УДК 517.94:519.6

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ СТОКСА

Эйалло К.О.
Кафедра функционального анализа и геометрии

Поступила в редакцию 10.02.2011, после переработки 18.02.2011.

Исследуется математическая модель установившегося двумерного течения вязкой несжимаемой жидкости с частично свободной поверхностью. В основе исследования лежит нахождение решения второй краевой задачи для системы Стокса. Эта задача решается методом Галеркина. Приводятся результаты численного решения тестовых задач.

The mathematical model of a stationary two-dimensional flow of a viscous incompressible fluid with a partially free boundary is investigated. The investigation is based on the searching of a solution to the second boundary value problem for the Stokes system. This problem is solved by Galerkin method. The results of the numerical investigation of the test problems are presented.

Ключевые слова: система Стокса, плоское установившееся течение, свободная граница, функция тока, метод Галеркина.
Keywords: Stokes system, plane stationary flow, free boundary, stream function, Galerkin method.

1. Введение

Задачи о течении жидкости с частично или полностью свободной границей актуальны на протяжении последних 50 лет. В 1970-80-х годах В.В. Пухначевым и В.А. Солонниковым была доказана разрешимость задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей методом последовательных приближений. В настоящей статье предлагается способ численного нахождения решения плоской задачи со свободной границей для системы Стокса, основанный на методе В.В. Пухначева и В.А. Солонникова. Основной шаг в реализации этого метода – решение некоторой краевой задачи в области с фиксированной границей. В статье описан способ нахождения численного решения задачи методом Галеркина. Построены конкретные примеры точных решений задачи со свободной границей. На этих примерах протестирован комплекс программ для нахождения численного решения.

Укажем распределение материала статьи. Во втором параграфе дана постановка задачи со свободной границей и кратко изложен метод последовательных приближений для ее решения. В третьем параграфе методом Галеркина исследуется вспомогательная краевая задача в области с фиксированной границей. В четвертом параграфе построены явные решения задачи со свободной границей и приведены результаты испытаний на этих решениях комплекса компьютерных программ.

2. Постановка задачи со свободной границей для системы Стокса

Рассмотрим математическую модель стационарного движения жидкости в плоской области Ω, ограниченной твердой поверхностью Γ_1 и свободной поверхностью Γ_2.

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega,$$
$$\Gamma_1 = \{x_2 = 0, 0 < x_1 < l\} \cup \{x_1 = 0, 0 < x_2 < \varphi(0)\} \cup \{x_1 = l, 0 < x_2 < \varphi(l)\},$$
$$\Gamma_2 = \{0 \le x_1 \le l, x_2 = \varphi(x_1)\}.$$

Свободная часть границы Γ_2 определяется функцией φ. φ это искомая гладкая функция, принимающая положительные значения. Движение жидкости характеризуется вектор-функцией скорости $\bar{v}(x_1, x_2) = (v_1, v_2)$ и скалярной функцией давления $p(x_1, x_2)$. Определению подлежит тройка функций $(\bar{v}, p, \varphi)$. Функции $(\bar{v}, p)$ удовлетворяют системе Стокса

$$-\nu\Delta\bar{v} + \nabla p = \bar{f}, \quad \operatorname{div}\bar{v} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \tag{1}$$

и краевым условиям на $\partial\Omega$

$$\bar{v}\,|_{\Gamma_1} = 0, \tag{2}$$

$$\bar{v}\cdot\bar{n}\,|_{\Gamma_2} = 0, \tag{3}$$

$$T(\bar{v}, p)\bar{n} = -\sigma K\bar{n} \quad \text{на} \quad \Gamma_2. \tag{4}$$

Здесь $\bar{f}(x)$ – заданная вектор-функция, $\bar{n}$ – единичный вектор внешней нормали к линии Γ_2, $\sigma = const > 0$ – коэффициент поверхностного натяжения, $\nu = const > 0$ – кинематический коэффициент вязкости, K – кривизна линии Γ_2, $T(\bar{v}, p)$ – тензор напряжений с компонентами

$$T_{ij} = \nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - p\,\delta_{ij}, \tag{5}$$

$$T(\bar{v}, p)\bar{n} = \left\{\sum_{j=1}^{2} T_{ij} n_j\right\}_{i=1}^{2}$$
$$\bar{v}\cdot\bar{n} = \sum_{i=1}^{2} v_i n_i.$$

Компоненты вектора нормали $\bar{n}$ и кривизна K выражаются через производные функции φ.

$$\bar{n} = (n_1, n_2), \quad n_1 = \frac{-\varphi'}{\sqrt{1 + (\varphi')^2}}, \quad n_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi')^2}},$$

$$K = \frac{\varphi''}{(1 + (\varphi')^2)^{3/2}}.$$

Мы будем предполагать также, что объем жидкости фиксирован. Это означает, что функция φ удовлетворяет условию

$$\int_0^l \varphi(x_1)dx_1 = V, \tag{6}$$

где V – заданное положительное число.

В работе [4] изложен алгоритм решения задачи (1), (2), (3), (4) методом конечных элементов. Математической основой этого алгоритма является построение последовательности приближений к решению задачи со свободной границей, сделанное в работах [1], [2], [3]. Напомним кратко способ построения приближений. Пусть известно m-ое приближение $(\bar{v}^{(m)}, p^{(m)}, \varphi^{(m)})$. В этом случае приближение к искомой области Ω есть

$$\Omega^m = \{0 < x_1 < l, 0 < x_2 < \varphi^{(m)}\},$$

а граница Ω^m есть

$$\begin{gathered}\Gamma^m = \Gamma_1^m \cup \Gamma_2^m,\\ \Gamma_1^m = \{x_2 = 0, 0 < x_1 < l\} \cup \{x_1 = 0, 0 < x_2 < \varphi^{(m)}(0)\} \cup \{x_1 = l, 0 < x_2 < \varphi^{(m)}(l)\},\\ \Gamma_2^m = \{0 \le x_1 \le l, x_2 = \varphi^{(m)}(x_1)\}.\end{gathered}$$

Пусть $\bar{n}^{(m)}$ – единичный вектор внешней нормали к линии Γ_2^m. Обозначим через $\bar{\tau}^{(m)} = (\tau_1, \tau_2)$ единичный вектор, касательный к линии Γ_2^m,

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi^{(m)\prime})^2}}, \quad \tau_2 = \frac{\varphi^{(m)\prime}}{\sqrt{1 + (\varphi^{(m)\prime})^2}}.$$

Новые приближения скорости и давления $(\bar{v}^{(m+1)}, p^{(m+1)})$ определим как решение следующей краевой задачи в фиксированной области Ω^m

$$\begin{gathered}-\nu\Delta\bar{v}^{(m+1)} + \nabla p^{(m+1)} = \bar{f}, \quad \operatorname{div}\bar{v}^{(m+1)} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^m,\\ \bar{v}^{(m+1)}\,|_{\Gamma_1^m} = 0, \quad \bar{v}^{(m+1)} \cdot \bar{n}\,|_{\Gamma_2^m} = 0,\\ T(\bar{v}^{(m+1)}, p^{(m+1)})\bar{n}^{(m)} \cdot \bar{\tau}^{(m)} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2^m.\end{gathered} \tag{7}$$

По найденным $\bar{v}^{(m+1)}$ и $p^{(m+1)}$ вычисляем кривизну $K^{(m+1)}$ $m+1$-го приближения к искомой кривой Γ_2.

$$K^{(m+1)} = -\frac{1}{\sigma} T(\bar{v}^{(m+1)}, p^{(m+1)})\bar{n}^{(m)} \cdot \bar{n}^{(m)}\Big|_{\Gamma_2^m}.$$

Теперь мы найдем функцию $\varphi^{(m+1)}$ и построим новую кривую

$$\Gamma_2^{m+1} = \{0 \le x_1 \le l, x_2 = \varphi^{(m+1)}(x_1)\},$$

кривизна которой равна найденной функции $K^{(m+1)}$. Способ нахождения функции $\varphi^{(m+1)}$ подробно описан в статье [4]. Тем самым получено новое приближение $(\bar{v}^{(m+1)}, p^{(m+1)}, \varphi^{(m+1)})$ к решению задачи (1), (2), (3), (4).

3. Решение задачи в области с фиксированной границей

Рассмотрим теперь задачу (7) и перепишем ее, опуская верхние индексы.

$$-\nu\Delta\bar{v} + \nabla p = \bar{f}, \quad \operatorname{div}\bar{v} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{8}$$

$$\bar{v}\,|_{\Gamma_1} = 0, \tag{9}$$

$$\bar{v}\cdot\bar{n}\,|_{\Gamma_2} = 0, \tag{10}$$

$$T(\bar{v},p)\bar{n}\cdot\bar{\tau} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2. \tag{11}$$

Мы будем считать, что функция p нормирована условием

$$\int\limits_{\Omega} p\,(x)\,dx = 0. \tag{12}$$

Разрешимость задачи (8), (9), (10), (11) установлена в [2].

Введем функцию тока $\psi(x_1, x_2)$, связанную с вектором скорости $\bar{v}$ соотношениями

$$v_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\,,\ v_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\,,$$

и сформулируем задачу (8), (9), (10), (11) для функции тока.

$$-\nu\Delta^2\psi = g \quad \text{в } \Omega, \tag{13}$$

где

$$g = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}.$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\,n_1 - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\,n_2 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \tag{15}$$

$$4\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\,n_1 n_2 + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}\right)(n_2^2 - n_1^2) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \tag{16}$$

Перепишем условие (15)

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\,\varphi' + \frac{\partial\psi}{\partial x_1} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2$$

и продифференцируем это равенство вдоль кривой Γ_2, принимая во внимание, что производная функции u вдоль кривой Γ_2 есть

$$\frac{\partial u}{\partial\tau} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\tau_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\tau_2 = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2}} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\varphi'(x_1)}{\sqrt{1+\varphi'^2}}$$

и функция φ зависит только от x_1. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\varphi' + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2}} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\varphi' + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\frac{\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2}} = 0.$$

Тогда

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\varphi' + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\varphi' + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\varphi' =$$

$$= 2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\,\varphi' + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\,\varphi'^{\,2} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\varphi''.$$

Отсюда получаем

$$2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\,\varphi' = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\,\varphi'^{\,2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\varphi'' \quad \text{на} \quad \Gamma_2. \tag{17}$$

Из (16) следует, что

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}\right)(1 - \varphi'^{\,2}) = 4\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\,\varphi' \quad \text{на } \Gamma_2. \tag{18}$$

Заменяя правую часть (18) выражением из (17), получим

$$\Delta\psi = -2\,\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\,\frac{\varphi''}{1+\varphi'^{\,2}} \quad \text{на } \Gamma_2. \tag{19}$$

Будем искать функцию ψ в виде произведения

$$\psi(x_1, x_2) = \lambda(x_1, x_2)[\varphi(x_1) - x_2], \tag{20}$$

где $\lambda(x_1, x_2)$ есть гладкая функция. Покажем, что для функции вида (20) выполняется краевое условие (15).

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial x_2}n_1 - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}n_2\right|_{\Gamma_2} = -\frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^{\,2}}}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\varphi'\right]_{\Gamma_2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^{\,2}}}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}(\varphi(x_1) - x_2) + \lambda\varphi' + \frac{\partial\lambda}{\partial x_2}(\varphi(x_1) - x_2)\varphi' - \lambda\varphi'\right]_{\Gamma_2} = 0.$$

Краевое условие (14) в более подробной записи имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial x_2}(x_1, 0) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_2}(0, x_2) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_2}(l, x_2) = 0, \\ &\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(x_1, 0) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_1}(0, x_2) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_1}(l, x_2) = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Из представления (20) получаем, что для того, чтобы выполнялись условия (21), достаточно, чтобы функция λ на линии Γ_1 удовлетворяла следующим условиям

$$\lambda = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1,$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_2}(x_1,0) = 0, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial x_2}(0,x_2) = 0, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial x_2}(l,x_2) = 0, \tag{22}$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}(x_1,0) = 0, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial x_1}(0,x_2) = 0, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial x_1}(l,x_2) = 0.$$

Из (20) и (22) следует, что

$$\psi|_\Gamma = 0. \tag{23}$$

Выведем теперь интегральное тождество для функции ψ. Умножим обе части уравнения (13) на пробную функцию η, имеющую вид

$$\eta(x_1,x_2) = \mu(x_1,x_2)[\varphi(x_1) - x_2] \tag{24}$$

и удовлетворяющую краевым условиям

$$\eta|_{\Gamma_1} = 0, \quad \nabla\eta|_{\Gamma_1} = 0. \tag{25}$$

Проинтегрируем полученное равенство по Ω и проведем интегрирование по частям, учитывая краевые условия (19) и (25).

$$\int\limits_\Omega g\eta\,dx = -\nu\int\limits_\Omega \Delta^2\psi\,\eta\,dx = -\nu\int\limits_\Omega\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Delta\psi\,\eta + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Delta\psi\,\eta\right]dx =$$
$$= -\nu\left[-\int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1}\Delta\psi\,\frac{\partial\eta}{\partial x_1}\,dx - \int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x_2}\Delta\psi\,\frac{\partial\eta}{\partial x_2}\,dx + \right.$$
$$\left. + \int\limits_\Gamma \tfrac{\partial}{\partial x_1}\Delta\psi\,\eta\,d\Gamma + \int\limits_\Gamma \tfrac{\partial}{\partial x_2}\Delta\psi\,\eta\,d\Gamma\right] =$$
$$= -\nu\left[\int\limits_\Omega \Delta\psi\,\Delta\eta\,dx - \int\limits_\Gamma \Delta\psi\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_1}\,n_1 + \frac{\partial\eta}{\partial x_2}\,n_2\right)d\Gamma\right] =$$
$$= -\nu\left[\int\limits_\Omega \Delta\psi\,\Delta\eta\,dx - \int\limits_{\Gamma_2} \Delta\psi\frac{\partial\eta}{\partial n}\,d\Gamma\right] =$$
$$= -\nu\left[\int\limits_\Omega \Delta\psi\,\Delta\eta\,dx + 2\int\limits_{\Gamma_2} \tfrac{\partial\psi}{\partial x_2}\,\tfrac{\partial\eta}{\partial n}\,\tfrac{\varphi''}{1+\varphi'^2}\,d\Gamma\right]$$

Преобразуем криволинейный интеграл из правой части полученного равенства, учитывая представления (20) и (24), а также то, что

$$[\varphi(x_1) - x_2]_{\Gamma_2} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial n}[\varphi(x_1) - x_2]_{\Gamma_2} = \varphi' n_1 - n_2 = -\frac{\varphi'^2}{\sqrt{1+\varphi'^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2}} = -\sqrt{1+\varphi'^2}.$$

Имеем

$$\int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\eta}{\partial n}\frac{\varphi''}{1+\varphi'^2}\,d\Gamma = -\int\limits_{\Gamma_2} \lambda(x_1,x_2)\mu(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial n}[\varphi(x_1)-x_2]\frac{\varphi''}{1+\varphi'^2}\,d\Gamma =$$
$$= \int\limits_{\Gamma_2} \lambda(x_1,x_2)\mu(x_1,x_2)\frac{\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\,d\Gamma = \int\limits_0^l \lambda(x_1,\varphi(x_1))\mu(x_1,\varphi(x_1))\varphi''(x_1)\,dx_1$$

Теперь мы получаем интегральное тождество для функции ψ.

$$-\nu\left[\int\limits_\Omega \Delta\psi\,\Delta\eta\,dx + 2\int\limits_0^l \lambda(x_1,\varphi(x_1))\,\mu(x_1,\varphi(x_1))\,\varphi''(x_1)\,dx_1\right] = \int\limits_\Omega g\eta\,dx. \qquad (26)$$

3.1 Вычисление функции тока методом Галеркина

В качестве пробных выберем следующие функции

$$\eta_k(x) = \mu_k(x)[\varphi(x_1) - x_2], \quad \mu_k(x_1,x_2) = x_1^{p_k}(l-x_1)^2 x_2^{q_k}, \quad k = 1,2,...,N, \qquad (27)$$

где p_k, q_k — натуральные числа, удовлетворяющие условиям

$$p_k \geq 2,\ q_k \geq 2,\ p_k + q_k \leq r,\ r \text{ натуральное},\ r \geq 4.$$

Ортогонализируем набор функций $\{\eta_1,...,\eta_N\}$ в смысле скалярного произведения

$$(u,v) = \int\limits_\Omega \Delta u \Delta v\,dx.$$

В результате ортогонализации получим набор функций $\{\zeta_1,...,\zeta_N\}$ со свойствами

$$\zeta_i(x) = \sum_{j=1}^N \beta_{ij}\eta_j(x) = \left(\sum_{j=1}^N \beta_{ij}\mu_j(x_1,x_2)\right)[\varphi(x_1)-x_2],\ (\zeta_i,\zeta_k) = \delta_{ik}, \quad i,k = 1,...,N. \qquad (28)$$

Коэффициенты β_{ij} определяются процессом Грама-Шмидта.

Приближение к функции ψ ищем в виде

$$\psi^N = \sum_{i=1}^N \gamma_i\zeta_i(x) = \left[\sum_{i=1}^N \gamma_i\left(\sum_{j=1}^N \beta_{ij}\mu_j(x_1,x_2)\right)\right][\varphi(x_1)-x_2]. \qquad (29)$$

Подставим в (26) ψ^N вместо ψ и ζ_k вместо η. Получим систему линейных алгебраических уравнений относительно чисел $\{\gamma_1, ..., \gamma_N\}$.

$$\int\limits_\Omega \Delta\left(\sum_{i=1}^N \gamma_i \zeta_i(x)\right) \Delta\zeta_k(x)\,dx +$$

$$+2\int\limits_0^l \left[\sum_{i=1}^N \gamma_i \left(\sum_{j=1}^N \beta_{ij}\mu_j(x_1,\varphi(x_1))\right)\right]\left(\sum_{j=1}^N \beta_{kj}\mu_j(x_1,\varphi(x_1))\right)\varphi''(x_1)\,dx_1 =$$

$$= -\tfrac{1}{\nu}\int\limits_\Omega g(x)\zeta_k(x)\,dx,$$

$$k = 1, ..., N.$$

В силу ортонормированности эти уравнения принимают вид

$$\gamma_k + \sum_{i=1}^N \gamma_i \left[2\int\limits_0^l \left(\sum_{j=1}^N \beta_{ij}\mu_j(x_1,\varphi(x_1))\right)\left(\sum_{j=1}^N \beta_{kj}\mu_j(x_1,\varphi(x_1))\right)\varphi''(x_1)\,dx_1\right] = \tag{30}$$

$$= -\frac{1}{\nu}\int\limits_\Omega g(x)\zeta_k(x)\,dx, \quad k = 1, ..., N.$$

Введем обозначения

$$b_k = -\frac{1}{\nu}\int\limits_\Omega g(x)\zeta_k(x)\,dx = -\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^N \beta_{kj}\int\limits_\Omega g(x_1,x_2)\mu(x_1,x_2)[\varphi(x_1)-x_2]\,dx,$$

$$A_{ki} = \delta_{ki} + 2\sum_{j=1}^N \beta_{kj}\sum_{s=1}^N \beta_{is}\int\limits_0^l \mu_s(x_1,\varphi(x_1))\mu_j(x_1,\varphi(x_1))\varphi''(x_1)\,dx_1.$$

В таких обозначениях система (30) принимает вид

$$\sum_{i=1}^N A_{ki}\gamma_i = b_k, \quad k = 1, ..., N.$$

Решая эту систему и подставляя найденные коэффициенты $\gamma_1, ..., \gamma_N$ в (29), получаем приближение ψ^N к решению задачи (13), (14), (15), (16).

3.2 Вычисление давления методом Галеркина

В статье [4] показано, что функция p из системы (8) есть решение задачи Неймана

$$\Delta p = \operatorname{div}\bar{f},$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_\Gamma = \left[\nu(\Delta v_1\, n_1 + \Delta v_2\, n_2) + \bar{f}\cdot\bar{n}\right]_\Gamma .$$

Решение этой задачи методом Галеркина подробно описано в работе [5].

4. Численная реализация решения задачи

Приведенный в статье метод нахождения приближенного решения задачи со свободной границей реализован численно в среде MATLAB. Комплекс программ состоит из следующих основных частей:

1) ортогонализация системы функций (27);

2) вычисление матрицы системы линейных алгебраических уравнений (30) и решение этой системы, вычисление приближения функции тока;

3) вычисление приближения давления;

4) вычисление нового приближения функции φ, задающей свободную границу.

Работоспособность комплекса программ, реализующих алгоритм решения задачи со свободной границей, была проверена на нескольких примерах. Рассмотрим точные решения задачи со свободной границей.

Пусть $l = 1$ и $0 \le x_1 \le 1$, $\nu = 1$, $\sigma = 1$. Выберем сначала функцию φ так, чтобы она удовлетворяла условиям

$$\varphi \in C^4[0,1], \quad \varphi' \ge 0,\ \varphi'(0) = 0,\ \varphi'(1),\ \varphi''(0) = 0,\ \varphi''(1) = 0. \tag{31}$$

Зададим затем функцию тока $\psi(x_1, x_2)$

$$\psi(x_1, x_2) = \left(\frac{\varphi'(x_1)}{1 + \varphi'^2(x_1)}\right)^{\frac{1}{2}} \rho(x_2)[\varphi(x_1) - x_2].$$

Здесь ρ – функция класса C^4 такая, что

$$\rho(0) = 0,\ \rho'(0) = 0,\ \rho(x_2) = 1 \text{ при } d \le x_2 \le 1,$$

где $d \in (0,1)$ и $d < min(\varphi(x_1))$.

В качестве могут ρ быть выбраны следующие функции.

1)

$$\rho(x_2) = \begin{cases} P(x_2), & 0 \le x_2 < d, \\ 1, & d \le x_2 \le 1, \end{cases}$$

где $P(x)$ – алгебраический полином шестой степени,

$$P(x) = a_1 x_2^6 + a_2 x_2^5 + a_3 x_2^4 + a_4 x_2^3 + a_5 x_2^2,$$
$$P(d) = 1,\ P'(d) = 0,\ P''(d) = 0,\ P'''(d) = 0,\ P^{\,\mathrm{iv}}(d) = 0.$$

Вектор коэффициентов $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ есть решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} d^6 & d^5 & d^4 & d^3 & d^2 \\ 6d^5 & 5d^4 & 4d^3 & 3d^2 & 2d \\ 30d^4 & 20d^3 & 12d^2 & 6d & 2 \\ 120d^3 & 60d^2 & 24d & 6 & 0 \\ 360d^2 & 120d & 24 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2)

$$\rho(x_2) = \begin{cases} R(x_2), & 0 \le x_2 < d, \\ 1, & d \le x_2 \le 1, \end{cases}$$

где $R(x_2)$ – тригонометрический полином,

$$R(x_2) = \frac{33}{8} - 6\sin\Big(\frac{\pi}{2d}x_2\Big) - \frac{9}{2}\cos\Big(\frac{\pi}{d}x_2\Big) + 2\sin\Big(\frac{3\pi}{2d}x_2\Big) + \frac{3}{8}\cos\Big(\frac{2\pi}{d}x_2\Big).$$

Теперь мы можем найти вектор скорости $\bar{v}$.

$$v_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = \left(\frac{\varphi'(x_1)}{1+\varphi'^2(x_1)}\right)^{\frac{1}{2}} [\rho'(x_2)[\varphi(x_1) - x_2] - \rho(x_2)]$$

$$v_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \tag{32}$$

$$-\rho(x_2)\left\{\frac{\varphi''(x_1)(1-\varphi'^2)}{2\sqrt{\varphi'(x_1)}\,[1+\varphi'^2(x_1)]^{\frac{3}{2}}}[\varphi(x_1) - x_2] + \left(\frac{\varphi'(x_1)}{1+\varphi'^2(x_1)}\right)^{\frac{1}{2}}\varphi'(x_1)\right\}$$

Такой выбор v_1 и v_2 обеспечивает выполнение уравнения $\operatorname{div}\bar{v} = 0$. Из условий (31) и свойств $\rho(0) = 0$, $\rho'(0) = 0$ следует выполнение краевого условия (2). Введем обозначение

$$\theta(x_1) = \left(\frac{\varphi'(x_1)}{1+\varphi'^2(x_1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

и убедимся в выполнении краевого условия (3). Учтем, что на линии Γ_2

$$\rho = 1,\ \rho' = 0,\ [\varphi(x_1) - x_2] = 0, \quad v_1 = -\theta(x_1),\ v_2 = -\theta(x_1)\varphi'(x_1).$$

Поэтому

$$\bar{v}\cdot\bar{n}\,|_{\Gamma_2} = -\theta(x_1)[n_1 + \varphi' n_2] = 0.$$

Обратимся теперь к краевому условию (4). Спроектируем это условие на касательное и нормальное направления к Γ_2.

$$T(\bar{v},p)\bar{n}\cdot\bar{\tau} = S(\bar{v})\bar{n}\cdot\bar{\tau} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \tag{33}$$

$$T(\bar{v},p)\bar{n}\cdot\bar{n} = S(\bar{v})\bar{n}\cdot\bar{n} - p = -K \quad \text{на} \quad \Gamma_2. \tag{34}$$

Здесь

$$S(\bar{v}) = \begin{pmatrix} 2\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} \\ \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} & 2\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что для вектора $\bar{v}$, определяемого формулами (32), условие (33) выполняется тождественно. На линии Γ_2

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -\theta'(x_1), \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = -2\theta'(x_1)\varphi'(x_1) - \theta(x_1)\varphi''(x_1), \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \theta'(x_1).$$

Тогда на Γ_2

$$S(\bar{v}) = \begin{pmatrix} -2\theta' & -2\theta'\varphi' - \theta\varphi'' \\ \\ -2\theta'\varphi' - \theta\varphi'' & 2\theta' \end{pmatrix},$$

$$S(\bar{v})\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2}} \begin{pmatrix} -\theta\varphi'' \\ \\ 2\theta'\varphi'^2 + \theta\varphi'\varphi'' + 2\theta' \end{pmatrix},$$

$$S(\bar{v})\bar{n}\cdot\bar{\tau} = \frac{1}{1+\varphi'^2}\left[-\theta\varphi''(1-\varphi'^2) + 2\theta'\varphi'(1+\varphi'^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{[1+\varphi'^2]^{\frac{3}{2}}}\left[-\sqrt{\varphi'}\varphi''(1-\varphi'^2) + \sqrt{\varphi'}\varphi''(1-\varphi'^2)\right] = 0.$$

Займемся теперь условием (34). На линии Γ_2

$$S(\bar{v})\bar{n}\cdot\bar{n} = \frac{2}{1+\varphi'^2}\left[\theta\varphi'\varphi'' + \theta'(1+\varphi'^2)\right] =$$

$$= 2\theta' + \frac{2\varphi'\varphi''}{1+\varphi'^2}\theta = \frac{\varphi''(1-\varphi'^2)}{\sqrt{\varphi'}\,[1+\varphi'^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\varphi'^{\frac{3}{2}}\varphi''}{[1+\varphi'^2]^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{\varphi''}{[1+\varphi'^2]^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{1-\varphi'^2}{\sqrt{\varphi'}} + 2\varphi'^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{\varphi''}{[1+\varphi'^2]^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1+\varphi'^2}{\sqrt{\varphi'}} = \frac{\varphi''}{\sqrt{\varphi'\,[1+\varphi'^2]}}$$

Определим теперь функцию p так, чтобы выполнялось условие (34), т.е.

$$p|_{\Gamma_2} = S(\bar{v})\bar{n}\cdot\bar{n} + K = \frac{\varphi''}{\sqrt{\varphi'[1+\varphi'^2]}} + \frac{\varphi''}{[1+\varphi'^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\varphi''(1+\sqrt{\varphi'}+\varphi'^2)}{\sqrt{\varphi'}\,[1+\varphi'^2]^{\frac{3}{2}}} \equiv q(x_1)\,.$$

Для того, чтобы функция $p(x_1, x_2)$ удовлетворяла условию (12) будем искать эту функцию в виде

$$p(x_1, x_2) = q(x_1) + r(x_2), \tag{35}$$

где

$$r \in C^2, \quad r(x_2) = 0 \text{ при } x_2 \geq d, \quad \int\limits_0^d r(x_2)\,dx_2 = -\int\limits_0^1 q(x_1)\varphi(x_1)\,dx_1 \equiv Q\,.$$

В качестве r можно взять функцию

$$r(t) = \begin{cases} \dfrac{4Q}{d}\left(1 - \dfrac{3}{d}\,t + \dfrac{3}{d^2}\,t^2 - \dfrac{1}{d^3}\,t^3\right) & 0 \leq t < d \\ 0 & t \geq d \end{cases}$$

Теперь, зная $\bar{v}$ и p, мы можем вычислить $\bar{f}$ из уравнения (1).

$$\begin{gathered} f_1(x_1,x_2) = -\Delta v_1 + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \\ = -\theta''(x_1)[\rho'(x_2)[\varphi(x_1) - x_2] - \rho(x_2)] - 2\theta'(x_1)\rho'(x_2)\varphi'(x_1) - \\ -\theta(x_1)\rho'(x_2)\varphi''(x_1) - \theta(x_1)[\rho'''(x_2)[\varphi(x_1) - x_2] - 3\rho''(x_2)] + q'(x_1), \\ f_2(x_1,x_2) = -\Delta v_2 + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \\ = \rho(x_2)\{\theta'''(x_1)[\varphi(x_1) - x_2] + \\ +3\theta''(x_1)\varphi'(x_1) + 3\theta'(x_1)\varphi''(x_1) + \theta(x_1)\varphi'''(x_1)\} + \\ +\rho''(x_2)[\theta'(x_1)[\varphi(x_1) - x_2] + \theta(x_1)\varphi'(x_1)] - 2\rho'(x_2)\theta'(x_1) + r'(x_2). \end{gathered} \tag{36}$$

Тестирование алгоритма решения задачи со свободной границей и соответствующего комплекса программ проведено по следующей схеме. Выбирается функция φ, удовлетворяющая условиям (31), по формулам (32) и (35) вычисляются функции $\bar{v}$ и p. $(\bar{v}, p, \varphi)$ есть точное решение задачи. По формулам (36) вычисляется правая часть уравнения (1). В качестве начального приближения $\varphi^{(0)}$ выбираем константу

$$\varphi^{(0)} = \int\limits_0^1 \varphi(x_1)\,dx_1\ ,$$

а в качестве $(\bar{v}^{(0)}, p^{(0)})$ выбираем решение задачи (8), (9), (10), (11) в прямоугольнике $\Omega^{(0)} = \{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < \varphi^{(0)}\}$. $\varphi^{(0)}$ совпадает с константой V из условия (6). Последующие приближения вычисляются так, как это описано в параграфе 2.

Для оценки работоспособности метода вычисляются относительные погрешности

$$\delta_v = \frac{\|\bar{v} - \bar{v}^{(m)}\|_{W_2^1}}{\|\bar{v}\|_{W_2^1}}\ , \quad \delta_p = \frac{\|p - p^{(m)}\|_{L_2}}{\|p\|_{L_2}}\ , \quad \delta_\varphi = \frac{\max|\varphi - \varphi^{(m)}|}{\max|\varphi|}\ .$$

Здесь m — номер приближения (итерации). Ниже приводятся результаты тестирования.

1.

$$\varphi(x_1) = 0.9 + b\left[\frac{1}{5}x_1^5 - \frac{2}{3}x_1^6 + \frac{6}{7}x_1^7 - \frac{1}{2}x_1^8 + \frac{1}{9}x_1^9\right],$$

где $b > 0$ — числовой параметр. В этом случае

$$\varphi'(x_1) = b\,x_1^4(1-x_1)^4, \quad \varphi''(x_1) = 4\,b\,x_1^3(1-x_1)^3(1-2x_1),$$

b	m	δ_v	δ_p	δ_φ
0.05	3	0.0016894	$7.2238e-006$	$4.3705e-006$
0.1	3	0.0016896	$7.8077e-006$	$6.4907e-006$
0.15	3	0.00169	$8.3547e-006$	$8.3283e-006$

2.

$$\varphi(x_1) = 0.9 + b\left[\frac{3}{8}x_1 - \frac{1}{4\pi\alpha}\sin 2\pi\alpha x_1 + \frac{1}{32\pi\alpha}\sin 4\pi\alpha x_1\right].$$

В этом случае

$$\varphi'(x_1) = b\sin^4\pi\alpha x_1, \quad \varphi''(x_1) = 4b\pi\alpha\sin^3\pi\alpha x_1\cdot\cos\pi\alpha x_1\ .$$

При $\alpha = 1$

b	m	δ_v	δ_p	δ_φ
0.05	4	0.0065564	0.0040235	0.0013416
0.1	4	0.013790	0.0049537	0.0038574
0.15	4	0.023795	0.0053477	0.0073579

При $\alpha = 2$

b	m	δ_v	δ_p	δ_φ
0.05	4	0.081592	0.066057	0.0038899
0.1	4	0.084642	0.068597	0.0057899
0.15	4	0.088878	0.071649	0.0074735

Результаты тестирования показывают, что комплекс программ работает вполне удовлетворительно. То обстоятельство, что точность восстановления свободной границы падает с увеличением осцилляции, является вполне естественным и ожидаемым.

5. Заключение

В статье описан способ численного решения плоской задачи с частично свободной границей для системы Стокса. Способ этот основан на применении метода Галеркина для бигармонического уравнения и для задачи Неймана. Построены примеры областей и заданных в них решений задач со свободной границей. Приведены результаты испытаний на этих решениях комплекса программ, реализующих предложенный способ решения задачи.

Список литературы

[1] Пухначев В.В. Плоская стационарная задача со свободной границей для уравнений Навье-Стокса // Журнал прикл. механики и техн. физики. 1972. N3, С. 91 – 102.

[2] Солонников В.А. Разрешимость трехмерной задачи со свободной границей для стационарной системы уравнений Навье-Стокса // Записки научных семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР. 1979. Т. 84. С. 252 – 284.

[3] Solonnikov V. Solvability of a three-dimensional boundary value problem with a free surface for the stationary Navier-Stokes system // Partial Differential equations, Banach Center Publications. 10. 1983. P. 361 – 403.

[4] Эйалло К.О. Численный анализ задачи со свободной границей для плоского стационарного течения // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2009. Вып. 12. С. 35 – 49.

[5] Могилевский И.Ш., Эйалло К.О. Решение задачи Неймана методом Галеркина // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2010. Вып. 17. С. 59 – 71.