УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНЕЧНЫХ ПЛОСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ БЕСКОНЕЧНО ПРОТЯЖЕННЫХ УПРУГИХ ТЕЛ С ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Рябова О.А.
Кафедра вычислительной математики

Поступила в редакцию 07.02.2011, после переработки 20.02.2011.

Решается методом Ньютона-Канторовича задача о распределении напряжений в упругом теле с возникающими в теле жесткими круговыми включениями для случая конечных плоских деформаций. Исследуется напряженно-деформированное состояние вблизи жестких включений и проводится сравнение решений задачи, полученных методом малого параметра и методом Ньютона-Канторовича.

The problem of stress distribution in elastic solid with rigid circular inclusions, arising in a solid, is solved by Newton - Kantorovich method under the conditions of finite plane strains. Is investigated of stress distribution near to rigid inclusions. The comparison of solutions obtained by method of small parameter and Newton - Kantorovich method is performed.

Ключевые слова: конечные плоские деформации, упругое тело, жесткие включения.
Keywords: finite plane strains, elastic solid, rigid inclusions.

Введение

Рассматривается модель деформирования предварительно нагруженных бесконечно протяженных нелинейно-упругих тел с возникающими в них жесткими круговыми включениями (с учетом изменения размеров включений после их образования). Соответствующая данной модели краевая задача решена приближенными численно-аналитическими методами. Нелинейная задача решается методом Ньютона–Канторовича [6]. Решение линеаризованной задачи осуществляется методом Мусхелишвили [8]. Ранее задача о распределении напряжений в бесконечно протяженном нелинейно-упругом теле для случая конечных плоских деформаций была решена методом малого параметра (метод последовательных приближений) [9, 10], применение метода Ньютона–Канторовича к решению задач о концентрации напряжений упругих включений, образованных в предварительно нагруженных телах при конечных деформациях, рассмотрено в [1]. Исследуется напряженно-деформированное состояние вблизи жестких включений и проводится сравнение решений задачи, полученных методом малого параметра и методом Ньютона-Канторовича.

1. Постановка задачи

Имеется бесконечно-протяженное нелинейно-упругое тело из материала Муни. В начальном (ненапряженном) состоянии в теле отсутствуют напряжения и деформации. Затем, под воздействием внешней начальной нагрузки, приложенной к телу, в теле накапливаются большие напряжения и деформации. Тело переходит в промежуточное состояние. В теле возникает жесткое включение. Его возникновение не меняет напряженно-деформационное состояние в оставшейся части тела. Далее радиус включения меняется на заданную величину. При этом происходит смещение частиц тела на границе включения, в теле возникают дополнительные большие (по крайней мере в окрестности включения) деформации и соответствующие им напряжения, которые накладываются на начальные деформации и напряжения. Тело переходит в конечное состояние. Динамические эффекты, вызванные изменением размера включения, не учитываются.

Предполагается, что главный вектор внешних сил, приложенный к контуру каждого включения, равен нулю.

Используются следующие обозначения:

$\overset{2}{\nabla}$ — оператор градиента в координатах 2-го состояния;

$\Delta_{i,j}$ — относительное изменение объема при переходе из i-го в j-е состояние;

$\mathbf{u_2}$ — вектор перемещений из 0-го в состояние 2;

$\boldsymbol{\sigma}_{0,2}$ — тензор полных истинных напряжений при переходе из 0-го состояния в состояние 2,

$\boldsymbol{\sigma}_{0,2}^{\infty}$ - тензор истинных напряжений на бесконечности;

$\boldsymbol{\Psi_{i,j}}$ — аффинор деформаций при переходе из i-го состояния в j;

$\mathbf{F_{0,2}}$ — тензор меры, характеризующий деформации $\mathbf{F_{0,2}} = \boldsymbol{\Psi}^*_{\mathbf{0,2}} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{0,2}}$;

$p_{0,2}$ — множитель Лагранжа;

$\mathbf{I}$ — единичный тензор;

Γ — граница включения.

С учетом введенных обозначений математическая постановка задачи в координатах конечного (второго) состояния имеет следующий вид.

Уравнение равновесия:

$$\overset{2}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0,2} = 0. \tag{1}$$

Уравнения несжимаемости:

$$1 + \Delta_{0,1} = 1\,, \quad 1 + \Delta_{1,2} = 1\,. \tag{2}$$

Граничные условия:

$$\mathbf{u}_2|_{\Gamma} = \tilde{u}, \tag{3}$$

где $\tilde{u}$ - смещение частиц тела на границе включения;

$$\boldsymbol{\sigma}_{0,2}|_{\infty} = \boldsymbol{\sigma}_{0,2}^{\infty}. \tag{4}$$

Определяющее соотношение для потенциала Муни [7]:

$$\boldsymbol{\sigma}_{0,2} = \frac{\mu}{2}\{(1+\beta)\mathbf{F}_{0,2} + (1-\beta)[(\mathbf{F}_{0,2} : \mathbf{I})\mathbf{F}_{0,2} - \mathbf{F}_{0,2}^2]\} - p_{0,2}\mathbf{I}, \tag{5}$$

частным случаем потенциала Муни при $\beta = 1$ является потенциал Трелоара

$$\boldsymbol{\sigma}_{0,2} = \mu \mathbf{F}_{\mathbf{0},\mathbf{2}} - p_{0,2}\mathbf{I}. \tag{6}$$

Геометрические соотношения:

$$1 + \Delta_{0,1} = \det \boldsymbol{\Psi}_{0,1}\,, \quad 1 + \Delta_{1,2} = \det \boldsymbol{\Psi}_{1,2}\,, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{0,2} = \boldsymbol{\Psi}_{0,1} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{1,2}\,, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{1,2} = \left(\mathbf{I} - \overset{2}{\nabla}\mathbf{u}_2\right)^{-1}. \tag{9}$$

2. Методы решения задачи

При решении задач используется модифицированный метод Ньютона-Канторовича [6]. В качестве начального приближения выбирается

$$\mathbf{u}_1^{(0)} = 0\,, \quad p_1^{(0)} = 0\,, \quad \mathbf{u}_2^{(0)} = 0\,, \quad p_2^{(0)} = 0\,. \tag{10}$$

В качестве начального приближения для $\boldsymbol{\Psi}_{0,1}$ в соответствии с первым из соотношений (10) выбирается $\boldsymbol{\Psi}_{0,1}^{(0)} = \mathbf{I}$.

Пусть L — линейный оператор вида:

$$L[\mathbf{u}, p] = \mu(1 - \beta)(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla) - p\mathbf{I}\,,$$

тогда при выборе начального приближения в виде (10) линеаризованная задача для $(i+1)$-го приближения при применении модифицированного метода Ньютона-Канторовича может быть записана следующим образом:

уравнение равновесия:

$$\overset{2}{\nabla} \cdot L\left[\hat{\mathbf{u}}_2^{(i)}, \hat{p}_2^{(i)}\right] = \mathbf{f}^{(i)}\,, \tag{11}$$

где $\mathbf{f}^{(i)}$ — вектор «фиктивных» массовых сил для i-го приближения,

условие несжимаемости:

$$\overset{2}{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{u}}_2^{(i)} = h^{(i)}, \tag{12}$$

граничные условия:

$$\left.\hat{\mathbf{u}}_2^{(i)}\right|_{\Gamma} = \tilde{u}_2^{(i)}\,, \tag{13}$$

$$\left.L\left[\hat{\mathbf{u}}_2^{(i)}, \hat{p}_2^{(i)}\right]\right|_{\infty} = \overset{\infty}{\boldsymbol{\sigma}}{}_{0,2}^{(i)}\,. \tag{14}$$

После нахождения поправок к решению $\hat{\mathbf{u}}_2^{(i)}$ и $\hat{p}_2^{(i)}$ приближение $(i+1)$ определяется по формулам

$$\mathbf{u}_2^{(i+1)} = \mathbf{u}_2^{(i)} + \hat{\mathbf{u}}_2^{(i)}, \quad p_2^{(i+1)} = p_2^{(i)} + \hat{p}_2^{(i)}. \tag{15}$$

Функции в правых частях уравнений и граничных условий находятся по ниже приведенным формулам.

$$\mathbf{f}^{(i)} = -\overset{2}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0,2}^{(i)} ,$$

$$h^{(i)} = \det \boldsymbol{\Psi}_{2,1}^{(i)} - 1 ,$$

$$\tilde{u}_2^{(i)} = \tilde{u}^{(i)} - \hat{\mathbf{u}}_2^{(i)}\Big|_\Gamma ,$$

где

$$\boldsymbol{\sigma}_{0,2}^{(i)} = \frac{\mu}{2}\left\{(1+\beta)\mathbf{F}_{0,2}^{(i)} + (1-\beta)\left[\left(\mathbf{F}_{0,2}^{(i)} : \mathbf{I}\right)\mathbf{F}_{0,n}^{(i)} - \mathbf{F}_{0,n}^{(i)\,2}\right]\right\} - p_{0,2}^{(i)}\mathbf{I} ,$$

$$\mathbf{F}_{0,2}^{(i)} = \boldsymbol{\Psi}_{0,2}^{(i)\,*} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{0,2}^{(i)} , \quad \boldsymbol{\Psi}_{0,2}^{(i)} = \boldsymbol{\Psi}_{0,1} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{1,2}^{(i)} ,$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{1,2}^{(i)} = \left[\boldsymbol{\Psi}_{2,1}^{(i)\,2} - \left(\boldsymbol{\Psi}_{2,1}^{(i)} : \mathbf{I}\right)\boldsymbol{\Psi}_{2,1}^{(i)} + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\Psi}_{2,1}^{(i)} : \mathbf{I}\right)^2\mathbf{I} - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\Psi}_{2,1}^{(i)\,2} : \mathbf{I}\right)\mathbf{I}\right],$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{2,1}^{(i)} = \mathbf{I} - \overset{2}{\nabla}\mathbf{u}_2^{(i)} .$$

Линеаризованная краевая задача для каждого приближения решается методом Колосова-Мусхелишвили [8]–[10].

3. Результаты

Численные значения получены с помощью программного комплекса «Наложение» , который был модифицирован с учетом приведенных выше соотношений [2]–[5].

Результаты решения плоской задачи о напряженно–деформированном состоянии модифицированным методом Ньютона–Канторовича приведены на рис. 1 — 4.

Расчет выполнен для материала Муни при $\beta = 1$. Задача решалась в координатах конечного состояния. Вычислено 5 приближений. Радиус включения $R = 1$, центр включения совпадает с началом координат. Начальное нагружение — одноосное растяжение по оси OY: $\sigma_{11}^{\infty}/\mu = 0$, $\sigma_{22}^{\infty}/\mu = p$.

На рис. 1 приведено распределение напряжения σ_{22}/μ вдоль оси OY при $p = 1,9\mu$. Линии, помеченные цифрами $1-5$ соответствуют номерам приближений метода Ньютона-Канторовича. Из рис. 1 видно, что четвертое и пятое приближения метода Ньютона-Канторовича различаются незначительно. Разность четвертого и пятого приближений приблизительно равна $0,2\%$. Можно сделать вывод о сходимости метода в указанном диапазоне нагрузок.

Из рис. 1 видно, что при $R \le y \le 1.5R$ напряжение σ_{22} возрастает, а при $y > 1.5R$ напряжение σ_{22} убывает.

На рис. 2 приведена часть эпюры (1 четверть) истинных контурных напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}/\mu$ на границе включения при уменьшении размера включения на 25%. Начальное нагружение — одноосное растяжение по оси OY: $\sigma_{11}^{\infty} = 0$, $\sigma_{22}^{\infty} = 4\mu$. В правом верхнем углу приведен масштаб напряжений, отнесенных к модулю сдвига μ. Линии, помеченные цифрами $1-5$ соответствуют номерам приближений метода Ньютона-Канторовича.

На рис. 3 приведена зависимость концентрации напряжения σ_{rr}, отнесенного к модулю сдвига μ, в точке максимальной концентрации напряжения — точке с координатами $(0;1)$ от напряжения на бесконечности p/μ. Для сравнения приведены

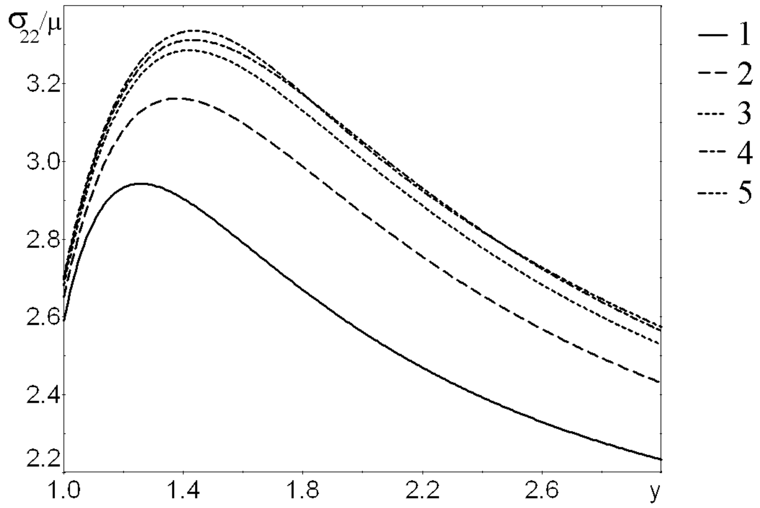

Рис. 1: Зависимость σ_{22}/μ от y

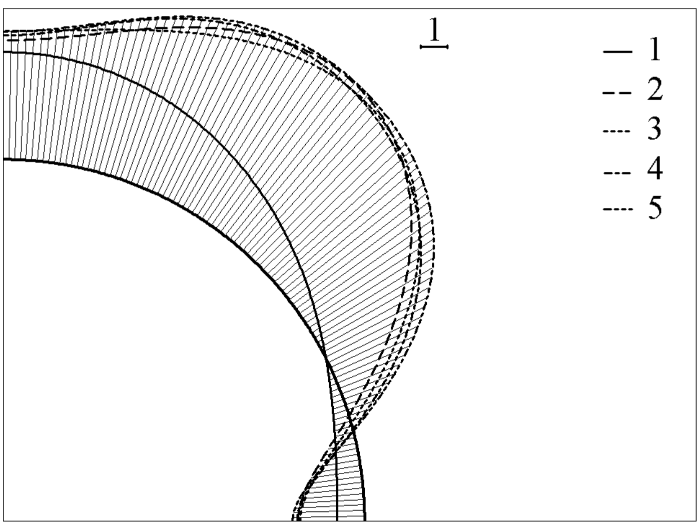

Рис. 2: Часть эпюры истинных контурных напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}/\mu$ на границе включения при изменении размеров включения

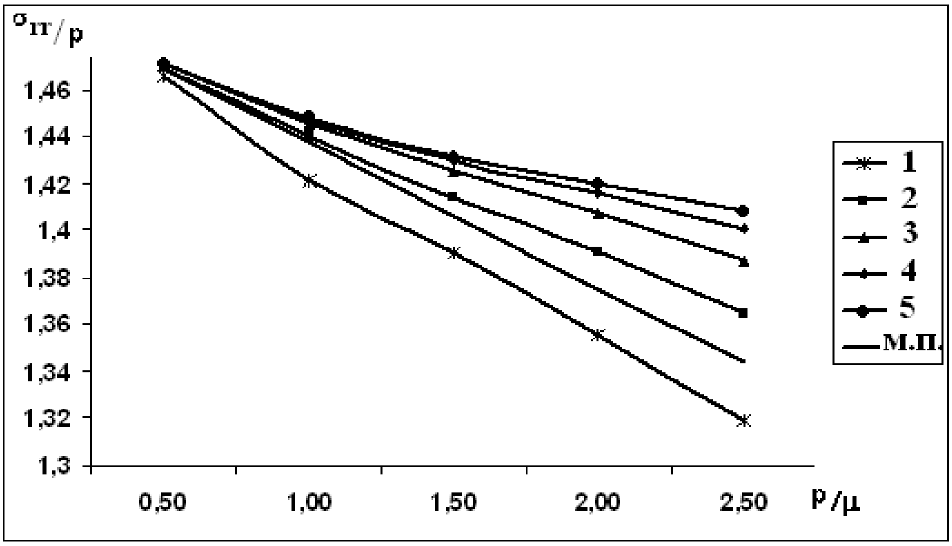

Рис. 3: Концентрация напряжения σ_{rr}/μ в зависимости от напряжений на бесконечности p/μ

результаты решений той же задачи методом малого параметра. Сравнивая, видим, что метод малого параметра и метод Ньютона-Канторовича дают примерно одни и те же результаты. Методу малого параметра соответствует сплошная линия. Линии, помеченные цифрами 1 – 5 соответствуют номерам приближений метода Ньютона–Канторовича. Разность между решением, полученным методом малого параметра, и пятым приближением метода Ньютона–Канторовича не превышает 5%. Разность четвертого и пятого приближений в методе Ньютона-Канторовича приблизительно равна $0,5\%$.

На рис. 4 даны зависимости величин Δ_2, Δ_3, Δ_4 и $\Delta_{\text{м.п.}}$ от величины p/μ. Использованы следующие обозначения:

$$\Delta_{\text{м.п.}} = \max\left|\frac{\boldsymbol{\sigma}_{rr}^{\text{м.п.}} - \boldsymbol{\sigma}_{rr}^{5}}{\boldsymbol{\sigma}_{rr}^{5}}\right| * 100$$

$$\Delta_k = \max\left|\frac{\boldsymbol{\sigma}_{rr}^{k+1} - \boldsymbol{\sigma}_{rr}^{k}}{\boldsymbol{\sigma}_{rr}^{k}}\right| * 100 \quad k = 1,2,3,4$$

здесь верхний индекс (k) — указывает номер приближений по методу Ньютона-Канторовича, индекс «м.п.» соответствует первому приближению метода малого параметра. Максимум определяется на контуре включения.

Заключение

Таким образом, в статье рассмотрена математическая модель, описывающая при конечных плоских деформациях напряженно-деформированное состояние бесконечно протяженных нелинейно-упругих тел с жесткими круговыми включения-

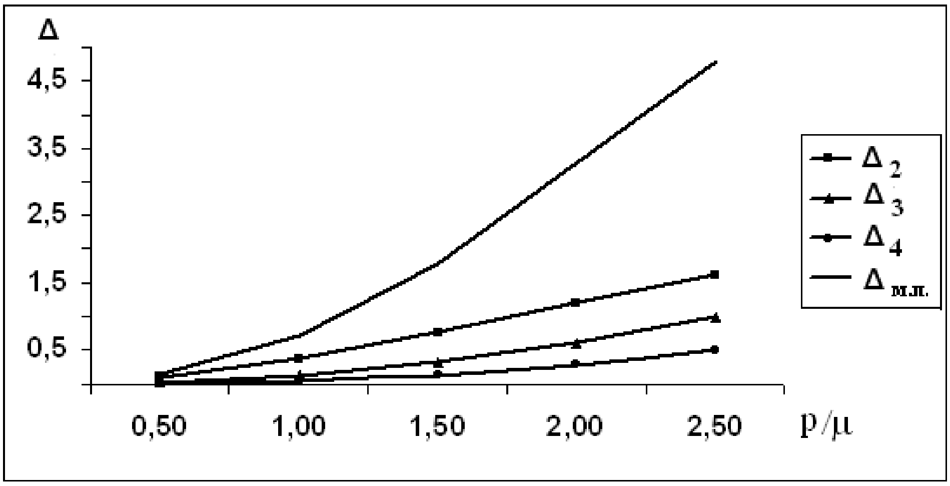

Рис. 4: Зависимость максимального относительного приращения напряжения σ_{rr}/μ при применении методов малого параметра и Ньютона-Канторовича от величины начального нагружения p/μ

ми, возникающими после предварительного нагружения. Модель учитывает возможность изменения размеров включений после их образования. Задача, соответствующая этой модели, решена с применением метода Ньютона-Канторовича, удовлетворяющего граничным условиям на контурах жестких круговых включений. Сравнение результатов решения задач методом малого параметра и модифицированным методом Ньютона-Канторовича показывает незначительное расхождение. Рассмотренная модель может быть использована для описания деформированя резин при кристаллизации, вызванной предварительной деформацией.

Список литературы

[1] Зингерман К.М., Левин В.А. Перераспределение конечных упругих деформаций после образования включений. Приближенное аналитическое решение. // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 6. С. 983-1001.

[2] Зингерман К.М., Рябова О.А. Программный комплекс для прочностных расчетов для тел с включениями // Программные продукты и системы. Тверь, 2011. С. 153–155.

[3] Левин В.А., Зингерман К.М. Плоские задачи теории многократного наложения больших деформаций. Методы решения. М.: Физматлит, 2002. 272 с.

[4] Левин В.А., Зингерман К.М. О погрешности приближенного решения задачи об образовании концентратора напряжений в предварительно нагруженном упругом теле. Наложение больших деформаций. // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2000. Спецвыпуск «Нелинейные проблемы механики сплошной среды». С. 99–106.

[5] Левин В.А., Калинин В.В., Зингерман К.М., Вершинин А.В. Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. М.: Физматлит, 2007. 392 с.

[6] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.

[7] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука,1980. 512 с.

[8] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

[9] Рябова О.А., Зингерман К.М. Численно-аналитическое моделирование напряженно-деформированного состояния вблизи жестких включений в теле из нелинейно-упругого материала с учетом их взаимовлияния // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. Тверь, 2007. №7. С. 89–98.

[10] Рябова О.А., Зингерман К.М. Нелинейная модель образования жестких включений в бесконечно–протяженном упругом теле и методы ее исследования // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. Тверь, 2009. №14 С. 37–44.

[11] Levin V.A., Zingerman K.M. Interaction and microfracturing pattern for succesive origination (introduction) of pores in elastic bodies: finite deformation // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 1998. Vol. 65, No. 2, P. 431-435.