## ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 517.54

# ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И КВАДРАТИЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ[1]

**Шеретов В.Г.**
Кафедра математического анализа
`Vladimir.Sheretov@tversu.ru`

Доказано существование гармонических представителей в свободных гомотопических классах квазиконформных отображений конечных римановых поверхностей. Метод доказательства основан на соответствии сингулярных слоений, определяемых парами мероморфных квадратичных дифференциалов на отображаемых поверхностях.

The proof of the existence of harmonic maps in the free homotopic class of quasiconformal maps of the finite Riemann surfaces is given. The method of the proof is based on the correspondence between the singular foliations defined by the pair meromorphic quadratic differentials on the mapped surfaces.

**Ключевые слова:** гармонические отображения; римановы поверхности; квадратичные дифференциалы.
**Keywords:** harmonic maps; Riemann surfaces; quadratic differentials.

**1.** В монографии [1] дано доказательство теоремы Йоста-Шёна о существовании в свободных гомотопических классах $\mathcal{F}$ сохраняющих ориентацию квазиконформных гомеоморфизмов $f$ между компактными гиперболическими римановыми поверхностями $S$ и $S'$ гармонических относительно римановых метрик $\sigma^2$ класса $C^3(S')$ диффеоморфизмов. Ранее при дополнительных ограничениях на гауссову кривизну метрики $\sigma$ этот результат был получен С.Яо и Шёном, а также Дж.Сэмпсоном. Здесь предлагается некоторое обобщение этих результатов.

Диффеоморфизм $f_0 \in \mathcal{F}$ называется (слабо) гармоническим относительно римановой метрики $\sigma^2$ на поверхности $S'$, если ассоциированный с ним квадратичный дифференциал Хопфа $\varphi_0 = \sigma^2 \circ f_0\, f_{0z}\overline{f}_{0\overline{z}}dz^2$ является голоморфным на $S$. В [2; 3] было доказано, что при любом $q > q(\mathcal{F})$, где $q(\mathcal{F})$ – отклонение тейхмюллерова отображения $f_T$ в классе $\mathcal{F}$, в классе $\mathcal{F}_q$ $q-$квазиконформных отображений из $\mathcal{F}$ существует отображение $f_q$ типа Тейхмюллера, минимизирующее в $\mathcal{F}_q$ интеграл энергии $E_\sigma(f) = \iint_S [|f_z|^2 + |f_{\overline{z}}|^2]\sigma^2 \circ f(z)\, dx\, dy$. При этом комплексная характеристика $\mu_q = f_{q\overline{z}}/f_{q\,z}$ имеет вид $|\mu_q\varphi_q|/\varphi_q$, где $\varphi_q$ – голоморфный квадратичный дифференциал на римановой поверхности $S$ и дифференциал Хопфа $\sigma^2 \circ f_q\, f_{qz}\overline{f}_{q\overline{z}}dz^2 =: \phi_q$ является голоморфным на связных компонентах открытого

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 04–01–00368).

подмножества $U \subset S$, где $|\mu_q| < (q-1)/(q+1)$ почти всюду, и $\phi_q$ с точностью до положительной константы совпадает с $\varphi_q$. Наконец, обратное отображение $f_q^{-1}$ также является отображением типа Тейхмюллера.

**2.** Рассмотрим свободный гомотопический класс $\mathcal{F}'$ сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов $f$ между компактными римановыми поверхностями $S$ и $S'$ положительного рода, имеющих суммируемые с квадратами соболевские обобщенные производные первого порядка. В случае $g = 1$ дополнительно предполагается, что отображения класса $\mathcal{F}'$ нормированы условием $f(P_0) = Q_0$, где $P_0 \in S$, $Q_0 \in S'$ – фиксированные точки. Существование в классе $\mathcal{F}'$ слабо гармонических относительно метрик с изолированными нулями имеет свои особенности (см. [4]). Например, если число нулей у метрики больше, чем $4g-4$, то дифференциал Хопфа будет иметь не меньшее число нулей и, будучи голоморфным, должен быть тождественным нулем. Стало быть, слабо гармонический гомеоморфизм в этом случае обязательно является конформным.

Пусть метрика $\sigma^2$ отделена от нуля, т. е. существует такая константа $c > 0$, что в замкнутом фундаментальном многоугольнике Дирихле $\overline{P(\Gamma')}$ фуксовой группы, представляющей конечную риманову поверхность $S'$ как орбифолд $\Delta/\Gamma'$, выполняется неравенство $\sigma(w) \geqslant c$.

**Теорема 1.** *Пусть $\sigma^2(w)|dw|^2$ – непрерывная отделенная от нуля метрика на компактной римановой поверхности $S'$. Если в свободном гомотопическом классе $\mathcal{F}'$ гомеоморфизмов $f : S \to S'$ существует слабо гармоническая экстремаль $f_0$ интеграла энергии $E_\sigma(f)$, то она является $k$–квазиконформным отображением.*

*Доказательство.* Перейдем к отображениям универсальных накрывающих – единичных кругов – и рассмотрим гомеоморфизм $w = f_0(z) : \Delta \to \Delta$. Образом замкнутого фундаментального многоугольника Дирихле $\overline{P(\Gamma)}$ будет замкнутый фундаментальный многоугольник $\overline{P(\Gamma')}$. Дифференциалу Хопфа отвечает $\Gamma$–автоморфная форма $\varphi(z)$ веса (-4). Пусть $\max_{z\in\overline{P}(\Gamma)} |\varphi(z)| = M$, где $M$ – положительная константа. Имеем

$$|\sigma^2 \circ f_0(z)\, f_{0z}\, \overline{f_{0\bar z}}| \leqslant M$$

п.в. в $\overline{P(\Gamma)}$. Делая замену переменной $w = f_0(w)$ и вводя обозначение $\kappa(w) = \mu_{f_0^{-1}}$, получим

$$\sigma(w)\frac{|\kappa(w)|}{1-|\kappa(w)|^2} \leqslant M$$

п.в. в $\overline{P(\Gamma')}$. Так как $\sigma(w) \geqslant c > 0$ всюду в $\overline{P(\Gamma')}$, находим

$$\frac{|\kappa(w)|}{1-|\kappa(w)|^2} \leqslant \frac{M}{c}$$

п.в. в $\overline{P(\Gamma')}$. Функция $x/(1-x^2)$ монотонно возрастает на промежутке $[0,\,1)$, поэтому

$$\|\kappa\|_\infty \leqslant k := \sqrt{\frac{c^2}{4\,M^2}+1} - \frac{c}{2\,M} < 1.$$

Отсюда следует, что $\|\mu_{f_0}\|_\infty \leqslant k$, что означает $k$–квазиконформность слабо гармонического гомеоморфизма $f_0$. Теорема 1 доказана. ∎

**3.** По–прежнему предполагая метрику $\sigma^2 \in C(S')$ нормированной и отделенной от нуля константой $c > 0$, предположим, что в классе $\mathcal{F}'$ не существует квазиконформной экстремали интеграла энергии $E_\sigma(f)$. Пусть $f_T$ – тейхмюллерово отображение в классе $\mathcal{F}'$, $\mathcal{K}(f_T) = q' > 1$. Тогда для любого $q > q'$ имеем $E(f_q) \leqslant E(f_T)$ для любой экстремали $f_q$ в классе $\mathcal{F}'_q := \{f \in \mathcal{F}' : |\mu_f| \leqslant (q-1)/(q+1) =: k_q\}$ п.в. Пусть $W_q := \{w \in S' : |\mu_{f_q^{-1}}| = k_q\}$ п.в. Для двумерной меры $m\,W_q$ Лебега множества $W_q$ имеем

$$0 < c^2\,\frac{k_q^2}{1-k_q^2}\,m\,W_q < E_\sigma(f_q) < E_\sigma(f_T).$$

Стало быть, справедлива оценка

$$0 < m\,W_q < \frac{E_\sigma(f_T)}{c^2}\,\frac{4q}{(q+1)^2}.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $f_q$, что $m\,W_q < \varepsilon$. Пусть $m = \inf E_\sigma(f)$, где инфимум берется по классу $\mathcal{F}'$. В силу нормировки имеем

$$E_\sigma(f) = \frac{1}{2} + \iint_{S'} \frac{|\kappa_f|^2}{1-|\kappa_f|^2}\sigma^2(w)\,du\,dv,$$

где $\kappa_f$ – комплексная характеристика отображения $f^{-1}$. Как следствие получим, что $m > 1/2$. Равенство $m = 1/2$ возможно только в том случае, когда в классе $\mathcal{F}'$ существует конформное отображение, а это исключено сделанным предположением. Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{f_n\} \subset \mathcal{F}'$ экстремалей интеграла $E_\sigma(f)$ в классах $\mathcal{F}'{}_n$, такую, что

$$\|\mu_{f_n}\|_\infty \leqslant \frac{n-1}{n+1},\ \ n \in \mathbb{N},\ \ n > q'.$$

Таким образом, $\lim_{n\to\infty} E_\sigma(f_n) = m$. Без ограничения общности можно считать последовательность $\{E_\sigma(f_n)\}$ монотонной.

Дифференциалы Хопфа $\{\varphi_n\}$ принадлежат $L_1(S)$, отличны от нуля п.в. и голоморфны на связных компонентах множества $S\setminus f_n^{-1}(W_n)$. Так как гомеоморфизмы $f_n$ являются отображениями типа Тейхмюллера, с ними ассоциируются голоморфные квадратичные дифференциалы $\phi_n \in C_1(S)$. Единичная сфера $C_1(S)$ пространства $Hol(S)$ голоморфных квадратичных дифференциалов на компактной римановой поверхности рода $g > 0$ компактна, поэтому можно без ограничения общности считать, что $\phi_n$ сходятся по норме к элементу $\phi_0 \in C_1(S)$ при $n \to \infty$.

С отображениями $f_n^{-1}$ ассоциируются голоморфные квадратичные дифференциалы $\psi_n \in C_1(S')$, и без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{\psi_n\}$ сходится к элементу $\psi_0 \in C_1(S')$ в силу аналогичных соображений. Как известно [2; 3], каждое квазиконформное отображение устанавливает гомеоморфизм между траекториями (ортогональными траекториями) $\phi_n$ на $S$ и траекториями (ортогональными траекториями) $\psi_n$ на $S'$, причем нули этих дифференциалов соответствуют друг другу, так что порядки их равны и сингулярные слоения, образуемые траекториями (ортогональными траекториями) дифференциалов также гомеоморфно соответствуют друг другу. Каждая точка $P \in S$

инцидентна паре проходящих через нее кривых – траектории и ортогональной траектории $\phi_0$ и аналогичный факт имеет место для точек $Q \in S'$ по отношению к $\psi_0$. Это позволяет установить гомеоморфизм $f_0$ между точками $P \in S$ и $Q \in S'$ с помощью дифференциалов $\phi_0$ и $\psi_0$. Отображение $f_0^{-1}$ принадлежит классу $\mathcal{F}'^{-1}$ как предел последовательности $f_n^{-1} \in \mathcal{F}'^{-1}$, причем по построению является локально квазиконформным гомеоморфизмом. Полунепрерывность снизу интеграла энергии $E_\sigma(f)$ позволяет заключить, что $f_0$ – его экстремаль, которая в силу теоремы 1 является $k$–квазиконформным гомеоморфизмом.

Итогом проведенного анализа является

**Теорема 2.** *Пусть $\sigma^2(w)|dw|^2$ – непрерывная отделенная от нуля метрика на компактной римановой поверхности $S'$. В каждом свободном гомотопическом классе $\mathcal{F}'$ сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов $f : S \to S'$, имеющих суммируемые с квадратами обобщенные соболевские производные $f_z$ и $f_{\overline{z}}$, существует слабо гармоническая экстремаль $f_0$ интеграла энергии $E_\sigma(f)$, которая является $k$–квазиконформным отображением с некоторым $k < 1$.*

**Замечание.** Вместо слоений, определяемых парой голоморфных квадратичных дифференциалов, можно использовать развитый У.Терстоном язык теории геодезических ламинаций и измеримых слоений. Гармоническое отображение $f_0$ относится к так называемым псевдоаносовским отображениям ( см. [7; 8]).

Методом Альфорса перехода к двулистным или четырехлистным накрывающим можно обобщить результаты данной работы на некоторые конечные римановы поверхности типа $(g,\, n,\, l)$.

**Теорема 3.** *Пусть $\sigma^2(w)|dw|^2$ – непрерывная отделенная от нуля метрика на конечной римановой поверхности $S'$ типа $(g,\, n,\, l)$, имеющей конечномерные пространства голоморфных квадратичных дифференциалов с конечной нормой – площадью. В каждом свободном гомотопическом классе $\mathcal{F}'$ сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов $f : S \to S'$, имеющих суммируемые с квадратами обобщенные соболевские производные $f_z$ и $f_{\overline{z}}$, существует слабо гармоническая экстремаль $f_0$ интеграла энергии $E_\sigma(f)$, которая является $k$–квазиконформным отображением с некоторым $k < 1$. Дифференциал Хопфа принимает на граничных контурах $\gamma_j \in \partial S$ действительные значения, т.е. является квадратичным дифференциалом Шоттки – Альфорса. Гомеоморфизм $f_0$ является экстремалью интеграла $E_\sigma(f)$ в классе $\mathcal{F}'$.*

**4.** Пусть $n$ – натуральное число, большее трех, и $\delta_n = \{e^{2\pi\, i\, k/n},\, k = 0, \cdots, n-1\}$ – простой дивизор на единичной окружности $\partial\Delta$. Символом $\omega_n$ обозначим его $\omega$–образ $\{\omega(e^{2\pi\, i\, k/n}),\, k = 0, \cdots, n-1\}$, где $\omega$ – заданный аналитический гомеоморфизм единичной окружности на замкнутую жорданову кривую $\gamma_D$, ограничивающую область $D$. Далее, пусть $\hat{BL}(\omega_n)$ – класс всех сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов $f$ круга $\Delta$ на область $D$, имеющих локально суммируемые с квадратами соболевские обобщенные производные первого порядка и нормированных условиями $f(e^{2\pi\, i\, k/n}) = \omega(e^{2\pi\, i\, k/n})$, $k = 0, \cdots, n-1$, таких, что $E_\sigma(f) < \infty$.

Напомним, что квадратичный дифференциал Шоттки – Альфорса в $\Delta$ допускает продолжение по симметрии на $\hat{\mathbb{C}}$, принимающее действительные значения вдоль $\partial\Delta \setminus \delta_n$ и имеющее, быть может, простые полюсы в точках дивизора $\delta_n$.

Следствием теоремы 3 является

**Теорема 4.** *В любом описанном выше классе $\hat{BL}(\omega_n)$ существует (слабо) гармоническое $k$–квазиконформное отображение $f_0$, причем его дифференциал Хопфа является квадратичным дифференциалом Шоттки – Альфорса на римановой поверхности $\overline{D}\backslash\omega(\delta_n)$. Гомеоморфизм $f_0$ является экстремалью интеграла энергии в классе $\hat{BL}(\omega_n)$.*

В частности, при $\sigma = 1$ (случай евклидовой метрики) получаем теорему существования классического гармонического отображения $f_0 : \Delta \to D$ в классе $\hat{BL}(\omega_n)$. Это значит, что дискретное отображение $\delta_n \to \omega(\delta_n)$ допускает такое восполнение до квазисимметрического гомеоморфизма $\tilde{\omega} : \partial\Delta \to \partial D$, что интеграл Пуассона с плотностью $\tilde{\omega}$ реализует классическое гармоническое квазиконформное диффеоморфное отображение единичного круга на область $D$.

**5.** Рассмотрим экстремали интеграла $\overline{\partial}$–энергии [5]

$$\tilde{E}(f) = \iint\limits_{\Delta} |f_{\overline{z}}|^2 \sigma^2 \circ f(z) dx\, dy,$$

где $\sigma = \sigma(w)|dw| = (1-|w|^2)^{-1}|dw|$ – метрика Пуанкаре в единичном круге $\Delta$, в классе $\hat{BL}(\omega)$ сохраняющих ориентацию автогомеоморфизмов $f$ круга, имеющих локально суммируемые с квадратами соболевские обобщенные производные первого порядка, совпадающих на его границе $\partial\Delta$ с заданной квазисимметрической функцией $\omega$, гомеоморфно отображающей эту окружность на себя и имеющих конечный интеграл $\tilde{E}(f)$. Из результатов Г.Д.Суворова [6] следует, что подклассы $\hat{BL}_s(\omega)$ отображений из $\hat{BL}(\omega)$, имеющих ограниченные числом $s$ интегралы $\tilde{E}(f)$, компактны в топологии равномерной сходимости, и если последовательность элементов $f_n \in \hat{BL}_s(\omega)$ равномерно сходится к $f$, то последовательности $\{f_{nz}\}$ и $\{f_{n\overline{z}}\}$ слабо сходятся к $f_z$ и $f_{\overline{z}}$ соответственно. Гипотеза Р. Шена состоит в том, что экстремали интеграла $\tilde{E}(f)$ в классе $\hat{BL}(\omega)$ существуют и являются конформными либо квазиконформными гармоническими относительно метрики $\sigma$ отображениями, т.е. удовлетворяют квазилинейному уравнению

$$f_{z\overline{z}} + 2\frac{\overline{f(z)}}{1-|f(z)|^2} f_z\, f_{\overline{z}} = 0. \tag{1}$$

**Теорема 5.** *Если отличный от конформного квазиконформный гомеоморфизм $f_0$ доставляет минимум интегралу $\tilde{E}(f)$ в классе $\hat{BL}(\omega)$, то дифференциал Хопфа $\varphi_0 = \sigma^2 \circ f_0(z)\, f_{0z}\overline{f_{0\overline{z}}}dz^2$ принадлежит банахову пространству $Hol(\Delta, |\mu_{f_0}|)$, образованному голоморфными квадратичными дифференциалами $\varphi$ в $\Delta$ с весовой нормой*

$$\|\varphi\|^* = \iint\limits_{\Delta} |\mu_{f_0}||\varphi| dx\, dy.$$

*Доказательство.* Если в классе $\hat{BL}(\omega)$ имеется конформное отображение $f_0$, то оно и будет экстремалью интеграла энергии. В этом случае $f_{0\overline{z}} = 0$ и дифференциал Хопфа равен нулю. Пусть $f_0$ – отличная от конформной квазиконформная экстремаль и $\varphi \notin Hol(\Delta, |\mu_{f_0}|$. Из очевидного неравенства

$$\iint\limits_{\Delta} |\mu_{f_0}| \frac{|f_{0z} f_{0\overline{z}}|}{(1-|f_0(z)|^2)^2} |dx\, dy$$

$$\leqslant \iint\limits_{\Delta} \frac{|\kappa_0|^2}{(1-|\kappa_0|^2)(1-|w|^2)^2} du\, dv = \tilde{E}(f_0) < \infty,$$

где $\kappa_0 = \mu_{f_0^{-1}}$, следует конечность весовой нормы дифференциала Хопфа. Любая тривиальная вариация $H(z,\,\varepsilon)$ допустима. Рассмотрим банахово пространство $L_1(\Delta,\,|\mu_{f_0}|)$ суммируемых с весом $|\mu_{f_0}|$ функций $\psi$ в $\Delta$ с весовой нормой

$$||\psi||^* := \iint\limits_{\Delta} |\psi|\,|\mu_{f_0}| dx\, dy.$$

Так как $\varphi_0 \notin Hol(\Delta,\,|\mu_{f_0}|)$, имеем

$$d := \inf_{\varphi \in Hol(\Delta,\,|\mu_{f_0}|)} \|\varphi - \varphi_0\|^* > 0.$$

По следствию из теоремы Хана – Банаха и теореме Рисса на $L_1(\Delta,\,|\mu_{f_0}|)$ существует такой линейный функционал $l(\psi) = \iint_\Delta \nu\psi dx\, dy$, что $l(\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in Hol(\Delta,\,|\mu_{f_0}|)$ и $l(\varphi_0) = d$. Дифференциал Бельтрами $\nu$, ассоциированный с $l(\psi)$, локально тривиален на $\Delta$, поскольку $l(\varphi) = 0$ для $\varphi \in Hol(\Delta,\,|\mu_{f_0}|)$, и следовательно, $\iint_\Delta \nu\phi dx\, dy = 0$ для элементов $\phi$ пространства $Hol(\Delta)$, образованного голоморфными в $\Delta$ квадратичными дифференциалами с конечной нормой $||\varphi|| := \iint_\Delta |\varphi| dx\, dy$. Пусть $H(z,\,\varepsilon)$ – тривиальная вариация поверхности $\Delta$ с комплексной характеристикой $\varepsilon\nu + O(\varepsilon^2)$. Ей соответствует тривиальная вариация $\hat{H}(w,\,\varepsilon) := f_0 \circ H \circ f_0^{-1}$ единичного круга $\Delta = \Delta_w \subset \mathbb{C}_w$ с комплексной характеристикой $\hat{H}_{\overline{w}}/\hat{H}_w = \varepsilon\hat{\nu} + 0(\varepsilon^2)$, где $\hat{\nu}$ – локально тривиальный дифференциал Бельтрами. Вычислим соответствующую первую вариацию функционала $\tilde{E}(f)$ в точке $f_0$. Делая замену переменной $w = f_0(z)$, находим

$$\tilde{E}(f_0 \circ H^{-1}) = \iint\limits_{\Delta} \frac{|\kappa + \varepsilon\hat{\nu} - \varepsilon\bar{\nu}\kappa^2 + O(\varepsilon)^2|^2}{1 - |\kappa + \varepsilon\hat{\nu} - \varepsilon\bar{\nu}\kappa^2 + O(\varepsilon)^2|^2} \sigma^2(w) du\, dv + O(\varepsilon^2)$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \frac{|\kappa|^2 + 2\varepsilon\, Re\, \overline{\hat{\nu}}\kappa(1 - |\kappa|^2) + O(\varepsilon)^2}{(1 - |\kappa|^2)(1 - 2\varepsilon\, Re\, \overline{\hat{\nu}}\kappa) + O(\varepsilon)^2} \sigma^2(w) du\, dv + O(\varepsilon^2)$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \frac{|\kappa|^2}{(1 - |\kappa|^2)} (1 + 4\varepsilon\, Re\, \overline{\hat{\nu}}\kappa/|\kappa|^2 + O(\varepsilon^2))\sigma^2(w) du\, dv + O(\varepsilon^2).$$

Отсюда находим

$$\delta\hat{E}(f_0) = 4\, Re \iint\limits_{\Delta} \frac{\overline{\hat{\nu}}\kappa_0}{1 - |\kappa_0|^2} \sigma^2(w) du\, dv$$

$$= -4\, Re \iint\limits_{\Delta} \nu\sigma^2 \circ f_0(z)\, f_{0z}\overline{f_{0\overline{z}}} dx\, dy = -4\, Re\, (\nu,\,\varphi_0).$$

На последнем шаге выполнена замена переменной $z = f_0^{-1}$. Таким образом, $\delta\hat{E}(f_0) = -4\, d < 0$ вопреки экстремальному свойству отображения $f_0$. Противоречие означает, что $\varphi_0 \in Hol(\Delta)$. Теорема 1 доказана. ∎

Теперь предположим, что в классе $\hat{BL}(\omega)$ существует отображение $f_0$, с которым ассоциируется голоморфный дифференциал Хопфа $\varphi_0$. В круге $\Delta_\varepsilon = \{z \in \Delta : |z| \leqslant \varepsilon\}$, $\varepsilon < 1$, имеем п.в.

$$|\mu_0(z)| \frac{|f_{0z}|\,|f_{0\bar{z}}|}{(1-|f_0(z)|^2)}^2 \leqslant \max_{\Delta_\varepsilon} |\varphi_0(z)| =: M = M(\varepsilon).$$

Делая замену переменной $w = f_0(z)$, получим

$$\frac{|\kappa_0(w)|^2}{1-|\kappa_0(w)|^2} \leqslant M,$$

и следовательно,

$$|\kappa_0(w)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+M^{-1}}} =: q = q(\varepsilon) < 1$$

для п.в. $w \in f_0(\Delta_\varepsilon)$. С другой стороны, сходится интеграл

$$\iint\limits_{\Delta \setminus \Delta_\varepsilon} \frac{|\kappa_0(w)|^2}{(1-|\kappa_0(w)|^2)(1-|w|)^2} du\, dv,$$

для чего необходимо, чтобы существовал предел

$$\lim_{|w|\to 1} \frac{|\kappa_0(w)|^2}{1-|\kappa_0(w)|^2} = 0$$

для п.в. $w \in f_0(\Delta \setminus \varepsilon)$. Стало быть,

$$\|\kappa_0\big|_{\Delta_\varepsilon}\|_\infty \leqslant \delta,$$

где $\delta = \delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом,

$$\|\mu_0\|_\infty = \|\kappa_0\|_\infty < \min_\varepsilon \max(q(\varepsilon),\, \delta(\varepsilon)) < 1.$$

Доказана

**Теорема 6.** *Если $f_0$ – экстремаль интеграла $\tilde{E}(f)$ в классе $\hat{BL}(\omega)$ и с ней ассоциируется голоморфный дифференциал Хопфа $\varphi_0$, то она является $k$–квазиконформным отображением с некоторым $k < 1$, а $\varphi_0$ принадлежит банахову пространству $Hol(\Delta, |\mu_{f_0}|)$.*

Далее, голоморфность дифференциала Хопфа с учетом рассуждений п. 1–3 позволяет заключить, что экстремаль $f_0(z)$ является обобщенным решением уравнения гармонических отображений (1), а принадлежность метрики Пуанкаре классу $C^\infty$ – утверждать, что $f_0$ является классическим решением уравнения (1) всюду, кроме, быть может, нулей дифференциала Хопфа. Таким образом, верна

**Теорема 7.** *Для того чтобы с экстремалью $f_0 \in \hat{BL}(\omega)$ интеграла $\tilde{E}(f)$ ассоциировался голоморфный дифференциал Хопфа $\varphi_0$, необходимо и достаточно, чтобы она была $k$–квазиконформной с некоторым $k < 1$. При этом квазиконформная экстремаль $f_0$ интеграла $\tilde{E}(f)$ в классе $\hat{BL}(\omega)$ удовлетворяет уравнению (1) всюду в $\Delta$, кроме, быть может, нулей дифференциала Хопфа, а $\varphi_0$ принадлежит банахову пространству $Hol(\Delta, |\mu_{f_0}|)$.*

**6.** Пусть $n$ – натуральное число, большее трех, и $\delta_n = \{e^{2\pi\, i\, k/n},\, k = 0, \cdots, n-1\}$ – простой дивизор на окружности $\partial\Delta$. Символом $\omega_n$ обозначим его $\omega$–образ $\{\omega(e^{2\pi\, i\, k/n}),\, k = 0, \cdots, n-1\}$, где $\omega$ – заданный квазисимметрический автоморфизм единичной окружности. Далее, пусть $\hat{BL}(\omega_n)$ – класс всех сохраняющих ориентацию автогомеоморфизмов $f$ круга $\Delta$, имеющих локально суммируемые с квадратами соболевские обобщенные производные первого порядка и нормированных условиями $f(e^{2\pi\, i\, k/n}) = \omega(e^{2\pi\, i\, k/n})$, $k = 0, \cdots, n-1$, таких, что $\tilde{E}(f) < \infty$.

Напомним, что квадратичный дифференциал Шоттки – Альфорса в $\Delta$ допускает продолжение по симметрии на $\hat{\mathbb{C}}$, принимающее действительные значения вдоль $\partial\Delta \setminus \delta_n$ и имеющее, быть может, простые полюсы в точках дивизора $\delta_n$.

Пусть $q' := \inf_{f\in\hat{BL}(\omega_n)} \mathcal{K}(f) > 1$, т.е. в классе $\hat{BL}(\omega_n)$ не существует мебиусова преобразования. При $q > q'$ обозначим символом $\hat{BL}(\omega_n,\, q)$ подкласс класса $\hat{BL}(\omega_n)$, образованный $q$–квазиконформными отображениями. Из непустоты и компактности каждого класса $\hat{BL}(\omega_n,\, q)$ при $q > q'$ и полунепрерывности снизу $\overline{\partial}$–интеграла энергии $\tilde{E}(f)$ относительно локально равномерной сходимости его элементов следует существование экстремали $f_q$. С помощью рассуждений, аналогичных проведенным ранее, доказывается

**Теорема 8.** *Если отличный от конформного квазиконформный гомеоморфизм $f_0$ доставляет минимум интегралу $\tilde{E}(f)$ в классе $\hat{BL}(\omega_n)$, то дифференциал Хопфа $\varphi_0$ принадлежит банахову пространству $Hol(\Delta,\, |\mu_{f_0}|)$ голоморфных квадратичных дифференциалов Шоттки – Альфорса на римановой поверхности $R_n := \overline{\Delta} \setminus \delta_n$ с весовой нормой $\|\varphi_0\|* := \iint_\Delta |\mu_{f_0}|\, |\varphi_0| dx\, dy$. Обратно, если с экстремалью $f_0$ функционала $\tilde{E}(f)$ в классе $\hat{BL}(\omega_n)$ ассоциируется дифференциал Хопфа $\varphi_0 \in Hol(\Delta)$, то $\varphi_0 \in Hol(\Delta,\, |\mu_{f_0}|)$ и отображение $f_0$ квазиконформно.*

Далее, с помощью пары соответствующих друг другу голоморфных квадратичных дифференциалов $\phi_0$ и $\psi_0$ вполне аналогично [3] строится слабо гармонический относительно метрики Пуанкаре гомеоморфизм $\hat{f} : R_n \to S_n$. Принимая во внимание, что $\mu_{\hat{f}} \to 0$ при $|z| \to 1$, приходим к следующему результату.

**Теорема 9.** *В каждом $\hat{BL}(\omega_n)$ существует слабо гармоническая относительно метрики Пуанкаре экстремаль $\hat{f}$ $\overline{\partial}$–интеграла энергии $\tilde{E}(f)$, которая является $k$–квазиконформным отображением.*

Так как метрика Пуанкаре принадлежит классу $C^\infty$, то из результатов [9; 10] следует, что экстремаль $\hat{f}$ является классическим решением уравнения (1) всюду, за возможным исключением нулей дифференциала Хопфа.

## Список литературы


[1] Jost J. Harmonic Maps Between Surfaces // Lect. Notes Math. 1984. N 1062. Pp.1–133.

[2] Голубев А.А., Шеретов В.Г. Квазиконформные экстремали инте грала энергии // Матем. заметки. 1994. Т. 55, № 6. С. 50–58.

[3] Голубев А.А., Шеретов В.Г. Квазиконформные экстремали интеграла Дугласа – Дирихле и квадратичные дифференциалы // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 1996. С. 44–53.

[4] Шеретов В.Г. Квазиконформные экстремали гладких функционалов и интеграла энергии на римановых поверхностях // Сиб. матем. журн. 1988. Т. 29, № 3. С. 163–174.

[5] Yao G.W. $\overline{\partial}$-Energy Integral and Uniqueness of Harmonic Maps // Math. Nachr. 2005. Bd. 278, N. 9. S. 1086–1096.

[6] Суворов Г.Д. Обобщенный принцип «длины и площади» в теории отображений. Киев, 1985.

[7] Абикоф У. Вещественно аналитическая теория пространства Тейхмюллера. — М.: 1985.

[8] Wolf M. Measured Foliations and Harmonic Maps of Surfaces. J. Diff. Geom. 1998. V. 49. P.437–457.

[9] Шеретов В.Г. Лекции по римановым поверхностям. Тверь, 2005.

[10] Шеретов В.Г. Аналитические и геометрические свойства плоских отображений. Тверь, 2006.