## МОДЕЛИ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 532, 517.958

# ЕДИНСТВЕННОСТЬ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ НАЧАЛЬНО–КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

**Шеретов Ю.В.**
Кафедра математического анализа

*Поступила в редакцию 08.02.2011, после переработки 17.02.2011.*

Доказана теорема о единственности классического решения основной начально–краевой задачи для квазигидродинамических уравнений, описывающих течения слабосжимаемой вязкой жидкости.

The theorem on the uniqueness of classical solution of main boundary–value problem for quasi–hydrodynamic equations, describing slightly compressible fluid flows, is proved.

**Ключевые слова:** уравнения Навье–Стокса, квазигидродинамические уравнения, единственность классического решения.
**Keywords:** Navier–Stokes equations, quasi-hydrodynamic equations, uniqueness of classical solution.

## Введение

Проблемами математического обоснования классических уравнений гидродинамики занимались многие ученые на протяжении более 150 лет. Обзоры некоторых опубликованных в этом направлении результатов представлены в [1] – [7]. Несмотря на значительные достижения, на один из основных вопросов о детерминированном описании течений несжимаемой вязкой жидкости соответствующей трехмерной нестационарной системой Навье–Стокса до сих пор не получен ответ. Это – так называемая шестая проблема тысячелетия [4]. Единственность классического решения основной начально–краевой задачи для уравнений Навье–Стокса была установлена в работах Е. Фоа и Д.Е. Долидзе [1], [2], [5], [8]. Дж. Серрин [2] обобщил эти результаты на случай течений сжимаемых вязких теплопроводных сред.

В 1994 г. автором была предложена еще одна система уравнений для описания движений слабосжимаемой вязкой жидкости, получившая название квазигидродинамической (КГД) [9]. Она отличалась от соответствующей системы Навье–Стокса дивергентными членами с малым положительным параметром $\tau$, имеющим размерность времени и зависящим от скорости звука в среде $c_s$. В пределе при $c_s \to +\infty$ КГД уравнения переходили в уравнения Навье–Стокса.

Квазигидродинамическая система так же, как и система Навье–Стокса для несжимаемой жидкости, является диссипативной и обладает широким спектром точных физически адекватных решений [9] – [13]. Физические принципы, лежащие в основе ее вывода, наиболее полно изложены в [11]. Статьи [12] – [16] посвящены математическому анализу КГД уравнений. В частности, для полной квазигидродинамической системы и ее баротропного приближения А.А. Злотником доказаны локальные по времени теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши. Для линеаризованной КГД системы им же получены результаты о существовании и единственности обобщенных решений задач Коши и начально–краевых задач на произвольном временном промежутке, выведены соответствующие энергетические неравенства.

В последнее время интенсивно развивается научное направление, связанное с построением вычислительных методов гидродинамики на основе полных и упрощенных КГД уравнений [11], [17] – [19]. Разностные аппроксимации зависящих от $\tau$ членов выступают здесь как эффективные искусственные регуляризаторы, обеспечивающие устойчивость и точность численного счета.

В настоящей работе поставлена основная начально–краевая задача для квазигидродинамической системы в случае слабосжимаемой вязкой жидкости и, в предположении о существовании ее классического решения, доказана его единственность при произвольном выборе постоянных физических параметров. Этот результат представляется очень важным в плане математического обоснования указанной системы КГД.

## 1. Квазигидродинамическая система для вязкой слабосжимаемой жидкости и постановка основной начально–краевой задачи для нее

Квазигидродинамическая система для описания течений слабосжимаемой вязкой жидкости без учета внешних массовых сил является диссипативной [9] – [11] и может быть представлена в следующем дивергентном виде:

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = \mathrm{div}\ \vec{w}, \tag{1.1}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho\ \mathrm{div}\ (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p = 2\eta\ \mathrm{div}\ \widehat{\sigma}(\vec{u}) + \rho\ \mathrm{div}\ \big[(\vec{w} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{w})\big]. \tag{1.2}$$

Здесь $\widehat{\sigma}(\vec{u})$ – тензор скоростей деформаций:

$$\widehat{\sigma}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\big[(\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T\big].$$

Вектор $\vec{w}$, связанный с вектором плотности потока массы $\vec{j}_m$ соотношением $\vec{j}_m = \rho\big(\vec{u} - \vec{w}\big)$, вычисляется с помощью выражения

$$\vec{w} = \tau\Big((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p\Big).$$

Плотность $\rho$, коэффициент динамической вязкости $\eta$ и характерное время релаксации $\tau$ считаются заданными положительными константами. Релаксационный параметр $\tau$ определяется по формуле

$$\tau = \frac{\eta}{\rho\ c_s^2},$$

где $c_s$ – известная скорость звука в среде. В записи системы (1.1) – (1.2), замкнутой относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},t)$ и давления $p = p(\vec{x},t)$, использованы стандартные обозначения из тензорного анализа. Например, диада $(\vec{u}\otimes\vec{w})$ представляет собой тензор–инвариант второго ранга, полученный как прямое тензорное произведение двух векторов $\vec{u}$ и $\vec{w}$. В пределе при $c_s \to +\infty$ КГД система переходит в классическую систему Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости.

Пусть $V$ – ограниченная односвязная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ с кусочно-гладкой границей $\partial V$, $\overline{V} = V \cup \partial V$ – ее замыкание, $\vec{n} = \vec{n}(\vec{x})$ – вектор внешней единичной нормали к $\partial V$ в точке $\vec{x} \in \partial V$, $Q = V \times [0,\ T]$ – ограниченный цилиндр в $\mathbb{R}^3_{\vec{x}} \times \mathbb{R}_t$, $\overline{Q} = \overline{V} \times [0,\ T]$ – его замыкание, $T$ – фиксированное положительное число. Параметр $t \in [0,\ T]$ будем интерпретировать как время. Присоединим к системе (1.1) – (1.2) начальное условие

$$\vec{u}\Big|_{t=0} = \vec{u}_0(\vec{x}), \qquad \vec{x} \in \overline{V}, \tag{1.3}$$

граничные условия

$$\vec{u}\Big|_{\partial V} = \vec{0}, \qquad (\vec{w}\cdot\vec{n})\Big|_{\partial V} = 0, \qquad t \in [0,\ T], \tag{1.4}$$

а также условие нормировки для давления

$$\int\limits_V p\ dV = 0, \qquad t \in [0,\ T]. \tag{1.5}$$

Равенства (1.4) означают, что жидкость прилипает к неподвижной границе полости $\partial V$ и отсутствует поток массы через $\partial V$. Начально–краевую задачу (1.1) – (1.5) будем считать основной для системы (1.1) – (1.2).

Символом $C^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$, где $\alpha$ – натуральное число, обозначим множество непрерывных в $Q$ функций $f = f(\vec{x},t)$, имеющих непрерывные в $Q$ частные производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}\partial t^{\beta}}$$

для любых целых и неотрицательных чисел $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ и $\beta$, подчиняющихся неравенству $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\beta \leqslant 2\alpha$. Класс $\mathbf{C}^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$ состоит из вектор–функций $\vec{f} = \vec{f}(\vec{x},t) = (f_1(\vec{x},t), f_2(\vec{x},t), f_3(\vec{x},t))$, каждая компонента $f_i$ которых принадлежит $C^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$.

Символом $C^{\alpha,0}_{\vec{x},t}(Q)$, где $\alpha$ – натуральное число, обозначим множество всех непрерывных в $Q$ функций $f = f(\vec{x},t)$, у которых существуют непрерывные в $Q$ производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}}$$

при любых целых неотрицательных $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, таких, что $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \leqslant \alpha$.

**Определение.** *Решением (в классическом смысле) основной начально–краевой задачи* (1.1) – (1.5) *назовем функции* $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},\ t) \in \boldsymbol{C}^{2,1}_{\vec{x},t}(Q) \cap \boldsymbol{C}^1(\overline{Q})$, $p = p(\vec{x},\ t) \in$

$C^{2,0}_{\vec{x},t}(Q) \cap C^{1,0}_{\vec{x},t}(\overline{Q})$, *удовлетворяющие при всех* $(\vec{x},\ t) \in Q$ *уравнениям* (1.1) – (1.2), *а также условиям* (1.3) – (1.5).

## 2. Единственность классического решения

Изучим вопрос о единственности классического решения поставленной начально–краевой задачи, исходя из предположения о том, что при некоторых $\vec{u}_0(\vec{x})$ оно существует. Справедлива

**Теорема.** *Классическое решение начально-краевой задачи* (1.1) – (1.5) *является единственным при любом выборе положительных параметров* $\rho$, $\eta$ *и* $\tau$.

**Доказательство.** Предположим, что наряду с $(\vec{u}, p)$ существует другое решение $(\vec{u}_1, p_1)$ задачи (1.1) – (1.5). Тогда

$$\text{div}\ \vec{u}_1 = \text{div}\ \vec{w}_1, \tag{2.1}$$

$$\rho\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \rho\ \text{div}\ (\vec{u}_1 \otimes \vec{u}_1) + \nabla p_1 = 2\eta\ \text{div}\ \widehat{\sigma}(\vec{u}_1) + \rho\ \text{div}\ \big[(\vec{w}_1 \otimes \vec{u}_1) + (\vec{u}_1 \otimes \vec{w}_1)\big], \tag{2.2}$$

$$\vec{u}_1\Big|_{t=0} = \vec{u}_0(\vec{x}), \qquad \vec{x} \in \overline{V}, \tag{2.3}$$

$$\vec{u}_1\Big|_{\partial V} = \vec{0}, \qquad (\vec{w}_1 \cdot \vec{n})\Big|_{\partial V} = 0, \qquad t \in [0,\ T], \tag{2.4}$$

$$\int\limits_V p_1\ dV = 0, \qquad t \in [0,\ T]. \tag{2.5}$$

Здесь

$$\widehat{\sigma}(\vec{u}_1) = \frac{1}{2}\big[(\nabla \otimes \vec{u}_1) + (\nabla \otimes \vec{u}_1)^T\big], \quad \vec{w}_1 = \tau\Big((\vec{u}_1 \cdot \nabla)\vec{u}_1 + \frac{1}{\rho}\nabla p_1\Big).$$

Пусть

$$\delta\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}, \quad \delta p = p_1 - p. \tag{2.6}$$

Без ограничения общности положим постоянную плотность жидкости $\rho$ равной единице. Вычтем из (2.1) – (2.5) соответственно равенства (1.1) – (1.5). С учетом обозначений (2.6) будем иметь

$$\text{div}\ \delta\vec{u} = \text{div}\ \delta\vec{w}, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial \delta\vec{u}}{\partial t} + \text{div}\ \big[(\delta\vec{u} \otimes \delta\vec{u}) + (\vec{u} \otimes \delta\vec{u}) + (\delta\vec{u} \otimes \vec{u})\big] + \nabla\delta p = 2\eta\ \text{div}\ \widehat{\sigma}(\delta\vec{u}) +$$

$$+\text{div}\ \big[(\delta\vec{w} \otimes \delta\vec{u}) + (\vec{w} \otimes \delta\vec{u}) + (\delta\vec{w} \otimes \vec{u}) + (\delta\vec{u} \otimes \delta\vec{w}) + (\vec{u} \otimes \delta\vec{w}) + (\delta\vec{u} \otimes \vec{w})\big], \tag{2.8}$$

$$\delta\vec{u}\Big|_{t=0} = \vec{0}, \qquad \vec{x} \in \overline{V}, \tag{2.9}$$

$$\delta\vec{u}\Big|_{\partial V} = \vec{0}, \qquad (\delta\vec{w} \cdot \vec{n})\Big|_{\partial V} = 0, \qquad t \in [0,\ T], \tag{2.10}$$

$$\int\limits_V \delta p\ dV = 0, \qquad t \in [0,\ T], \tag{2.11}$$

где

$$\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}) = \frac{1}{2}\Big[(\nabla\otimes\delta\vec{u}) + (\nabla\otimes\delta\vec{u})^T\Big], \tag{2.12}$$

$$\delta\vec{w} = \tau\Big[(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u} + (\delta\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla\delta p\Big]. \tag{2.13}$$

Принимая во внимание (1.1) и (2.7), запишем (2.8) в недивергентном виде

$$\frac{\partial\delta\vec{u}}{\partial t} + \Big((\delta\vec{u}-\delta\vec{w})\cdot\nabla\Big)\delta\vec{u} + \Big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\Big)\delta\vec{u} + \Big((\delta\vec{u}-\delta\vec{w})\cdot\nabla\Big)\vec{u} + \nabla\delta p =$$

$$= 2\eta\ \mathrm{div}\ \widehat{\sigma}(\delta\vec{u}) + \mathrm{div}\ \Big[(\delta\vec{u}\otimes\delta\vec{w}) + (\vec{u}\otimes\delta\vec{w}) + (\delta\vec{u}\otimes\vec{w})\Big]. \tag{2.14}$$

Теперь умножим обе части равенства (2.14) скалярно на вектор $\delta\vec{u}$:

$$\delta\vec{u}\cdot\frac{\partial\delta\vec{u}}{\partial t} + \delta\vec{u}\cdot\Big((\delta\vec{u}-\delta\vec{w})\cdot\nabla\Big)\delta\vec{u} + \delta\vec{u}\cdot\Big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\Big)\delta\vec{u}+$$

$$+\delta\vec{u}\cdot\Big((\delta\vec{u}-\delta\vec{w})\cdot\nabla\Big)\vec{u} + (\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta p = 2\eta\ \delta\vec{u}\cdot\ \mathrm{div}\ \widehat{\sigma}(\delta\vec{u})+$$

$$+\delta\vec{u}\cdot\mathrm{div}\ (\delta\vec{u}\otimes\delta\vec{w}) + \delta\vec{u}\cdot\mathrm{div}\ (\vec{u}\otimes\delta\vec{w}) + \delta\vec{u}\cdot\mathrm{div}\ (\delta\vec{u}\otimes\vec{w}). \tag{2.15}$$

Преобразуем последовательно некоторые члены, входящие в (2.15):

$$\delta\vec{u}\cdot\frac{\partial\delta\vec{u}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\delta\vec{u}\cdot\delta\vec{u}) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\Big), \tag{2.16}$$

$$\delta\vec{u}\cdot\Big((\delta\vec{u}-\delta\vec{w})\cdot\nabla\Big)\delta\vec{u} = \sum_{i=1}^{3}\ \delta u_i\ \sum_{j=1}^{3}\ (\delta u_j - \delta w_j)\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\ (\delta u_j - \delta w_j)\sum_{i=1}^{3}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\delta u_i^2}{2}\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\ (\delta u_j - \delta w_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{3}\ \Big(\frac{\delta u_i^2}{2}\Big) = \Big((\delta\vec{u}-\delta\vec{w})\cdot\nabla\Big)\Big(\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\Big) =$$

$$= \mathrm{div}\ \Big((\delta\vec{u}-\delta\vec{w})\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\Big) - \frac{\delta\vec{u}^2}{2}\ \mathrm{div}\ (\delta\vec{u}-\delta\vec{w}) = \mathrm{div}\ \Big((\delta\vec{u}-\delta\vec{w})\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\Big), \tag{2.17}$$

$$\delta\vec{u}\cdot\Big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\Big)\delta\vec{u} = \sum_{i=1}^{3}\ \delta u_i\ \sum_{j=1}^{3}\ (u_j - w_j)\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\ (u_j - w_j)\sum_{i=1}^{3}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\delta u_i^2}{2}\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\ (u_j - w_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{3}\ \Big(\frac{\delta u_i^2}{2}\Big) = \Big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\Big)\Big(\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\Big) =$$

$$= \mathrm{div}\ \Big((\vec{u}-\vec{w})\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\Big) - \frac{\delta\vec{u}^2}{2}\ \mathrm{div}\ (\vec{u}-\vec{w}) = \mathrm{div}\ \Big((\vec{u}-\vec{w})\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\Big), \tag{2.18}$$

$$(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta p = \Big((\delta\vec{u}-\delta\vec{w})\cdot\nabla\Big)\delta p + (\delta\vec{w}\cdot\nabla)\delta p =$$
$$= \mathrm{div}\,\Big((\delta\vec{u}-\delta\vec{w})\delta p\Big) - \delta p\ \mathrm{div}\,(\delta\vec{u}-\delta\vec{w}) + (\delta\vec{w}\cdot\nabla)\delta p =$$
$$= \mathrm{div}\,\Big((\delta\vec{u}-\delta\vec{w})\delta p\Big) + (\delta\vec{w}\cdot\nabla)\delta p, \tag{2.19}$$

$$\delta\vec{u}\cdot\ \mathrm{div}\ \widehat{\sigma}(\delta\vec{u}) = \sum_{i=1}^{3}\ \delta u_i\ \sum_{j=1}^{3}\ \frac{\partial\sigma_{ij}(\delta\vec{u})}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{3}\ \delta u_i\ \frac{\partial\sigma_{ij}(\delta\vec{u})}{\partial x_j} =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{3}\ \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}(\delta\vec{u})\delta u_i) - \sum_{i,j=1}^{3}\ \sigma_{ij}(\delta\vec{u})\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} =$$
$$= \sum_{j=1}^{3}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_{i=1}^{3}\ \sigma_{ij}(\delta\vec{u})\delta u_i\Big) - \frac{1}{2}\ \sum_{i,j=1}^{3}\ \sigma_{ij}(\delta\vec{u})\Big(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i}\Big) =$$
$$= \ \mathrm{div}\ \Big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\cdot\delta\vec{u}\Big) - \Big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}):\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\Big), \tag{2.20}$$

$$\delta\vec{u}\cdot\ \mathrm{div}\ (\delta\vec{u}\otimes\delta\vec{w}) = \sum_{i=1}^{3}\ \delta u_i\ \sum_{j=1}^{3}\ \frac{\partial(\delta u_j\delta w_i)}{\partial x_j} =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{3}\ \frac{\partial}{\partial x_j}(\delta u_j\delta w_i\delta u_i) - \sum_{i,j=1}^{3}\ \delta w_i\delta u_j\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} =$$
$$= \sum_{j=1}^{3}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\delta u_j\sum_{i=1}^{3}(\delta w_i\delta u_i)\Big) - \sum_{i=1}^{3}\ \delta w_i\sum_{j=1}^{3}\ \delta u_j\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} =$$
$$= \ \mathrm{div}\ \Big(\delta\vec{u}(\delta\vec{w}\cdot\delta\vec{u})\Big) - \delta\vec{w}\cdot(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}, \tag{2.21}$$

$$\delta\vec{u}\cdot\ \mathrm{div}\ (\vec{u}\otimes\delta\vec{w}) = \sum_{i=1}^{3}\ \delta u_i\ \sum_{j=1}^{3}\ \frac{\partial(u_j\delta w_i)}{\partial x_j} =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{3}\ \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j\delta w_i\delta u_i) - \sum_{i,j=1}^{3}\ \delta w_i u_j\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} =$$
$$= \sum_{j=1}^{3}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(u_j\sum_{i=1}^{3}(\delta w_i\delta u_i)\Big) - \sum_{i=1}^{3}\ \delta w_i\sum_{j=1}^{3}\ u_j\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} =$$
$$= \ \mathrm{div}\ \Big(\vec{u}(\delta\vec{w}\cdot\delta\vec{u})\Big) - \delta\vec{w}\cdot(\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}, \tag{2.22}$$

$$\delta\vec{u}\cdot\ \mathrm{div}\ (\delta\vec{u}\otimes\vec{w}) = \sum_{i=1}^{3}\ \delta u_i\ \sum_{j=1}^{3}\ \frac{\partial(\delta u_j w_i)}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(\delta u_j w_i \delta u_i) - \sum_{i,j=1}^{3} w_i \delta u_j \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\delta u_j \sum_{i=1}^{3}(w_i \delta u_i)\Big) - \sum_{i=1}^{3} w_i \sum_{j=1}^{3} \delta u_j \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} =$$

$$= \operatorname{div} \big(\delta\vec{u}(\vec{w}\cdot\delta\vec{u})\big) - \vec{w}\cdot(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}. \tag{2.23}$$

Здесь

$$\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}) : \widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big) = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}^2(\delta\vec{u})$$

– двойное скалярное произведение одинаковых тензоров. В формулах (2.17) – (2.19) учтена соленоидальность векторных полей $\vec{u} - \vec{w}$ и $\delta\vec{u} - \delta\vec{w}$.

Подстановка (2.16) – (2.23) в (2.15) дает

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\Big) + \operatorname{div} \Big[(\delta\vec{u} - \delta\vec{w})\Big(\frac{\delta\vec{u}^2}{2} + \delta p\Big) + (\vec{u} - \vec{w})\frac{\delta\vec{u}^2}{2} -$$

$$-(\vec{u} + \delta\vec{u})(\delta\vec{w}\cdot\delta\vec{u}) - \delta\vec{u}(\vec{w}\cdot\delta\vec{u}) - 2\eta\,\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\cdot\delta\vec{u}\big)\Big] +$$

$$+2\eta\,\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}) : \widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big) + \delta\vec{w}\cdot\big[(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u} + \nabla\delta p\big] =$$

$$= -\delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u} + \delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{w}\cdot\nabla\big)\vec{u} - \vec{w}\cdot(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}. \tag{2.24}$$

Добавляя в обе части (2.24) слагаемое $\delta\vec{w}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\Big) + \operatorname{div} \Big[(\delta\vec{u} - \delta\vec{w})\Big(\frac{\delta\vec{u}^2}{2} + \delta p\Big) + (\vec{u} - \vec{w})\frac{\delta\vec{u}^2}{2} -$$

$$-(\vec{u} + \delta\vec{u})(\delta\vec{w}\cdot\delta\vec{u}) - \delta\vec{u}(\vec{w}\cdot\delta\vec{u}) - 2\eta\,\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\cdot\delta\vec{u}\big)\Big] +$$

$$+2\eta\,\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}) : \widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big) + \delta\vec{w}\cdot\big[(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u} + \big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u} + \nabla\delta p\big] =$$

$$= -\delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u} + \delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{w}\cdot\nabla\big)\vec{u} + \delta\vec{w}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u} - \vec{w}\cdot(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}. \tag{2.25}$$

Принимая во внимание (2.13), представим (2.25) в эквивалентном виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\Big) + \operatorname{div} \Big[(\delta\vec{u} - \delta\vec{w})\Big(\frac{\delta\vec{u}^2}{2} + \delta p\Big) + (\vec{u} - \vec{w})\frac{\delta\vec{u}^2}{2} - (\vec{u} + \delta\vec{u})(\delta\vec{w}\cdot\delta\vec{u}) -$$

$$-\delta\vec{u}(\vec{w}\cdot\delta\vec{u}) - 2\eta\,\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\cdot\delta\vec{u}\big)\Big] + 2\eta\,\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}) : \widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big) + \frac{\delta\vec{w}^2}{\tau} =$$

$$= -\delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u} + \delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{w}\cdot\nabla\big)\vec{u} + \delta\vec{w}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u} - \vec{w}\cdot(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}. \tag{2.26}$$

Проинтегрируем (2.26) по множеству V. Будем иметь

$$\int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\delta\vec{u}^2}{2}\Big)\,dV + \int\limits_V \operatorname{div}\,\delta\vec{A}\,dV +$$

$$+2\eta \int\limits_V \big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}) : \widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big)\,dV + \frac{1}{\tau}\int\limits_V \delta\vec{w}^2\,dV =$$

$$= -\int\limits_V \delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u}\ dV + \int\limits_V \delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{w}\cdot\nabla\big)\vec{u}\ dV +$$

$$+\int\limits_V \delta\vec{w}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u}\ dV - \int\limits_V \vec{w}\cdot(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}\ dV, \qquad (2.27)$$

где

$$\delta\vec{A} = (\delta\vec{u}-\delta\vec{w})\Big(\frac{\delta\vec{u}^2}{2}+\delta p\Big) + (\vec{u}-\vec{w})\frac{\delta\vec{u}^2}{2} -$$

$$-(\vec{u}+\delta\vec{u})(\delta\vec{w}\cdot\delta\vec{u}) - \delta\vec{u}(\vec{w}\cdot\delta\vec{u}) - 2\eta\ \big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\cdot\delta\vec{u}\big).$$

Для любого $t\in[0,\ T]$ введем в рассмотрение величину

$$E_\delta(t) = \frac{1}{2}\int\limits_V \delta\vec{u}^2\ dV. \qquad (2.28)$$

Преобразуем левую часть (2.27), используя определение (2.28), правило Лейбница (см., например, [12]) и формулу Гаусса–Остроградского:

$$\frac{dE_\delta(t)}{dt} + \iint\limits_{\partial V} (\delta\vec{A}\cdot\vec{n})\ dS + 2\eta\int\limits_V \big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}):\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big)\ dV + \frac{1}{\tau}\int\limits_V \delta\vec{w}^2\ dV =$$

$$= -\int\limits_V \delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u}\ dV + \int\limits_V \delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{w}\cdot\nabla\big)\vec{u}\ dV +$$

$$+\int\limits_V \delta\vec{w}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u}\ dV - \int\limits_V \vec{w}\cdot(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}\ dV. \qquad (2.29)$$

Здесь $dS$ – элемент площади поверхности $\partial V$ около вектора единичной внешней нормали $\vec{n}$. Функция $E_\delta(t)$ принадлежит классу гладкости $C^1([0,\ T])$. В силу краевых условий (1.4), (2.10) и свойств гладкости полей $(\vec{u},p)$, $(\delta\vec{u},\delta p)$ поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_{\partial V} (\delta\vec{A}\cdot\vec{n})\ dS$$

обращается в нуль. Поэтому

$$\frac{dE_\delta(t)}{dt} + 2\eta\int\limits_V \big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}):\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big)\ dV + \frac{1}{\tau}\int\limits_V \delta\vec{w}^2\ dV =$$

$$= -\int\limits_V \delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u}\ dV + \int\limits_V \delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{w}\cdot\nabla\big)\vec{u}\ dV +$$

$$+\int\limits_V \delta\vec{w}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u}\ dV - \int\limits_V \vec{w}\cdot(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}\ dV. \qquad (2.30)$$

Следствием (2.30) является неравенство

$$\frac{dE_\delta(t)}{dt} + 2\eta\int\limits_V \big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}):\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big)\ dV + \frac{1}{\tau}\int\limits_V \delta\vec{w}^2\ dV \leqslant$$

$$\leqslant \Big|\int\limits_V \delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u}\ dV\Big| + \Big|\int\limits_V \delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{w}\cdot\nabla\big)\vec{u}\ dV\Big| +$$

$$+\Big|\int\limits_V \delta\vec{w}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u}\ dV\Big| + \Big|\int\limits_V \vec{w}\cdot(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}\ dV\Big|, \tag{2.31}$$

которое выполняется при любом $t \in [0,\ T]$.

Теперь последовательно оценим сверху все члены в правой части (2.31). Согласно теореме Вейерштрасса любая непрерывная на метрическом компакте функция ограничена. Пользуясь этой теоремой, предположением о существовании решения $(\vec{u}, p)$ и свойствами его гладкости, убеждаемся в существовании таких положительных постоянных $M_1$ и $M_2$, что выполняются неравенства

$$\max_{i,j=\overline{1,3}}\ \max_{(\vec{x},t)\in\overline{Q}}\Big|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big| \leqslant M_1, \tag{2.32}$$

$$\max_{i=\overline{1,3}}\ \max_{(\vec{x},t)\in\overline{Q}}\Big|\sum_{j=1}^{3} u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i}\Big| \leqslant M_2. \tag{2.33}$$

Принимая во внимание (2.32), (2.33), имеем

$$\Big|\int\limits_V \delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u}\ dV\Big| \leqslant \int\limits_V \Big|\sum_{i,j=1}^{3}\delta u_i\delta u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big|\ dV \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}|\delta u_i||\delta u_j|\Big|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big|\ dV \leqslant M_1\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}|\delta u_i||\delta u_j|\ dV \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_1}{2}\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}\big(\delta u_i^2 + \delta u_j^2\big)\ dV = 3M_1\int\limits_V \delta\vec{u}^2\ dV = 6M_1E_\delta(t), \tag{2.34}$$

$$\Big|\int\limits_V \delta\vec{u}\cdot\big(\delta\vec{w}\cdot\nabla\big)\vec{u}\ dV\Big| \leqslant \int\limits_V \Big|\sum_{i,j=1}^{3}\delta u_i\delta w_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big|\ dV \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}|\delta u_i||\delta w_j|\Big|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big|\ dV \leqslant M_1\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}|\delta u_i||\delta w_j|\ dV \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_1}{2}\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\delta u_i^2}{\varepsilon_1} + \varepsilon_1\delta w_j^2\Big)\ dV = \frac{3M_1}{\varepsilon_1}E_\delta(t) + \frac{3M_1\varepsilon_1}{2}\int\limits_V \delta\vec{w}^2\ dV, \tag{2.35}$$

$$\Big|\int\limits_V \delta\vec{w}\cdot\big(\delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u}\ dV\Big| \leqslant \int\limits_V \Big|\sum_{i,j=1}^{3}\delta w_i\delta u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big|\ dV \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}|\delta w_i||\delta u_j|\Big|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big|\ dV \leqslant M_1\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}|\delta u_j||\delta w_i|\ dV \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_1}{2}\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\delta u_j^2}{\varepsilon_1}+\varepsilon_1\delta w_i^2\Big)\,dV=\frac{3M_1}{\varepsilon_1}E_\delta(t)+\frac{3M_1\varepsilon_1}{2}\int\limits_V \delta\vec{w}^2\,dV, \tag{2.36}$$

$$\Big|\int\limits_V \vec{w}\cdot(\delta\vec{u}\cdot\nabla)\delta\vec{u}\,dV\Big|\leqslant\int\limits_V\Big|\sum_{i,j=1}^{3}w_i\delta u_j\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\Big|\,dV\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_V\sum_{i,j=1}^{3}|w_i||\delta u_j|\Big|\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\Big|\,dV\leqslant\tau M_2\int\limits_V\sum_{i,j=1}^{3}|\delta u_j|\Big|\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\Big|\,dV\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\tau M_2}{2}\int\limits_V\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\delta u_j^2}{\varepsilon_2}+\varepsilon_2\Big(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\Big)^2\Big)\,dV=$$

$$=\frac{3\tau M_2}{\varepsilon_2}E_\delta(t)+\frac{\tau M_2\varepsilon_2}{2}\int\limits_V\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\Big)^2\,dV. \tag{2.37}$$

Здесь $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ – произвольные положительные константы. При проведении оценок были использованы определения величин $E_\delta(t)$ и $\vec{w}$, свойства интеграла Лебега и неравенство Коши

$$|a||b|\leqslant\frac{1}{2}\Big(\frac{a^2}{\varepsilon}+\varepsilon b^2\Big),$$

справедливое для любых вещественных чисел $a$, $b$ и для произвольного $\varepsilon>0$.

Из (2.31), (2.34) – (2.37) вытекает неравенство

$$\frac{dE_\delta(t)}{dt}+2\eta\int\limits_V\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}):\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big)\,dV+\frac{1}{\tau}\int\limits_V\delta\vec{w}^2\,dV\leqslant$$

$$\leqslant 3\Big(2M_1+\frac{2M_1}{\varepsilon_1}+\frac{\tau M_2}{\varepsilon_2}\Big)E_\delta(t)+$$

$$+\frac{\tau M_2\varepsilon_2}{2}\int\limits_V\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\Big)^2\,dV+3M_1\varepsilon_1\int\limits_V\delta\vec{w}^2\,dV. \tag{2.38}$$

Второе слагаемое в левой части (2.38) можно оценить снизу с помощью неравенства Корна

$$\frac{1}{2}\int\limits_V\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\Big)^2\,dV\leqslant\int\limits_V\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}):\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\big)\,dV, \tag{2.39}$$

которое выполняется для любых вектор функций $\delta\vec{u}$ класса $\mathbf{C}^2(V)\cap\mathbf{C}^1(\overline{V})$, обращающихся в нуль на $\partial V$. Простое доказательство неравенства Корна опубликовано, например, в [12]. Комбинация (2.38) и (2.39) дает

$$\frac{dE_\delta(t)}{dt}+\Big(\frac{1}{\tau}-3M_1\varepsilon_1\Big)\int\limits_V\delta\vec{w}^2\,dV+\Big(\eta-\frac{\tau M_2\varepsilon_2}{2}\Big)\int\limits_V\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\Big)^2\,dV\leqslant$$

$$\leqslant 3\Big(2M_1+\frac{2M_1}{\varepsilon_1}+\frac{\tau M_2}{\varepsilon_2}\Big)E_\delta(t). \tag{2.40}$$

Используя произвол в выборе положительных постоянных $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$, положим

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{3\tau M_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{2\eta}{\tau M_2}. \tag{2.41}$$

Тогда второй и третий члены в левой части (2.40) обратятся в нуль. Подставляя (2.41) в (2.40), получим дифференциальное неравенство

$$\frac{dE_\delta(t)}{dt} - ME_\delta(t) \leqslant 0, \quad t \in [0,\ T]. \tag{2.42}$$

Здесь

$$M = 6\Big(M_1 + 3\tau M_1^2 + \frac{\tau^2 M_2^2}{4\eta}\Big)$$

– положительная константа, не зависящая от выбора $t$.

Введем функцию $J_\delta(t) = E_\delta(t)e^{-Mt}$ и запишем (2.42) в эквивалентном виде

$$e^{Mt}\frac{dJ_\delta(t)}{dt} \leqslant 0.$$

Экспонента принимает только положительные значения, поэтому

$$\frac{dJ_\delta(t)}{dt} \leqslant 0, \quad t \in [0,\ T].$$

Отсюда следует, что $J_\delta(t)$ убывает и для любого $t \in [0,\ T]$ имеет место неравенство

$$J_\delta(t) \leqslant J_\delta(0).$$

Его можно представить в равносильной форме

$$E_\delta(t) \leqslant E_\delta(0)e^{Mt}. \tag{2.43}$$

Но

$$E_\delta(0) = 0 \tag{2.44}$$

в силу начального условия (2.9) и свойств гладкости векторного поля $\delta\vec{u}$. Из (2.43), (2.44) и (2.28) вытекает оценка

$$\int\limits_V \delta\vec{u}^2\ dV \leqslant 0, \tag{2.45}$$

справедливая при любом $t \in [0,\ T]$. Интегрирование (2.45) по отрезку $[0,\ T]$ дает

$$\int\limits_Q \delta\vec{u}^2\ dVdt \leqslant 0. \tag{2.46}$$

Условие (2.46) может выполняться только в том случае, когда

$$\delta\vec{u} = \delta\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{0} \tag{2.47}$$

для всех $(\vec{x},t) \in \overline{Q}$. Итак, $\vec{u}(\vec{x},t) \equiv \vec{u}_1(\vec{x},t)$ в $\overline{Q}$.

Подставим теперь (2.47) в (2.7). Получим

$$\operatorname{div}\,(\nabla\delta p) = 0, \quad \vec{x} \in V, \quad t \in [0,\ T]. \tag{2.48}$$

Умножим обе части равенства (2.48) на $\delta p$ и преобразуем результат к виду

$$(\nabla\delta p)^2 = \operatorname{div}\,(\delta p \nabla\delta p). \tag{2.49}$$

Проинтегрируем (2.49) по области $V$ и воспользуемся формулой Гаусса–Остроградского:

$$\int\limits_V (\nabla\delta p)^2\ dV = \iint\limits_{\partial V} \delta p \frac{\partial\delta p}{\partial\vec{n}}\ dS. \tag{2.50}$$

При $\delta\vec{u} = 0$ второе краевое условие (2.10) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial\delta p}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial V} = 0, \quad t \in [0,\ T]. \tag{2.51}$$

В силу (2.51) правая часть (2.50) обращается в нуль. А это означает, что

$$\int\limits_V (\nabla\delta p)^2\ dV = 0. \tag{2.52}$$

При нормировке (2.11) неравенство Пуанкаре (см. [20]) для функции $\delta p$ можно записать так:

$$\int\limits_V \delta p^2\ dV \leqslant c_P \int\limits_V (\nabla\delta p)^2\ dV. \tag{2.53}$$

Здесь $c_P$ – положительная постоянная, зависящая только от геометрических характеристик $V$. Следствием (2.52), (2.53) является оценка

$$\int\limits_V \delta p^2\ dV \leqslant 0, \quad t \in [0,\ T]. \tag{2.54}$$

Интегрирование (2.54) по множеству $[0,\ T]$ дает

$$\int\limits_Q \delta p^2\ dV dt \leqslant 0. \tag{2.55}$$

Условие (2.55) будет выполнено лишь в случае, когда

$$\delta p = \delta p(\vec{x}, t) = 0$$

при всех $(\vec{x}, t) \in \overline{Q}$. Таким образом, $p(\vec{x}, t) \equiv p_1(\vec{x}, t)$ в $\overline{Q}$. Теорема доказана. ■

Заметим, что равенство (2.30) было получено в [9] – [11], где единственность решения аналогично поставленной задачи установлена лишь в некотором классе полей $(\vec{u}, p)$, связанных с этим решением. В данной статье единственность классического решения доказана без всяких ограничений. По мнению автора актуальными являются следующие открытые проблемы:

**Проблема 1.** *Доказать существование классического решения начально-краевой задачи* (1.1) – (1.5) *при достаточно малом* $T > 0$.

**Проблема 2.** *Доказать существование и единственность обобщенного решения начально-краевой задачи* (1.1) – (1.5) *при достаточно малом* $T > 0$.

**Проблема 3.** *Доказать существование классического решения начально-краевой задачи* (1.1) – (1.5) *при произвольном* $T > 0$.

**Проблема 4.** *Доказать существование и единственность обобщенного решения начально-краевой задачи* (1.1) – (1.5) *при произвольном* $T > 0$.

При этом обобщенное решение может пониматься в различных смыслах. Особый интерес представляют также свойства решения, в частности, энергетические оценки для него. Некоторые результаты в этом направлении опубликованы в [12].

## Заключение

Доказанная в данной работе теорема свидетельствует о строго детерминированном описании рассматриваемых течений слабосжимаемой вязкой жидкости КГД системой. Открытой остается проблема существования решений КГД уравнений, о которой, помимо автора [9], упоминал известный французский гидродинамик Р. Зейтунян (см. [6], с. 56). Особый интерес представляет также обобщение полученного результата на случай движений сжимаемых вязких теплопроводных сред, описываемых полными квазигидродинамическими уравнениями.

## Список литературы

[1] Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. — М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 256 с.

[2] Serrin J. On the Uniqueness of Compressible Fluid Motions // Arch. for Rational Mech. and Analysis. — 1959. — V. 3, № 1. — P. 271–288.

[3] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970. — 288 с.

[4] Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье–Стокса, существование и гладкость // Успехи мат. наук. — 2003. — Т. 58, Вып 2. — С. 45–78.

[5] Белоносов С.М., Черноус К.А. Краевые задачи для уравнений Навье–Стокса. — М.: Наука, 1985. — 312 с.

[6] Зейтунян Р.Х. Корректность задач динамики жидкостей (гидродинамическая точка зрения) // Успехи мат. наук. — 1999. — Т. 54, Вып 3. — С. 3–92.

[7] Feireisl E. Mathematical Theory of Compressible, Viscous, and Heat Conducting Fluids // Computers and Mathematics with Applications. — 2007. — V. 53. — P. 461–490.

[8] Шеретов Ю.В. Математические модели гидродинамики: учеб. пособие. — Тверь: Тверской гос. ун–т, 2004. — 80 с.

[9] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Мат. моделирование. — 1994. — Т. 6, № 10. — С. 35–45.

[10] Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений: дис. ... докт. физ. – мат. наук. Тверь, 2000. — 236 с.

[11] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. — М.– Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. — 400 с.

[12] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях уравнений Навье–Стокса, Эйлера и квазигидродинамических уравнений // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. — 2010. — Вып. 17. — С. 41–58.

[13] Шеретов Ю.В. Методы построения точных решений квазигидродинамических уравнений // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. — 2011. В печати.

[14] Злотник А.А. О параболичности квазигидродинамической системы и устойчивости малых возмущений для нее // Мат. заметки. — 2008. — Т. 83, Вып. 5. — С. 667–682.

[15] Злотник А.А., Гаврилин В.А. О критериях параболичности квазигидродинамической системы уравнений в случае реального газа // Вестник МЭИ. — 2009, №6. — С. 116–126.

[16] Злотник А.А. Линеаризованная устойчивость равновесных решений квазигазодинамической системы уравнений // Докл. РАН. — 2010. — Т. 433, № 5. — С. 599–603.

[17] Elizarova T.G. Quasi–Gas Dynamic Equations. Berlin–Heidelberg: Springer, 2009. — 286 p.

[18] Жериков А.В. Применение квазигидродинамических уравнений: математическое моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2010. — 124 с.

[19] Елизарова Т.Г., Булатов О.В. Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2011. — Т. 51, № 1. — С. 170–184.

[20] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985. — 589 с.