathbb{Z}_+$. Предположим, что вектор $Y \in \mathcal{N}((q_1 \ldots q_9)^2, p)$ принимает значения в R^∞. Пусть, далее,*

$$\Lambda = \sum_{j=1}^{sL} \tau_j Y_j, \; \bar{\Lambda} = \sum_{j=1}^{sL} \bar{\tau}_j \bar{Y}_j, \; q = [pL/4],$$

где Y_j и $\bar{Y}_j$ являются независимыми копиями Y. Тогда

$$\mathbb{E}e\{t\phi(\Lambda, \bar{\Lambda}\} \leqslant c_d(s)(pL)^{-d} + \sup_{\mathbb{A}} \mathbb{E}e\{t\langle \mathbb{A}U, V\rangle\}, \; t \in \mathbb{R}, \; d \geqslant 0,$$

где $\sup_{\mathbb{A}}$ обозначает супремум по всем неслучайным матрицам $\mathbb{A}$ размера $s \times s$ таких, что выполнено неравенство $(detA)^2 > q_1^2 \ldots q_9^2$.
U и V - независимые вектора в $\mathbb{R}^s$, являющиеся суммами n независимых копий $W = (\tau_1, \ldots, \tau_s)$.

Доказательство данной леммы аналогично доказательству леммы 6.5 из [2]. Леммы 4 и 5 позволят нам получить оценку характеристической функции статистики T_*.

Для оценки второго слагаемого в неравенстве из леммы 5 нам потребуется лемма 6, ее доказательство можно найти в [1]. Полученная оценка содержит детерминант матрицы в правой части неравенства. Данный факт позволяет использовать собственные значения оператора $\mathbb{Q}$ для оценки характеристической функции.

Лемма 6. *Пусть A невырожденная матрица размера $s \times s$. Пусть $X \in \mathbb{R}^s$- случайный вектор с ковариационной матрицей C. Предположим, что существует константа c_s такая , что*

$$\mathbb{P}\{|X| \leqslant c_s\} = 1,\ |A| \leqslant c_s,\ |C^{-1}| \leqslant c_s. \tag{13}$$

Пусть U и V независимые случайные векторы, являющиеся суммами n независимых копий X. Тогда

$$|\mathbb{E}e\{t\langle AU, V\rangle\}| \leqslant c(s)|detA|^{-1}\mathcal{M}^{2s}(t;N) \text{ для } |t| > 0,$$

$$\text{где } \mathcal{M}(t;N) = 1/\sqrt{|t|N} + \sqrt{|t|} \text{ для } |t| > 0.$$

Используя леммы 3-6 мы можем получить оценку для характеристической функции, которая сформулирована в виде теоремы 3.

Теорема 3. Пусть $m \in \mathbb{N}$, предположим, что сумма $Y = (2m)^{-1/2}(\tilde{X}_1 + \ldots + \tilde{X}_m) \in \mathcal{N}((q_1 \ldots q_9)^2, p)$. Тогда для любой статистики T_* справедливо неравенство:

$$|\mathbb{E}e\{tT_*\}| \ll_s \frac{1}{|q_9|^9}\mathcal{M}^{2s}(tm; pM/m).$$

Доказательство. Предположим, что $pM \geqslant c_s m$ с достаточно большой константой c_s. Иначе $pM \leqslant c_s m$ и результат будет следовать из простого неравенства $|\mathbb{E}e\{tT_*\}| \leqslant 1$. Вспомним ряд обозначений, введенных ранее:

$$L = [M/(2ms)], \quad K = sL \text{ и } K_0 = mK = smL.$$

Далее,

$$L \asymp_s K \asymp_s K_0/m \asymp_s M/m \asymp q/p,\ q = [pL/4]. \tag{14}$$

Лемма 5 дает нам оценку

$$|\mathbb{E}\{tT_*\}|^2 \leqslant \mathbb{E}e\{\beta\phi(\Lambda, \bar{\Lambda})\},\ \Lambda, \bar{\Lambda} \text{ определены в Лемме 5.} \tag{15}$$

Оценим детерминант матрицы A в правой части неравенства для характеристической функции из Леммы 6:

$$|detA|^2 > q_1^2 \ldots q_9^2 \sim |detA| > |q_1| \ldots |q_9| \sim |detA|^{-1} < \frac{1}{|q_1| \ldots |q_9|} < \frac{1}{|q_9|^9}.$$

С помощью приведенной цепочки неравенств мы получаем оценку

$$\mathbb{E}e\{\beta\phi(\Lambda,\bar{\Lambda})\} \leqslant c_d(s)(pL)^{-d} + \sup_{\mathbb{A}} \mathbb{E}e\{\beta\langle \mathbb{A}U, V\rangle\}, \tag{16}$$

$$\mathbb{E}e\{\beta\langle AU, V\rangle\} \leqslant c(s)\frac{1}{|q_9|^9}\mathcal{M}^{2s}(\beta; q). \tag{17}$$

Собирая оценки (15)-(17) и подставляя $\beta = tm/2$, используем (14) и получаем оценку

$$\mathbb{E}e\{tT_*\} \ll_{d,s} (pM/m)^{-d/2} + \frac{1}{|q_9|^9}\mathcal{M}^{2s}(tm; pM/m). \tag{18}$$

Известно, что $\inf_x \mathcal{M}^s(x; pM/m) = (pM/m)^{-s/4}$. Таким образом (18) доказывает желаемый результат при выборе $d = s/2$.

□

Введем обозначение:

$$\psi(t) = |\mathbb{E}_\vartheta e\{tT^\vartheta\}|. \tag{19}$$

В сформулированной ниже лемме приведено мультипликативное неравенство для характеристической функции T^ϑ. Данное неравенство позволит получить оценку порядка $\mathcal{O}(N^{-1})$ для интеграла характеристической функции $U-$статистики. Похожий результат сформулирован и доказан в [2]

Лемма 7. *Пусть $d \geqslant 0$ и $s \in \mathbb{N}$. Предположим, что $Y = (2m)^{-1}\sum_{k=1}^{k=m}\tilde{X}_k \in \mathcal{N}((q_1\ldots q_9)^2, p)$. Тогда существуют константы $c_1(s,d)$ и $c_2(s,d)$ такие, что событие*

$$D = \{\psi(t-\gamma)\psi(t+\gamma) \leqslant c_1(s,d)\frac{1}{|q_9|^9}\mathcal{M}^s(\gamma m; pM/m)\}, \tag{20}$$

удовлетворяет условию:

$$\mathbb{P}\{D\} \geqslant 1 - c_2(s,d)(pM/m)^{-d}. \tag{21}$$

Для $A \geqslant t_0, t_1 \geqslant 0$ определим интегралы:

$$I_0 = \int_{-t_1}^{t_1} |\hat{\Psi}(t)|dt, I_1 = \int_{t_0 \leqslant |t| \leqslant A} |\hat{\Psi}(t)|\frac{dt}{|t|},$$

где $\hat{\Psi} = \int_{\mathbb{R}} e\{tx\}d\Psi(x)$ преобразование Фурье-Стилтьеса функции распределения $\Psi(x) = \mathbb{P}\{T_* \leqslant x\}$. Оценка для данных интегралов получена в следующей лемме, которая доказывается аналогично лемме 3.3 в [2].

Лемма 8. *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Предположим, что случайный вектор $Y = (2m)^{-1/2}(\tilde{X}_1 + \ldots + \tilde{X_m}) \in \mathcal{N}((q_1\ldots q_9)^2, p)$ и $s \geqslant 9$. Введем ряд обозначений и условий:*

$$k = \frac{pM}{m}, t_0 = \frac{c_0(s)}{m}k^{-1+2/s}, t_1 = \frac{c_1(s)}{m}k^{-1/2},$$

$$\frac{c_2(s)}{m} \leqslant A \leqslant \frac{c_3(s)}{m},$$

где $c_j(s), 0 \leqslant j \leqslant 3$ *- некоторые положительные константы.*

Тогда

$$I_0 \ll_s |q_9|^{-9}(pM)^{-1}, I_1 \ll_s max\{1, |q_9|^{-18}\}m(pM)^{-1}. \tag{22}$$

2. Оценка функций концентрации

В данном разделе будет рассмотрена статистика T_*, которую мы определили в (7). Для функции концентрации данной статистики получена оценка, которая сформулирована в следующей теореме.

Теорема 4. Пусть $s \geqslant 9$ и $\lambda \geqslant 0$. Тогда для статистики T_* и функции концентрации справедливы следующие три утверждения:

(i) Пусть $q_9 \neq 0$, тогда

$$Q(T_*;\lambda) \ll_s (|q_9|^{-9} + max\{1, |q_9|^{-18}\})\frac{\max\{\lambda; m_0\}}{M},$$

$$m \asymp |q_1 \dots q_9|^{-3}p^{-1}(|q_1 \dots q_9|^{-3}p^{-1}\gamma_{2,3/2} + \gamma_3), p \asymp c(s).$$

(ii) Пусть гауссовский вектор $G \in \mathcal{N}((2q_1 \dots q_9)^2, p)$, тогда

$$Q(T_*;\lambda) \ll_s (|q_9|^{-9} + max\{1, |q_9|^{-18}\})\frac{\max\{\lambda; m_0\}}{pM},$$

$$m \asymp |q_1 \dots q_9|^{-3}p^{-1}(|q_1 \dots q_9|^{-3}p^{-1}\gamma_{2,3/2} + \gamma_3).$$

(iii) Пусть $m \in \mathbb{N}$,случайный вектор $Y = (2m)^{-1/2}(X_1 + \dots + X_m) \in \mathcal{N}((q_1 \dots q_9)^2, 2p)$, тогда мы имеем

$$Q(T_*;\lambda) \ll_s (|q_9|^{-9} + max\{1, |q_9|^{-18}\})\frac{\max\{\lambda; m\}}{pM}.$$

Для оценки интеграла выпишем лемму 3.2 из [2].

Лемма 9. *Пусть* $\varphi(t), t \geqslant 0$ *- непрерывная функция, такая, что* $\varphi(0) = 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. *Предположим, что выполнено неравенство:*

$$\varphi(t)\varphi(t+\tau) \leqslant \Theta\mathcal{M}^s(\tau; N), \tag{23}$$

для всех $t \geqslant 0$ *и* $\tau \geqslant 0$ *и некоторого* $\Theta \geqslant 1$, *не зависящего от* t *и* τ.

Тогда для любых $A \geqslant 1, 0 < B \leqslant 1$ *и* $N \geqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$\int_{B/\sqrt{N}}^{A} \varphi(t)\frac{dt}{t} \ll_s \frac{\Theta^2(1 + logA)}{N} + \Theta^2 B^{-s/2}N^{-s/4} \text{ при } s > 8.$$

В следующей лемме мы получим оценку интегралов от харатеристической функции U-статистики. Для $A \geqslant t_0, t_1 \geqslant 0$ определим интегралы:

$$I_0 = \int_{-t_1}^{t_1} |\hat{\Psi}(t)|dt, I_1 = \int_{t_0 \leqslant |t| \leqslant A} |\hat{\Psi}(t)|\frac{dt}{|t|},$$

где $\hat{\Psi} = \int_{\mathbb{R}} e\{tx\}d\Psi(x)$ преобразование Фурье-Стилтьесса функции распределения $\Psi(x) = \mathbb{P}\{T_* \leqslant x\}$.

Лемма 10. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$. *Предположим, что случайный вектор* $Y = (2m)^{-1/2}(\tilde{X_1} + \ldots + \tilde{X_m}) \in \mathcal{N}((q_1 \ldots q_9)^2, p)$ *и* $s \geqslant 9$. *Введем ряд обозначений и условий:*

$$k = \frac{pM}{m}, t_0 = \frac{c_0(s)}{m} k^{-1+2/s}, t_1 = \frac{c_1(s)}{m} k^{-1/2},$$

$$\frac{c_2(s)}{m} \leqslant A \leqslant \frac{c_3(s)}{m},$$

где $c_j(s), 0 \leqslant j \leqslant 3$ *- некоторые положительные константы.*

Тогда

$$I_0 \ll_s |q_9|^{-9}(pM)^{-1}, I_1 \ll_s max\{1, |q_9|^{-18}\} m (pM)^{-1}. \tag{24}$$

Доказательство. Без потери общности рассуждений, будем считать, что $k \geqslant c_s$ для достаточно большой константы c_s. Действительно, если $k \leqslant c_s$ мы можем получить оценку (24), используя неравенство $|\hat{\Psi}| \leqslant 1$. Другим следствием оценки $k \geqslant c_s$ является неравенство $1/(km) \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant A$.

Докажем (24) для I_0. Согласно теореме 3 имеем $|\hat{\Psi}| \ll_s \mathcal{M}^s(tm; k)$. Используя неравенство $|\hat{\Psi}| \leqslant 1$, получаем $|\hat{\Psi}| \ll_s min\{1; \mathcal{M}^s(tm; k)\})$. Далее, обозначая $t_2 = m^{-1}k^{-1/2}max\{1, c_1(s)\}$ и, используя определение функции $\mathcal{M}$, получаем

$$I_0 \ll_s |q_9|^{-9}(\int_0^{1/km} dt + \int_{1/km}^{\infty} \frac{dt}{(tmk)^{(s/2)}} + \int_0^{(tm)^{s/2}} dt) =$$

$$|q_9|^{-9}(\frac{1}{km} + \frac{c_s}{km} + \frac{c_s}{k^{(s+2)/4}m}) \ll_s \frac{1}{|q_9|^9 km},$$

и доказываем оценку (24) для I_0.

Докажем неравенство для I_1. Согласно лемме 3

$$I_1 = \int_{t_0 \leqslant |t| \leqslant A} |\hat{\Psi}(t)||t|^{-1} dt \leqslant \mathbb{E} \int_{t_0 \leqslant |t| \leqslant A} \psi(t)|t|^{-1} dt, \tag{25}$$

где случайная функция ψ, определенная в (11), зависит от $X_1, \ldots, X_N$. Согласно лемме 7, существует случайное событие D такое, что его дополнение удовлетворяет неравенству

$$\mathbb{P}\{D^c\} \ll_{s,d} k^{-d}, d \geqslant 0,$$

и условию

$$\mathbf{I}\{D\}\psi(t-\gamma)\psi(t+\gamma) \ll_{s,d} |q_9|^{-9}\mathcal{M}^s(\gamma m; k) \text{ для всех } t, \gamma \in \mathbb{R}. \tag{26}$$

Таким образом, оценка (25) позволяет записать неравенство:

$$I_1 \ll_{s,d} k^{-d} log(A/t_0) + \mathbb{E}I,\ I = \int_{t_0 \leqslant |t| \leqslant A} \varphi_0(t)|t|^{-1} dt, \text{ где } \varphi_0 = \mathbf{I}\{D\}\psi. \tag{27}$$

Очевидно, что $k^{-d}log(A/t_0) \ll_s k^{-d}logk \ll k^{-1}$ при условии, что мы выберем $d = 2$.

Имеем:

$$I = \int_{mt_0 \leqslant |t|m \leqslant A} \varphi(t)|t|^{-1}dt, \text{ где } \varphi(t) = \varphi_0(t/m).$$

Неравенство (26) означает , что $\varphi(t-\gamma)\varphi(t+\gamma) \ll_{s,d} |q_9|^{-9}\mathcal{M}^s(\gamma; k)$. Таким образом, чтобы оценить I в (27) мы можем использовать лемму 7. Заменив в этой лемме N на k и A на mA, соответственно, и, выбирая $B = \sqrt{k}mt_0$ и $\Theta = max\{1, |q_9|^{-9}\}$, получаем оценку $I \ll_s max\{1, |q_9|^{-18}\}/k$. Таким образом, (27) доказывает оценку в (24). □

Доказательство теоремы. Сначала мы докажем утверждение (iii), а затем $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.

Докажем (iii). Без потери общности считаем, что $m < pM$, иначе результат следует из простейшей оценки $Q(T_*; \lambda) \leqslant 1$.

Известно, что

$$Q(T_*; \lambda) \leqslant 2max\{\lambda; 1/A\} \int_{-A}^{A} |\hat{\Psi}(t)|dt, \; A > 0. \tag{28}$$

Выберем $A = c_s m^{-1}$, $t_1 = m^{-1}(pM/m)^{-1/2}$, $t_0 = c_0 m^{-1}(pM/m)^{1+2/s}$. Мы можем предположить, что $t_0 \leqslant t_1$, иначе результат будет следовать из $Q(T_*; \lambda) \leqslant 1$. Оценка (28) дает нам (iii) при условии, если будет показано, что

$$J = \int_{|t| \leqslant A} |\hat{\Psi}(t)|dt \ll_s (|q_9|^{-9} + max\{1, |q_9|^{-18}\})(pM)^{-1}, \tag{29}$$

Используя неравенство $1 \ll_s |mt|^{-1}$, для $|t| \leqslant c_s/m = A$, мы имеем

$$J \ll_s I_0 + m^{-1}I_1 \text{ , где } I_0 = \int_{|t| \leqslant t_1} |\hat{\Psi}(t)|dt, \; I_1 = \int_{t_0 \leqslant |t| \leqslant A} |\hat{\Psi}(t)|dt. \tag{30}$$

Используя лемму 8, получаем оценки для I_0, I_1 и доказываем (iii).

Докажем $(iii) \Rightarrow (ii)$. Согласно лемме 2, выполнение условий невырожденности для гауссовского вектора G и неравенства для детерминанта в (ii) влечет за собой выполнение условий невырожденности для вектора Y и неравенства для детерминанта в (iii), при условии, что $m \geqslant c_s|q_1 \dots q_9|^{-3}p^{-1}(|q_1 \dots q_9|^{-3}p^{-1}\gamma_{2,3/2} + \gamma_3)$. Выберем $m \asymp c_s|q_1 \dots q_9|^{-3}p^{-1} \; (|q_1 \dots q_9|^{-3}p^{-1}\gamma_{2,3/2} + \gamma_3)$ и получим результат в (ii).

Докажем $(ii) \Rightarrow (i)$. Оценим p. Для этого воспользуемся следующим неравенством:

$$\mathbb{P}\{Z > 0.5\} \geqslant 0.25A^{-2}, \tag{31}$$

где случайная величина Z такова, что $\mathbb{E}Z = 1, \mathbb{E}Z^2 \leqslant A$. Положим в качестве Z величину $W(\bar{G})/\mathbb{E}W(\bar{G}))$. Равенство $\mathbb{E}Z = 1$ для такой величины выполнено. Ограниченность $\mathbb{E}Z^2$ следует из логарифмического неравенства, где $A = c(s)$. Следовательно, $p \asymp c(s)$. Подставляя вместо p константу, получим (i). □

Основной результат данной работы, сформулированный в виде теоремы 1, доказан в пункте (i) теоремы 4.

Заключение

В работе была получена оценка функции концентрации U-статистики, которая имеет порядок зависимости $O(|q_9|^{-\alpha})$ от собственных значений оператора $\mathbb{Q}$. В работе [2] оценка имеет порядок $O(\exp\{-\alpha q_9\})$. Условия невырожденности, использованные в работе [2], требуют близости детерминанта матрицы, составленной из скалярных произведений случайных сумм векторов и единичного элемента $\mathbb{I}$. Оценку удалось улучшить благодаря использованию новых условий невырожденности, суть которых состоит в невырожденности детерминанта упомянутой матрицы.

Список литературы

[1] Ulyanov V., Götze F. Uniform approximations in the CLT for balls in euclidian spaces. 00-034, SFB 343. University of Bielefeld, 2000, 26 p. (http://www.math.uni-bielefeld.de/sfb343/preprints/pr00034.pdf.gz)

[2] Bentkus V., Götze F. Optimal bounds in non-Gaussian limit theorems for U-statistics. Ann.Prob. 27, no.1, 454–521 (1999).

[3] Bogatyrev S.A., Götze F., Ulyanov V.V. Non-uniform bounds for short asymptotic expansions in the CLT for balls in a Hilbert space // Journal of Multivariate Analysis, 97, 2006. Pp. 2041-2056.

[4] Зубайраев Т.А. Об асимптотическом анализе u-статистик: оценка точности аппроксимации функции распределения // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ выпуск 7 (2010 г.), стр. 99-108. (http://smu.cs.msu.ru/conferences/sbornik7/smu-sbornik-7.pdf)