УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ, ТРЕХФАЗНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА СТЕФАНА, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В КРИОХИРУРГИИ

Буздов Б.К.
Институт информатики и проблем регионального управления
Кабардино-Балкарского научного центра РАН,
отдел Мультиагентных систем

Поступила в редакцию 01.11.2010, после переработки 15.12.2010.

В статье рассматривается двумерная краевая задача типа Стефана, возникающая в криохирургии. Приведена постановка и эффективный метод ее полного исследования для случая цилиндрического криоинструмента, полностью внедренного в биоткань. Предложенный алгоритм исследования доведен до численных расчетов на ЭВМ.

The paper considers the mathematical model of the biological tissue cryodestruction process constituting the two-measure Stefan's type boundary problem. The method of its sufficiently complete analysis for the case of cylindrical cryoinstrument with the full penetration in tissue has been worked out. The computer program implementing the proposed algorithm has been developed.

Ключевые слова: задача типа Стефана, криохирургия, пространственная локализация, локально-одномерный метод, метод сглаживания.
Keywords: the Stefan's type problem, cryosurgery, space localization of heart.

Введение

Как известно, в инертной среде (без источников тепла) с постоянными теплофизическими характеристиками скорость распространения теплового возмущения мгновенна, что обусловливается линейностью уравнения теплопроводности. Иначе обстоит вопрос для сред с зависящими от температуры теплофизическими характеристиками, когда уравнение теплопроводности становится квазилинейным. Хорошо изучен случай степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры. Полученные здесь методом разделения переменных Биркгофа автомодельные решения одномерных задач описывают тепловые волны, распространяющиеся по невозмущенной среде с конечной скоростью. Однако, здесь можно говорить о пространственной локализации теплового возмущения только в данный момент времени, так как при $t \to \infty$ область возмущения становится неограниченной.

Ни линейный, ни отмеченный квазилинейный подход к моделированию не позволяют описать эволюцию реально наблюдаемых процессов теплопроводности, стабилизирующихся к предельным стационарным состояниям с четкой пространственной локализацией поля температуры. К последним относятся процессы криогенного охлаждения и замораживания биоткани. Характерной особенностью таких процессов является специальная зависимость источников тепла от искомого поля температуры.

В многочисленных зарубежных литературных источниках (см., например, [1, 2, 3]) рассматривается линейная зависимость источников тепла от температуры, которая не позволяет описать отмеченный выше эффект пространственной локализации тепла, для существования которого, как показано в [4], непременным является условие $w_u(\bar{u}) = -\infty$, где $w(u)$ - функция источников, а $\bar{u}$ - температура биоткани, до которой еще не дошел холод. Можно, например, рассматривать зависимость вида $w(u) = w_0(\bar{u} - u)^\beta$, где $0 < \beta < 1$, которая, очевидно, удовлетворяет указанному выше свойству.

Одной из задач криохирургии является уничтожение клеток в локальном, четко ограниченном объеме биоткани, занимаемом злокачественной опухолью. В связи с тем, что применяемые криогенные температуры достигают $-150°C$ и более низких, гибель клеток достигается в результате разрывов мембран, образующихся при криогенном охлаждении, кристаллами льда внеклеточной и внутриклеточной воды, а также осмотического разбухания при оттаивании биоткани. Очевидно, что развитие и внедрение криохирургического метода в широкую медицинскую практику во многом зависит от достоверного описания теплового процесса замораживания биоткани, сопровождающегося фазовым переходом вода-лед. В связи с этим, наряду с экспериментальными исследованиями, актуальным является математическое моделирование тепловых процессов в замораживаемой биоткани, требующее разработки эффективных методов решения возникающих здесь задач Стефана.

По динамике изотерм криопоражения $(-20 : -50°C)$ и замораживания $(0 : -3°C)$, скорости понижения температуры, времени достижения заданного или стационарного состояния (экспозиции) и другим параметрам криогенного воздействия на биоткань можно прогнозировать его результаты и одновременно получить необходимые данные для расчета различного криохирургического инструмента и оборудования.

Локальное замораживание и разрушение биологической ткани осуществляется криозондами с различными формами охлаждающей поверхности, располагаемыми на поверхности биоткани или внедряемыми в нее. С понижением температуры криозонда в ткани возникает нестационарное температурное поле. Повреждение возникает в результате фазового изменения, то есть замораживания биоткани вблизи охлаждающей поверхности криозонда. Распространению фронта замораживания препятствуют выделяющаяся на нем теплота кристаллизации и действующие в не замороженной ткани источники тепла крово- и лимфотока, метаболизма, окислительных реакций. Это приводит к реально наблюдаемой пространственной локализации теплового возмущения, а при установившемся отводе тепла и к стабилизации во времени к предельному пространственно локализованному стационарному состоянию. При конкретной температуре криозонда фронт замораживания распространяется по ткани до некоторого предельного положения. Соответствующее предельное положение изотермы криопоражения определяет максимальный размер деструкции биоткани. На динамику криопоражения влияет геометрия охлаждающей поверхности криозонда и ее температура, теплофизические характеристики замороженной и не замороженной ткани, метаболическая скорость теплообразования ткани, температура крови, скорость кровотока в ткани, условия теплообмена на поверхности ткани [4].

Ранее в [5] была приведена постановка задачи для случая цилиндрического инструмента, располагаемого на поверхности биоткани, в связи с чем область, в которой искалось решение задачи, имело форму полукольца. Также в [5] был детально рассмотрен алгоритм исследования поставленной задачи и приведены результаты численных расчетов на ЭВМ. Модель, рассматриваемая в настоящей работе, несколько отличается от выше указанной.

1. Постановка задачи

Будем считать, что криоинструмент имеет цилиндрическую форму, достаточно протяжен и полностью внедрен в биоткань. Область, в которой будем искать распределение температуры, будет иметь форму кольца. В силу симметрии относительно оси Z (ось $0Z$ считаем проходящей через ось инструмента), мы получаем двумерную начально-краевую задачу типа Стефана.

Постановку задачи, в связи со сказанным выше, целесообразней будет сделать, введя полярные координаты

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

где r - полярный радиус, а φ - полярный угол. Тогда уравнения, описывающие процесс распространения тепла в указанной выше области, будут следующими:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)-c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t}= \\
=-w(u)+P\frac{\partial u}{\partial t}\delta(u-u_1)+P_0\frac{\partial u}{\partial t}\delta(u-u_2), \\
0<\varphi<2\pi, \quad r_0<r<R,
\end{gathered}$$

$$u(r,\varphi,0)=\bar{u}=const, \quad r_0\le r\le R, \quad 0\le\varphi\le 2\pi, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}
\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r}-\alpha u=\alpha u_3, \quad r=r_0, \quad 0\le\varphi\le 2\pi, \quad t>0, \\
u(r,\varphi,t)=\bar{u}, \quad r=R, \quad 0\le\varphi\le 2\pi, \quad t>0, \\
u(r,0,t)=u(r,2\pi,t), \quad r_0\le r\le R, \quad t>0.
\end{gathered}$$

$$\left.\begin{aligned}
u(r,\varphi_1(r,t),t) &= u_1, \\
u(r,\varphi_2(r,t),t) &= u_2,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Здесь $\lambda(u), c(u), \rho(u)$ - коэффициенты теплопроводности, теплоемкости и плотности биоткани соответственно; $\varphi_1(r,t), \varphi_2(r,t)$ - изотермические поверхности, на которых температура биоткани равна u_1 и u_2 соответственно; r_0 - радиус цилиндрического криозонда; R - некоторая известная постоянная величина (ее значение можно получить из решения одномерной стационарной задачи, см., например, в [4]), характеризующаяся тем, что вне круга радиуса R температура биоткани постоянна и равна $\bar{u}$; P, P_0, u_0 - заданные постоянные; α - коэффициент теплообмена биоткани и криоинструмента; u_3 - температура его охлаждающей поверхности (может зависеть от времени), $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака.

Определению подлежат функции $u(r,\varphi,t), \varphi_1(r,t), \varphi_2(r,t)$. Будем считать, что коэффициенты $c(u), \rho(u), \lambda(u)$ могут иметь разрывы 1 рода при $u = u_1$ и $u = u_2$ и что выполнено условие $c(u) \geq c_{min} > 0$, $\rho(u) \geq \rho_{min} > 0$, $\lambda(u) \geq \lambda_{min} > 0$. Для решения поставленной задачи (1), (2) предлагается следующий алгоритм.

2. Метод решения

Вводя функцию

$$H(u) = \int_0^u c(\xi)\rho(\xi)\,d\xi + P\eta(u-u_1) + P_0\eta(u-u_2),$$

где $\eta(x)$ – функция Хевисайда, уравнение (1) можно переписать в виде:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) + w(u) = \frac{\partial H(u)}{\partial t}.$$

Далее, проводим сглаживание функций $H(u), \lambda(u)$ после чего получаем последовательность ограниченных гладких функций $H^k(u), \lambda^k(u)$, сходящихся при $k \to \infty$ и $u \neq u_2, u \neq u_1$, соответственно к $H(u), \lambda(u)$ [6], причем:

$$B^k(u) = H_u^k(u) \geq c = const > 0.$$

Задачу Стефана (1), (2) можно теперь заменить аппроксимирующей «сглаженной» задачей, для которой и будет строиться численный алгоритм:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda^k\left(u^k\right)\frac{\partial u^k}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\lambda^k\left(u^k\right)\frac{\partial u^k}{\partial\varphi}\right) - B^k\left(u^k\right)\frac{\partial u^k}{\partial t} = \\
&= -w\left(u^k\right), \quad r_0 < r < R, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad t > 0, \\
&u^k(r,\varphi,0) = \bar{u} = const, \quad r_0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\
&\lambda^k\left(u^k\right)\frac{\partial u^k}{\partial r} - \alpha u^k = \alpha u_3, \quad r = r_0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t > 0, \\
&u^k(r,\varphi,t) = \bar{u}, \quad r = R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t > 0, \\
&u^k(r,0,t) = u^k(r,2\pi,t), \quad r_0 \leq r \leq R, \quad t > 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Условия (2) на изотермических поверхностях при такой постановке содержатся в уравнении (3). Для решения данной задачи можно применить локально-одномерный метод [7].

Прежде, чем выписывать разностную схему введем в рассматриваемой нами области пространственно-временную сетку. Для простоты будем рассматривать равномерные сетки по каждому из направлений.

Обозначим:

$$\overline{W}_r = \{r_i = ih_r,\ i = 0, 1, \ldots, N-1, N\},$$

где

$$r_N = R,\ r_0 = r_0;$$

$$\overline{W}_\varphi = \{\varphi_j = jh_\varphi,\ j = 0, 1, M-1, M\},$$

где

$$\varphi_0 = 0,\ \varphi_M = 2\pi;$$

$$\overline{W}_t = \{t_n = n\tau,\ n = 0, 1, \ldots\},$$

где

$$t_0 = 0.$$

Тогда на множестве $\overline{W} = \overline{W}_r \cdot \overline{W}_\varphi \cdot \overline{W}_t$ вместо функции непрерывных аргументов $u(r, \varphi, t)$ будем рассматривать функцию дискретных аргументов ν_{ij}^n, значения которой вычисляются в узлах сетки $\overline{W}$. Обозначим через $\overline{W}_{r\varphi} = \overline{W}_r \cdot \overline{W}_\varphi$. Для сеточной функции ν_{ij}^n получаем следующую разностную схему:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} B\left(\nu_{ij}^{n+1/2}\right) \cdot \frac{\nu_{ij}^{n+1/2} - \nu_{ij}^n}{\tau} = \Lambda_1 \nu_{ij}^{n+1/2} + \frac{1}{2} w\left(\nu_{ij}^{n+1/2}\right),\\
&(r_i, \varphi_j) \in W_{r\varphi},\ \nu_{Nj}^{n+1/2} = \bar{u},\ 0 < j < M,\\
&\nu_{0j}^{n+1/2} = \frac{\lambda\left(\nu_{0j}^{n+1/2}\right)}{\alpha h_r + \lambda\left(\nu_{0j}^{n+1/2}\right)} \cdot \nu_{ij}^{n+1/2} + \frac{h_r \alpha u_3}{\alpha h_r + \lambda\left(\nu_{0j}^{n+1/2}\right)},\ 0 < j < M,\\
&\Lambda_1 \nu_{ij}^{n+1/2} = \frac{1}{r_i} \cdot \frac{1}{h_r} \cdot \left(r_{i+1/2} \cdot \lambda\left(\nu_{i+1/2,j}^{n+1/2}\right) \cdot \frac{\nu_{i+1,j}^{n+1/2} - \nu_{ij}^{n+1/2}}{h_r} - \right.\\
&\left. - r_{i-1/2} \cdot \lambda\left(\nu_{i-1/2,j}^{n+1/2}\right) \cdot \frac{\nu_{ij}^{n+1/2} - \nu_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_r} \right),\\
&\frac{1}{2} B\left(\nu_{ij}^{n+1}\right) \frac{\nu_{ij}^{n+1} - \nu_{ij}^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 \nu_{ij}^{n+1} + \frac{1}{2} w\left(\nu_{ij}^{n+1}\right),\ (r_i, \varphi_j) \in W_{r\varphi},\\
&\Lambda_2 \nu_{ij}^{n+1} = \frac{1}{r_i^2} \cdot \frac{1}{h_\varphi} \cdot \left(\lambda\left(\nu_{i,j+1/2}^{n+1}\right) \cdot \frac{\nu_{i,j+1}^{n+1} - \nu_{ij}^{n+1}}{h_\varphi} - \lambda\left(\nu_{i,j-1/2}^{n+1}\right) \cdot \frac{\nu_{ij}^{n+1} - \nu_{i,j-1}^{n+1}}{h_\varphi} \right),\\
&\nu_{ij}^0 = \bar{u},\ t = 0,\ 0 \le i \le N,\ 0 \le j \le M,\\
&\nu_{i0}^n = \nu_{iM}^n,\ 0 \le i \le N,\ n = 1, 2, \ldots
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\nu_{i+1/2,j} = 0,5\left(\nu_{ij} + \nu_{i+1,j}\right),\ \nu_{i,j+1/2} = 0,5\left(\nu_{ij} + \nu_{i,j+1}\right),\\
&r_{i+1/2} = 0,5\left(r_i + r_{i+1}\right),\ r_{i-1/2} = 0,5\left(r_i - r_{i-1}\right).
\end{aligned}$$

У функций $B^k,\ u^k,\ \lambda^k$ для наглядности индекс k опущен. Для нахождения значений сеточной функции ν на $(n+1)$-м временном слое по известному значению на n-м временном слое необходимо последовательно решать две серии одномерных задач, соответственно по координатам r и φ. Каждая такая задача представляет собой нелинейную алгебраическую систему, для решения которой лучше использовать метод прогонки (циклической по направлению φ, так как матрица системы не является трехдиагональной) совместно с каким-либо итерационным методом, например, методом Ньютона. При этом при определении ν^{n+1} коэффициенты c, ρ, λ можно брать на предыдущей итерации [8]. Вопрос о сходимости итерационного процесса рассматривался ранее в [9]. Расчетные данные можно взять, например, в [10].

Одним из существенных достоинств описанного алгоритма решения поставленной задачи является возможность использования большого шага по времени, что, как правило, приводит к неустойчивости счета при использовании чисто явных разностных схем. Область определения сглаживающей функции лучше выбирать так, чтобы охватывалось 2-3 счетные точки [6].

Заключение

По результатам расчётов можно сделать следующие выводы:

1) результаты счета вполне согласуются с результатами счета других двумерных задач, рассмотренных ранее автором, (см., например, [5]), а также с результатами, полученными другими авторами при рассмотрении одномерных нестационарных задач типа Стефана, возникающих в криохирургии, (см., например [11]);

2) анализ выполненных расчетов позволил проследить стабилизацию как поля температуры так и поля изотерм к предельному стационарному состоянию;

3) в результате счета обнаружена связь между шагами по времени и пространству, что говорит о том, что полученная разностная схема, по всей видимости, является условно-устойчивой;

4) при тех же исходных данных, что и в работе [5], т.е. $r_0 = 1$мм (радиус цилиндрического криоинструмента) $u_3 = -90°C$, $w_0 = 48500, \beta = 0.5$, (остальные значения исходных данных, характеризующих биоткань, можно посмотреть в [10]) получены следующие результаты: стабилизация к предельному стационарному состоянию достигается примерно через 6 минут; при этом радиус зоны поражённой биоткани колеблется около отметки 14 мм, радиус зоны замороженной биоткани ≈17 мм, а радиус зоны охлаждённой биоткани ≈30 мм. Таким образом, размеры интересующих нас зон криопоражения, замораживания и влияния холода получились несколько меньше, чем для случая цилиндрического криоинструмента, располагаемого на поверхности биоткани. Это объясняется тем, что здесь отсутствует контакт с окружающей средой, имеющей температуру, меньшую, чем температура биоткани (при проведении расчётов в [5] температура окружающей среды бралась равной $20°C$).

Список литературы

[1] Baissalov R., Sandison G.A., Donnelly B.J., Saliken J.C., McKinnon J.G., Muldrew K., Rewcastle J.C. A semi-empirical treatment planning model for optimization of multiprobe cryosurgery. Phys. Med. Biol. 45, 1085-1098 (2000).

[2] Rossi M.R., Rabin Y. Experimental verification of numerical simulations of cryosurgery with application to computerized planning. Phys. Med. Biol. 52, 4553-4567 (2007).

[3] Rabin Y., Shitzer A. Numerical solution of the multidimensional freezing problem during cryosurgery. ASME J. Biomech. Eng. 120(1), 32-37 (1998).

[4] Митропольский Ю.А., Березовский А.А. Задачи Стефана с предельным стационарным состоянием в спецэлектрометаллургии, криохирургии и физике моря. Мат. Физика и нелинейн. механика.- 1987.- Вып. 7 - с. 50-60.

[5] Буздов Б.К. Двумерная краевая задача типа Стефана для полукольца. Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, №1, 2007, с. 30-33.

[6] Будак Б.М., Васильев Ф.П., Успенский А.Б. Разностные методы решения некоторых краевых задач типа Стефана. В сб. «Численные методы в газовой динамике». Вып. IV. М., Изд-во МГУ, 1965, 139-183.

[7] Самарский А.А. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках. ЖВМ и МФ, 1963, т.3, N 3, с. 431-466.

[8] Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана. ЖВМ и МФ, 1965, т.5, N 5, с. 816-827.

[9] Буздов Б.К. О сходимости метода квазилинеаризации в нелинейных краевых задачах. В сб. «Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения». Киев, Институт математики АН Украины, 1993.

[10] Березовский А.А., Леонтьев Ю.В. Математическое прогнозирование криовоздействия на биологические ткани. Ж. «Криобиология». - Киев:, Наукова думка, № 3, 1989 г., с. 7-13.

[11] Березовский А.А., Жураев К.О., Юртин И.И. Нестационарные задачи сферически-симметричной гипотермии биоткани. Задачи Стефана со свободными границами.- Киев, 1990.- с. 9-20 (Препр / АН УССР. Ин-т математики; 90.27)