ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

УДК 510.67

АВТОМАТНОСТЬ SA-СТРУКТУР

Шушунов А.С.
Кафедра информатики

Поступила в редакцию 05.09.2011, после переработки 12.09.2011.

В данной работе предлагается доказательство того, что любую структуру, описываемую SA-языками, можно описать классом регулярных языков. В работе [3] доказано, что класс SA-языков шире класса регулярных. Однако, это не даёт нового инструмента для исследования разрешимости теорий алгебраических систем.

In this work we prove that any SA-structures are described by the regular language class. In the work [3] it is proved that the SA language class is bigger than the regular one. However, it does not provide with a new way to investigate the elementary theories decidability.

Ключевые слова: SA-языки, регулярные языки, разрешимости элементарных теорий.
Keywords: SA-structures, regular language, elementary theories decidability.

Введение

В работе Блюменсата и Гределя [1] установлено, что свойства замкнутости класса регулярных языков можно использовать для исследовании разрешимости теорий алгебраических систем. В работе [3] предложено обобщение этого метода. В качестве примера рассмотрен класс языков $\mathcal{SA}$, который шире класса регулярных языков. Класс $\mathcal{SA}$ замкнут относительно пересечения, дополнения, проекций, цилиндрификаций и изоморфизмов, а также алгоритмически разрешима проблема вхождения и пустоты для языков этого класса.

В данной работе предлагается доказательство того, что любую структуру, описываемую SA-языками, можно описать классом регулярных языков. Следовательно, работа [3] не даёт нового инструмента для исследовании разрешимости теорий алгебраических систем.

1. Определения

Определение 1. *Под i-ой* степенью *алфавита Σ, обозначаемой Σ^i, мы понимаем следующее определенное по индукции множество:*

$$\Sigma^0 = \{\epsilon\}, \text{ где } \epsilon \text{ — пустое слово;}$$

$$\Sigma^{i+1} = \{w \mid w = va, v \in \Sigma^i \text{ и } a \in \Sigma\}.$$

Если $w \in \Sigma^i$, то i называется длиной слова w или числом букв в слове w и обозначается через $|w|$. Выражением Σ^* мы будем обозначать множество любых слово в алфавите Σ:

$$\Sigma^* = \{w \mid \text{существует такое } i \geq 0, \quad \text{что } w \in \Sigma^i\}.$$

Определение 2 (описание набора слов)**.** *Пусть имеется набор слов $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$ в алфавите Σ. Причём $\omega_i = \omega_{i1}\omega_{i2}\ldots\omega_{il_i}$. Введём специальный символ $\square \notin \Sigma$, с помощью которого будем выравнивать длину слов набора. Тогда* описанием набора *$(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$ называется следующее слово $\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \ldots \otimes \omega_k$ в алфавите $(\Sigma \cup \{\square\})^k$ длины $l = max\,\{|\omega_1|, |\omega_2| \ldots |\omega_k|\}$:*

$$\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \ldots \otimes \omega_k = \begin{bmatrix} \omega'_{11} \\ \vdots \\ \omega'_{k1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \omega'_{1l} \\ \vdots \\ \omega'_{kl} \end{bmatrix} \in \left((\Sigma \cup \{\square\})^k\right)^*,$$

где $\omega'_{ij} = \omega_{ij}$, если $j \leqslant |\omega_i|$, и $\omega'_{ij} = \square$, в остальных случаях.

Определение 3. *Пусть L_1 и L_2 — регулярные языки в алфавите Σ. Тогда* псевдосимметричным *языком будем называть язык S следующего вида: $S = \{\omega_1\omega_2 \big| |\omega_1| = |\omega_2|, \omega_1 \in L_1, \omega_2 \in L_2\}$. Будем говорить, что языки L_1 и L_2 задают язык S.*

Определение 4. *Реляционная структура $\mathcal{S} = (A, R_1, \ldots, R_n)$ описывается классом языков Δ, если выполнены следующие условия:*

1. *Эффективно задан такой язык $W_A \subseteq \Sigma^*$, принадлежащей классу Δ, что существует сюрьективная функция $\nu : W_A \to A$. W_A назовём нумерацией A.*

2. *Язык*
$$W_\epsilon = \{\omega \otimes \omega' | \nu(\omega) = \nu(\omega');\ \omega, \omega' \in W_A\}$$
задан эффективно и принадлежит классу Δ. Другими словами, эффективно задан язык из Δ, состоящий из описаний пар слов, имеющих одинаковый образ.

3. *Для каждого $i = 1, \ldots, n$ язык*
$$W_R = \{\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \cdots \otimes \omega_r | \left(\nu(\omega_1), \nu(\omega_2), \ldots, \nu(\omega_r)\right) \in R_i\}$$
задан эффективно и принадлежит классу Δ. Другими словами, эффективно задан язык из Δ, состоящий из описаний наборов слов, образы которых принадлежат R_i.

2. Основные результаты

Зафиксируем некоторый алфавит Σ. Всюду далее мы будем рассматривать языки в этом алфавите.

Рассмотрим изоморфизм $\nu : \Sigma^* \to \Sigma^*$,

$$\nu(a_1 a_2 \dots a_n) = \begin{cases} a_1 a_2 \dots a_n & \text{если } n - \text{нечетное}, \\ a_1 a_{n/2+1} a_2 a_{n/2+2} \dots a_{n/2} a_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Замечание 1. $\nu(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_k) = \nu(\omega_1) \otimes \nu(\omega_2) \otimes \dots \otimes \nu(\omega_k)$.

Зададим частично определенную операцию $\bowtie$ на словах из алфавита Σ. Пусть даны слова $\omega_1, \omega_2 \in \Sigma^*$. $\omega_1 \bowtie \omega_2$ определена если $|\omega_1| = |\omega_2|$. $\omega_1 \bowtie \omega_2 = \{a_1 a_2 \dots a_{2n} | a_1 a_3 \dots a_{2n-1} = \omega_1, a_2 a_4 \dots a_{2n} = \omega_2\}$. Расширим определение на языки. Пусть даны языки L_1 и L_2. Тогда язык $L_1 \bowtie L_2 = \{\omega_1 \bowtie \omega_2 | \omega_1 \in L_1, \omega_2 \in L_2\}$.

Теорема 1. *Пусть даны языки L_1 и L_2. Рассмотрим язык $L_1 \bowtie L_2 = \{a_1 a_2 \dots a_{2n} | a_1 a_3 \dots a_{2n-1} \in L_1, a_2 a_4 \dots a_{2n} \in L_2\ \}$. Если языки L_1 и L_2 регулярные, то язык $L = L_1 \bowtie L_2$ — тоже регулярный.*

Доказательство. Так как L_1 и L_2 регулярные языки, то их задают конечные автоматы $K_1 = \langle Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1^0, F_1 \rangle$ и $K_2 = \langle Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2^0, F_2 \rangle$ соответственно. Построим конечный автомат K, который будет задавать язык L.

$$K = \langle Q_1 \times Q_2 \times \{o, e\}, \Sigma, \delta, (q_1^0, q_2^0, e), F \rangle, \text{где:}$$

- $\delta((q_1, q_2, e), a) = (\delta_1(q_1, a), q_2, o)$ для всех $a \in \Sigma, q_1 \in F_1, q_2 \in F_2$
- $\delta((q_1, q_2, o), a) = (q_1, \delta_2(q_2, a), e)$ для всех $a \in \Sigma, q_1 \in F_1, q_2 \in F_2$
- $F = \{(q_1, q_2, e) | q_1 \in F_1, q_2 \in F_2\}$

На нечетных буквах этот автомат работает как K_1, а на четных буквах - как K_2. Переход в одно из заключительных состояний F возможно тогда и только тогда, когда входное слово имеет четную длину, нечетные буквы образуют слово из L_1, а четные - из L_2. $\square$

Следствие 1. *Если язык L - псевдосимметричный, то $\nu(L)$ - регулярный.*

Определение 5. *Рассмотрим детерминированный конечный автомат $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ и слово $\omega \in \Sigma^*$. Обозначим через $\delta(\omega)$ такое состояние q, что автомат M из конфигурации (q_0, ω) переходит в конфигурацию (q, ϵ).*

Определение 6. *Рассмотрим детерминированный конечный автомат $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, который задаёт язык S. Пусть $q \in Q$. Построим язык $R_M(q)$. Слово ω принадлежит $R_M(q)$ тогда и только тогда, когда существуют такие слова $\alpha, \eta \in \Sigma^*$, причём $\alpha = \eta\omega$, $\alpha \in S$ и $\delta(\eta) = q$.*

Определение 7. *Рассмотрим детерминированный конечный автомат $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, который задаёт язык S. Пусть $q \in Q$. Построим язык $L_M(q)$. Слово ω принадлежит $L_M(q)$ тогда и только тогда, когда существуют такие слова $\alpha, \eta \in \Sigma^*$, причём $\alpha = \omega\eta$, $\alpha \in S$ и $\delta(\omega) = q$.*

Замечание 2. Языки $R_M(q)$ и $L_M(q)$ являются регулярными.

Доказательство. Если состояние q достижимо из q_0, то автомат, который будет задавать язык $R_M(q)$, есть $M_R = \langle Q, \Sigma, \delta, q, F\rangle$. Иначе $R_M(q)$ пуст, так как не существует такого η, что $\delta(\eta) = q$.

Если из состояния q достижимо хотя бы одно из состояний из F, то автомат, который будет задавать язык $L_M(q)$, есть $M_L = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q\}\rangle$. Иначе $L_M(q)$ пуст, так как не существует такого слова α, что прочитав его начало автомат перешел бы в q, а потом в одно из заключительных.

□

Теорема 2. *Пусть дан регулярный язык S. Язык $\nu(S)$ — тоже регулярный.*

Доказательство. Если S — регулярный, то существует конечный автомат $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$, распознающий это язык. Зададим множество языков $X = \{L_M(q) \bowtie R_M(q) | q \in Q\}$. Заметим, что все языки из X регулярные.

Обозначим через S_o язык, состоящий из слов S нечетной длины. Он является регулярным.

$$\nu(S) = \bigcup X \cup S_o$$

Надо доказать

1. $\omega \in \nu(S) \to \omega \in \bigcup X \cup S_o$.

   Если ω имеет нечетную длину, то утверждение очевидно. Пусть $|\omega|$ четно. Тогда существует слово $\theta \in S$ такое, что $\nu(\theta) = \omega, \theta = \theta_1\theta_2, |\theta_1| = |\theta_2|$. Рассмотрим состояние $q = \delta(\theta_1)$. Нетрудно показать, что $\theta_1 \in L_M(q)$ и $\theta_2 \in L_R(q)$. Следовательно, слово $\omega = \theta_1 \bowtie \theta_2$ будет входить в один из языков X.

2. $\omega \in \bigcup X \cup S_o \to \omega \in \nu(S)$.

   Если ω имеет нечетную длину, то утверждение очевидно. Пусть $|\omega|$ четно. Тогда существует такое состояние $q \in Q$, что $\omega \in L_M(q) \bowtie R_M(q)$. Следовательно, существуют слова $\theta_1 \in L_M(q)$ и $\theta_2 \in R_M(q)$, причём $|\theta_1| = |\theta_2|, \omega = \theta_1 \bowtie \theta_2$. Очевидно, что слово $\theta = \theta_1\theta_2$ принадлежит S. Но $\nu(\theta)$ есть ω. Следовательно, $\omega \in \nu(S)$.

□

Следствие 2. *Если язык L — $\mathcal{SA}$-язык, то $\nu(L)$ — регулярный.*

Доказательство. Пусть $L = A \cup S$, где A — автоматный язык, а S — псевдосимметричный. Тогда, $\nu(L) = \nu(A \cup S) = \nu(A) \cup \nu(S)$. Следовательно, L — регулярный язык, так как является объединением двух регулярных языков. □

Теорема 3. *Если структура $\mathcal{S} = (A, R_1, \ldots, R_n)$ описывается классом языков $\mathcal{SA}$, то она является автоматной.*

Доказательство. Из того, что структура $\mathcal{S}$ описывается классом языков $\mathcal{SA}$, следует что:

1. Задан язык $W_A \in \mathcal{SA}$, и существует функция на $\tau : W_A \to A$. Следовательно, существует регулярный язык $W'_A = \nu(W_A)$ и функция на $\xi = \tau \circ \nu^{-1}$, причём $\xi : W'_A \to A$. Таким образом, W'_A является нумерацией A.

2. Задан псевдосимметричный язык $W_\epsilon = \{\omega \otimes \omega' | \tau(\omega) = \tau(\omega');\ \omega, \omega' \in W_A\}$. Следовательно, существует регулярный язык $\nu(W_\epsilon) = \{\omega \otimes \omega' | \xi(\omega) = \xi(\omega'); \omega, \omega' \in W'_A\}$.

3. Для каждого $i = 1 \dots n$ задан псевдосимметричный язык $W_R = \{\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_r | \, (\tau(\omega_1), \tau(\omega_2), \dots, \tau(\omega_r)) \in R_i\}$. Следовательно, существует регулярный язык $\nu(W_R) = \{\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_r | \, (\xi(\omega_1), \nu(\omega_2), \dots, \xi(\omega_r)) \in R_i, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r \in W'_A\}$

Таким образом структура $\mathcal{S}$ является автоматной. □

Заключение

Итак, мы показали, что любую структуру, описываемую SA-языками, можно описать классом регулярных языков. Следовательно, разрешимость таких структур можно установить без использования SA-языков. Остается открытым вопрос поиска класса языков, который:

- отличен от автоматных,
- обладает свойствами замкнутости, сформулированными в [3],
- описывает неавтоматную структуру.

Список литературы

[1] Blumensath A., Graedel E. Automatic structures // Proc. 15th IEEE Symp. on Logic in Computer Science, 2000. P.51–62.

[2] Ахо А., Ульман Дж. Теория синтаксического анализа перевода и компиляции. Том 1, Ситаксический анализ. М.:Мир, 1978.

[3] Ососков А.В., Шушунов А.С. Об общем методе доказательства разрешимости элементарных теорий // Вестник ТвГУ. Серия Прикладная математика, №2(21), 2011. С. 57–71.