УДК 514.82

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ПЯТИМЕРНОЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ С БРАНОЙ

Григорьева О.А., Шаров Г.С.
Кафедра функционального анализа и геометрии

Поступила в редакцию 19.02.2011, после переработки 26.02.2011.

Рассмотрена гравитационная модель Рэндалл–Сундрума с одним дополнительным пространственным измерением. Решения уравнений эволюции, являющиеся аналогом космологических решений Фридмана, найдены в 5-мерном многообразии, которое включет $3+1$- мерное физическое пространство-время и внешнее пространство.

We consider the Randall–Sundrum model of gravity with one extra spatial dimension. We obtain solutions of evolutionary equations similar to cosmological Friedmann solutions. These solutions describe the 5-dimensional manifold including the 4D physical spacetime and the exterior bulk space.

Ключевые слова: модель Рэндалл–Сундрума, брана, внешнее пространство.
Keywords: Randall–Sundrum model, brane, bulk space.

1. Введение

Гипотеза Калуцы–Клейна о существовании дополнительных измерений пространства обсуждается в теоретической физике уже три четверти века. Одно из направлений развития этой гипотезы — разработка моделей, в которых пространственно-временное многообразие является прямым произведением пространства Минковского на компактное многообразие, характерный размер которого мал [1]. Примером, поясняющим эту модель компактификации дополнительных измерений, служит двумерный цилиндр $C = \mathbb{R} \times S^1_a$; в случае, если радиус a мал (в современных моделях характерный размер $a \simeq 10^{-33}$ см), то такой цилиндр можно воспринимать как одномерную линию.

Другое направление представляют популярные в последние годы модели, которые основаны на гипотезе, что наш мир является браной — гиперповерхностью с тремя пространственными измерениями и одним временным, вложенной в некоторое многомерное многообразие. Иногда термин “брана” (происходящий от “мембрана”) или p-брана используется также для обозначения пространственной части упомянутой гиперповерхности — p-мерного физического объекта расположенного (движущегося) в псевдоримановом пространстве большей размерности. При этом материальная точка является 0-браной, струна — 1-браной, мембрана — 2-браной.

В этих моделях предполагают, что мы, живя на бране, не видим дополнительных измерений по какой-либо причине. Число дополнительных измерений, их характерный размер, а также наличие и число материальных полей в различных моделях могут заметно отличаться (см. обзоры [2, 3]). Вместе с тем, как правило, предполагается, что размер дополнительного пространства достаточно велик, и дополнительные измерения могут, в принципе, быть обнаружены в планируемых в недалеком будущем экспериментах и (или) астрономических наблюдениях.

В данной работе рассмотрена модель с браной в 5-мерном внешнем пространстве, предложенную в 1999 году Лайзой Рэндалл и Раманом Сундрумом [4, 5].

2. Модели Рэндалл–Сундрума

Рэндалл и Сундрум в работах [4] и [5] предложили две различные модели с гравитирующими 3-бранами в пятимерном пространстве-времени. В сценарии, предложенном в работе [4] и называемом моделью Рэндалл–Сундрума I, рассмотрена система из двух бран в пространстве с компактной (циклической) пятой координатой $\phi \in [-\pi, \pi]$. Брана с положением при $\phi = \pi$ с (постоянной) положительной напряженностью образует наблюдаемый мир, другая брана при $\phi = 0$ с отрицательной напряженностью представляет скрытый (невидимый) мир.

Мы будем рассматривать модель Рэндалл–Сундрума II (RSII), предложенную в работе [5], которая представляет собой систему из одной браны в пятимерном пространстве-времени с некомпактной дополнительной координатой $y \in \mathbb{R}$. Пятимерное пространство-время при $y \neq 0$ мы называем ниже внешним пространством.

Действие данной модели представляется в виде суммы действия Эйнштейна–Гильберта для внешнего пространства и действия браны:

$$S = -\int d^5x \left[\sqrt{-g}\left(\frac{R}{2\kappa^2} + \Lambda_5\right) + \sigma \cdot \delta(y)\sqrt{-g^{(4)}}\right] \tag{1}$$

где Λ_5 — космологическая постоянная, κ — гравитационная постоянная в 5-мерном внешнем пространстве, σ — напряженность браны, y — координата 5-ого измерения, $\delta(y)$ — дельта-функция, g, $g^{(4)}$ — определители метрик, относящихся к 5-мерному внешнему пространству и бране соответственно, R — скалярная кривизна. Брана определена при $y = 0$.

Некомпактность ($y \in \mathbb{R}$) является существенной особенностью этой модели, не приводящей при этом к нарушению стандартного закона тяготения Ньютона на бране при $y = 0$. Точнее говоря, поправки к закону Ньютона на бране, найденные в работе [5], становятся существенными только на расстояниях, меньших величины

$$\ell = \sqrt{-\frac{6}{\kappa^2\Lambda_5}}, \tag{2}$$

определяемой отрицательной космологическая постоянной и гравитационной постоянной во внешнем пространстве.

Вариация действия (1) имеет вид

$$\delta S = -\frac{1}{2\kappa^2}\int \left(G_{\mu\nu} - \kappa^2\Lambda_5 g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^5x - \frac{\sigma}{2}\int g^{(4)}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}_{(4)}\sqrt{-g^{(4)}}d^4x.$$

Здесь компоненты метрики $g_{\mu\nu}$, тензоров Эйнштейна и Риччи

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu}, \qquad R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu},$$

скалярная кривизна $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, относятся к 5-мерному внешнему пространству (индексы μ, ν пробегают значения от 0 до 4). Индекс "(4)" отмечает компоненты метрики на бране (в этом случае μ, ν пробегают значения 0,1,2,3). При $y = 0$ величины $g_{\mu\nu}$ непрерывно переходят в $g^{(4)}_{\mu\nu}$.

Приравнивая к нулю вариацию действия (1) при произвольных вариациях метрики $\delta g^{\mu\nu}$, получим уравнения Эйлера–Лагранжа гравитационного поля для действия (1). Они имеют вид:

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 \big[\Lambda_5 + \sigma\delta(y)\big] g_{\mu\nu}, \qquad \mu, \nu \le 3, \tag{3}$$

$$G_{\mu 4} = \kappa^2 \Lambda_5 g_{\mu 4}, \qquad \mu = 0, \ldots, 4. \tag{4}$$

Заметим, что эта модель допускает решение, обобщающее решение Шварцшильда. Полагая, что точечная масса размещена на бране (при $y = 0$), рассмотрим метрику со сферической симметрией на бране в следующем виде:

$$ds^2 = e^{-2P(y)}\big[e^{\alpha(r)} dt^2 - e^{\beta(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\varphi^2)\big] - dy^2.$$

Вычислив символы Кристоффеля, компоненты тензора Риччи, скалярную кривизну для этой метрики и подставив эти величины в уравнения модели (3), (4), получим систему из 4 независимых уравнений

$$\alpha'(r) + \beta'(r) = 0,$$

$$e^{2P-\beta}(\beta'/r - r^{-2}) + e^{2P}/r^2 + 3P''(y) - 6P'^2 = \kappa^2[\Lambda_5 + \sigma\delta(y)],$$

$$\tfrac{1}{4} e^{2P-\beta}\big[-2\alpha'' - \alpha'^2 + \alpha'\beta' + 2(\beta' - \alpha')/r\big] + 3P''(y) - 6P'^2 = \kappa^2[\Lambda_5 + \sigma\delta(y)],$$

$$\tfrac{1}{4} e^{2P-\beta}\big[-2\alpha'' - \alpha'^2 + \alpha'\beta' + 4(\beta' - \alpha')/r - 4r^{-2}\big] + e^{2P}/r^2 - 6P'^2 = \kappa^2\Lambda_5.$$

Выделяя слагаемые, зависящие и не зависящие от r, находим, что функция $P(y)$ должна удовлетворять системе уравнений

$$3P''(y) = \kappa^2\sigma\delta(y), \qquad -6P'^2 = \kappa^2\Lambda_5. \tag{5}$$

Это возможно только при $\Lambda_5 < 0$ — рассматриваемая модель (1) должна быть моделью анти-де Ситтера [2]–[5].

Решение уравнений (5) имеет вид

$$P(y) = \sqrt{\frac{-\kappa^2\Lambda_5}{6}}\,|y| = \frac{|y|}{\ell}, \qquad \ell = \sqrt{-\frac{6}{\kappa^2\Lambda_5}} = \frac{6}{\kappa^2\sigma},$$

где ℓ — величина (2), при выполнении условия

$$\Lambda_5 = -\frac{\kappa^2\sigma^2}{6}, \tag{6}$$

жестко связывающего отрицательную константу Λ_5 для внешнего пространства и натяжение σ браны.

При выполнении этого условия решение системы (3), (4), шварцшильдовского типа имеет вид

$$ds^2 = e^{-2|y|/\ell}\left[\left(1-\frac{r_g}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2+\cos^2\theta\, d\varphi^2)\right] - dy^2. \qquad (7)$$

На бране ($y = 0$) оно проявляется как решение Шварцшильда с ньютоновской асимптотикой потенциала точечной массы $V(r) \sim 1/r$. Заметим, что решение (7) допускает широкий класс обобщений — при замене выражения в квадратных скобках в (7) на любую $3+1$-мерную риччи-плоскую метрику и выполнении равенства (6) мы получим решение системы уравнений (3), (4) данной модели [6].

3. Решения космологического характера

Используя предложенные в работах [2], [7]–[9] методы, будем искать решения уравнений (3), (4), которые являются аналогом космологических решений Фридмана в общей теории относительности (ОТО). Потребуем, чтобы пространственная часть многообразия, относящаяся к бране (сечение $t = \mathrm{const}$, $y = 0$), являлась однородным и изотропным трехмерным многообразием. Возможны 3 варианта, характеризуемые знаком K скалярной кривизны такого многообразия: 1) трехмерная сфера S^3_a ($K = 1$), 2) псевдосфера P^3_a ($K = -1$), 3) евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ ($K = 0$). Предполагаем, что масштабный фактор a зависит от t и y (значение $y \neq 0$ относится к внешнему пространству), причем зависимость от y, как величины $a(t,y)$ так и дополнительного множителя $b(t,y)$ является четной функцией.

С учетом сказанного рассмотрим метрику для модели RSII в следующем виде, обобщающем выражение в работе [2]:

$$ds^2 = a^2(t,y)\left[b^2(t,y)(dt^2-dy^2) - du^2 - c_K^2(u)\,dv^2 - c_K^2(u)\,c_K^2(v)\,dw^2\right]. \qquad (8)$$

Здесь $x^0 = t$, $x^1 = u$, $x^2 = v$, $x^3 = w$, $x^4 = y$,

$$c_K(u) = \begin{cases} \cos(u), & K = 1, \\ 1, & K = 0, \\ \mathrm{ch}(u), & K = -1, \end{cases} \qquad s_K(u) = \begin{cases} \sin(u), & K = 1, \\ u, & K = 0, \\ \mathrm{sh}(u), & K = -1. \end{cases}$$

Подставим метрику (8) в уравнения (3), (4). После вычисления символов Кристоффеля, компонент тензоров Риччи и Эйнштейна находим, что система (3), (4) сводится к четырем нетривиальным уравнениям (при этом $G^1_1 = G^2_2 = G^3_3$):

$$G^0_0 \equiv \frac{3}{a^2b^2}\left(2\frac{\dot a^2}{a^2} - \frac{a''}{a} + \frac{\dot a\dot b}{ab} + \frac{a'b'}{ab} + Kb^2\right) = \kappa^2\big(\Lambda_5 + \sigma\delta(y)\big), \qquad (9)$$

$$G^1_1 \equiv \frac{1}{a^2b^2}\left(3\frac{\ddot a}{a} - 3\frac{a''}{a} + \frac{\ddot b}{b} - \frac{\dot b^2}{b^2} - \frac{b''}{b} + \frac{b'^2}{b^2} + Kb^2\right) = \kappa^2\big(\Lambda_5 + \sigma\delta(y)\big), \qquad (10)$$

$$G^4_4 \equiv \frac{3}{a^2b^2}\left(\frac{\ddot a}{a} - 2\frac{a'^2}{a^2} - \frac{\dot a\dot b}{ab} - \frac{a'b'}{ab} + Kb^2\right) = \kappa^2\Lambda_5, \qquad (11)$$

$$G^4_0 \equiv \frac{3}{a^2b^2}\left(-\frac{\dot a'}{a} + \frac{a'\dot b}{ab} + 2\frac{\dot a a'}{a^2} + \frac{\dot a b'}{ab}\right) = 0. \qquad (12)$$

Здесь и ниже точка означает производную по t, штрих — по y.

В работе [7] было показано, что система уравнений, аналогичная (9) – (12), имеет первый интеграл в области $y \neq 0$ внешнего пространства. В нашем случае, вычислив частные производные по t и по y функции

$$F(t,y) = \left(\dot{a}^2 - a'^2\right)/b^2 + Ka^2$$

и выразив $\dot{a}'$ с помощью уравнения (12), видим, что эти производные с точностью до множителей равны левым частям соответственно уравнений (9) и (12), а сами эти уравнения в области $y \neq 0$ сводятся к виду

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{2}{3}a^3\dot{a}\kappa^2\Lambda_5, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2}{3}a^3a'\kappa^2\Lambda_5.$$

Интегрируя их, получаем упомянутый выше первый интеграл

$$F(t,y) - \frac{1}{6}\kappa^2\Lambda_5 a^4 = C_F = \text{const}, \qquad y \neq 0. \tag{13}$$

Введя стандартное обозначение [2, 7] для отрицательной постоянной Λ_5 внешнего пространства, удовлетворяющей условию (6)

$$\rho_B = -\Lambda_5, \qquad \rho_B = \frac{\kappa^2\sigma^2}{6}, \tag{14}$$

перепишем равенство (13) в виде

$$\dot{a}^2 - a'^2 + Ka^2b^2 + \frac{1}{6}\kappa^2\rho_B a^4 b^2 = C_F b^2, \qquad y \neq 0. \tag{15}$$

Рассмотрим поведение функций a и b на бране (при $y \to 0$). Так как в правой части уравнений (9) и (10) находится δ-функция, то компоненты метрики должны иметь разрывы 1-ых производных по y. Для их анализа проинтегрируем уравнение (9), умноженное на a^2b^2 по y от $-\varepsilon$ до ε, с учетом равенства $\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(y)\,dy = 1$ и четности функций a и b, например $a(t,y) = a(t,-y)$, $a'(t,y) = -a(t,-y)$. В левой части (9) вклад дает только слагаемое с a''/a. Проинтегрируем его по частям:

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{a''}{a}dy = \frac{a'}{a}\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{a'^2}{a^2}dy = 2\frac{a'}{a}\Big|_{y=\varepsilon} + 2\varepsilon\overline{\frac{a'^2}{a^2}}.$$

Здесь учтены разрыв a' по y, нечетность функции a'/a, черта сверху означает среднее значение на интервале $(-\varepsilon,\varepsilon)$. Предел при $\varepsilon \to 0+$ интеграла от уравнения (9) имеет вид:

$$\frac{a'}{a}\Big|_{y=0+} = -\frac{1}{6}a^2b^2\kappa^2\sigma\Big|_{y=0+}. \tag{16}$$

Аналогичным образом интегрируя уравнение (10), при $\varepsilon \to 0+$ имеем

$$-6\lim_{y\to 0+}\frac{a'}{a} - 2\lim_{y\to 0+}\frac{b'}{b} = a^2b^2\kappa^2\sigma\Big|_{y=0+}.$$

Откуда с учетом равенства (16) получаем

$$\frac{b'}{b}\Big|_{y=0+} = 0. \tag{17}$$

Найдем предел уравнения (12) при $y \to 0+$, для этого продифференцируем (16) по t:

$$\frac{\dot{a}'}{a}\Big|_{y=0+} = \frac{\dot{a}a'}{a^2}\Big|_{y=0+} - \frac{1}{3}\sigma\kappa^2 ab(\dot{a}b + a\dot{b})\Big|_{y=0+} \tag{18}$$

Подставляя (16), (17), (18) в уравнение (12) и устремляя $y \to 0+$, получим

$$\lim_{y\to 0+}(\dot{a}ab^2\sigma + \dot{b}ba^2\sigma) = 0, \quad \Rightarrow \quad \Big(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b}\Big)\Big|_{y=0+} = 0.$$

Проинтегрировав по t, придем к равенству

$$a_0(t)\,b_0(t) \equiv ab\Big|_{y=0+} = C = \mathrm{const}. \tag{19}$$

Здесь введены обозначения для масштабного фактора и множителя на бране

$$a_0(t) = a(t,0), \qquad b_0(t) = b(t,0), \tag{20}$$

произведение которых на бране равно константе, обозначенной C в (19).

Для поиска решений системы (9) – (12) на бране полагаем, что в малой ее окрестности ($y \to 0$) имеет место равенство

$$\frac{a''}{a} = -\frac{1}{3}a^2b^2\kappa^2\sigma\delta(y) + \psi(t). \tag{21}$$

Слагаемое с $\delta(y)$ в (21) определяется скачком и пределом (16), $\psi(t)$ — произвольная гладкая функция одной переменной. Подставляя равенства (16), (17), (19), (21) в систему уравнений (9) – (12) при $y \to 0+$ (на бране), приведем ее к виду

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} + \dfrac{KC^2}{a_0^2} = -\dfrac{\kappa^2}{3}C^2\rho_B + \psi(t), \\ 2\dfrac{\ddot{a}_0}{a_0} - \dfrac{b''}{b}\Big|_{y=0+} + \dfrac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} + \dfrac{KC^2}{a_0^2} = -\kappa^2C^2\rho_B + 3\psi(t), \\ \dfrac{\ddot{a}_0}{a_0} + \dfrac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} + \dfrac{KC^2}{a_0^2} = -\dfrac{\kappa^2}{3}C^2\rho_B + \dfrac{\kappa^4}{18}C^4\sigma^2, \end{cases} \tag{22}$$

Вычитая первое уравнение (22), полученное из (9), из двух остальных уравнений этой системы, сведем последние к виду

$$\frac{\ddot{a}_0}{a_0} = -\frac{\kappa^2}{3}C^2\rho_B + \frac{1}{2}\frac{b''}{b}\Big|_{y=0+} + \psi(t) = \frac{\kappa^4}{18}C^4\sigma^2 - \psi(t). \tag{23}$$

Дифференцируя по t первое уравнение системы (22) (умноженное на a_0^2) и исключая из двух первых уравнений этой системы $\ddot{a}_0$ и $\dot{a}_0$, получим соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{b''}{b}\Big|_{y=0+} = \frac{\dot{\psi}}{2}\frac{a_0}{\dot{a}_0}. \tag{24}$$

Подставив его во второе равенство (23), придем к уравнению

$$a_0\dot{\psi} + 4\dot{a}_0\psi = Q^2\dot{a}_0. \tag{25}$$

Здесь введено обозначение для константы

$$Q^2 = \frac{\kappa^4}{9}C^4\sigma^2 + \frac{2\kappa^2}{3}C^2\rho_B = \frac{2}{3}\kappa^2C^2(1+C^2)\rho_B \tag{26}$$

и учтено равенство (14).

Общее решение уравнения (25) имеет вид

$$\psi(t) = \frac{C_1}{a_0^4} + \frac{Q^2}{4}.$$

Подставим это выражение в первое уравнение системы (22) и выразим $\dot{a}_0$:

$$\frac{da_0}{dt} = \pm\sqrt{\frac{C_1}{a_0^2} + \frac{\kappa^2C^2(C^2-1)\rho_B}{6}a_0^2 - KC^2}. \tag{27}$$

Слагаемое с константой C_1 в этом уравнении для эволюции масштабного фактора традиционно называют слагаемым “темного излучения” [2, 8]. Отметим, что константа C_1 жестко связана с постоянной C_F в первом интеграле (13) соотношением

$$C_1 = C_FC^2. \tag{28}$$

Оно следует при переходе в равенстве (13) к пределу $y \to 0+$ после подстановки туда выражений (16), (19) и (27).

Находим решение уравнения (27) — зависимость масштабного фактора a_0 на бране от времени. Оно определяется соотношением между безразмерной константой C (19) и единицей и имеет следующий вид для трех возможных случаев:

$$\begin{aligned}
&C = 1: \qquad a_0(t) = \sqrt{2\sqrt{C_1}t - Kt^2},\\
&C < 1: \qquad a_0^2(t) = \frac{1}{2q^2}\Big[-K + \sqrt{4q^2C_F + K^2}\cdot\sin\big[2qC(t-t_0)\big]\Big],\\
&C > 1: \qquad a_0^2(t) = \frac{1}{2q^2}\big[K + f(t)\big].
\end{aligned} \tag{29}$$

Здесь $q = \kappa\sqrt{|C^2-1|\,\rho_B/6}$,

$$f(t) = \begin{cases}
\sqrt{4q^2C_F - K^2}\cdot\mathrm{sh}\big[2qC(t-t_0)\big], & \text{при} \quad 4q^2C_F > K^2,\\
\exp\big[2qC(t-t_0)\big], & \text{при} \quad 4q^2C_F = K^2,\\
\sqrt{K^2 - 4q^2C_F}\cdot\mathrm{ch}\big[2qC(t-t_0)\big], & \text{при} \quad 4q^2C_F < K^2.
\end{cases}$$

Для решений (29) на бране метрический множитель $b_0(t) = b(t,0)$ определяется из равенства (19): $b_0(t) = C/a_0(t)$. Выражения, полученные из (29) с помощью замены $t \to -t$, также являются решениями уравнения (27), описывающими сжатие.

Рис. 1 иллюстрирует зависимость (29) масштабного фактора на бране $a_0(t)$ от времени при различных значениях параметров C, K, $C_F = C_1/C^2$. При этом константа интегрирования t_0 в решениях уравнения (27) выбрана так, чтобы начальному моменту $t = 0$ соответствовало сингулярное сжатие $a_0 = 0$ с последующим расширением или, при отсутствии сингулярности — минимальное значение a_0.

При $C = 1$ в выражении (29) значение t_0 выбрано по указанному принципу. В этом случае интегральные кривые $a_0 = a_0(t)$ являются кривыми 2-го порядка — окружностями при $K = 1$, параболами при $K = 0$, гиперболами при $K = -1$. Эти кривые похожи на свои аналоги для закрытой, плоской и открытой моделей Фридмана в ОТО, но, в отличие от последних, в решении (29) эволюция $a_0(t)$ определяется не обычной материей, а "темным излучением" с плотностью, пропорциональной константе $C_1 = C_F$.

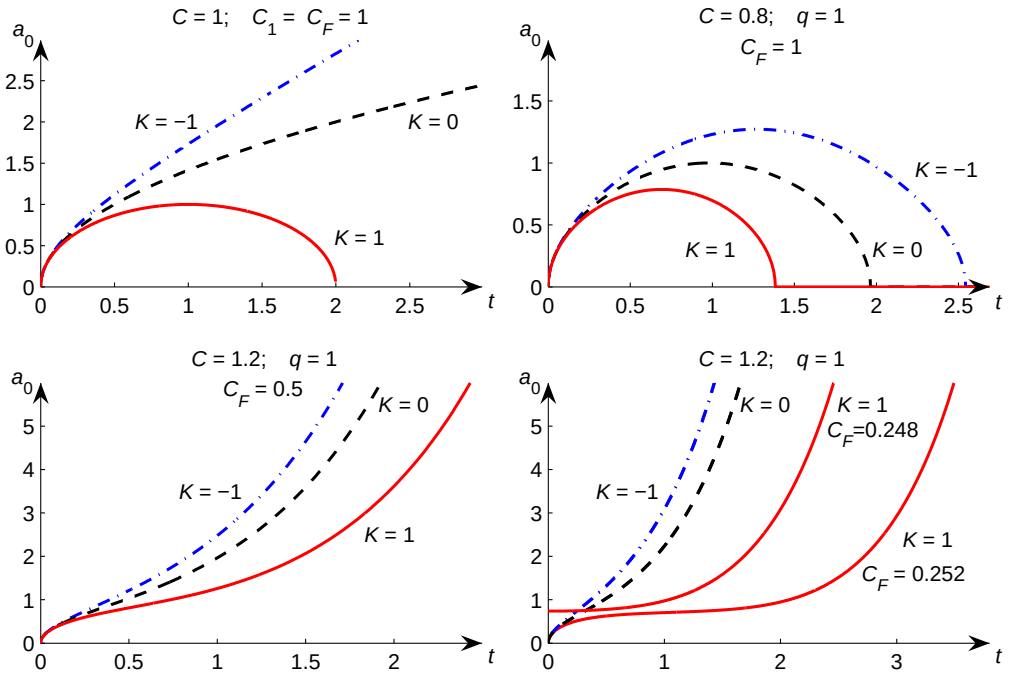

Рис. 1: Зависимость масштабного фактора a_0 на бране от времени t при указанных значениях параметров

При $C < 1$ для всех K наблюдается один тип эволюции масштабного фактора $a_0(t)$ — расширение сменятся сжатием до сингулярности за конечное время. При $C > 1$ для всех K, напротив, расширение неограничено — оно начинается со степенного закона и при больших t переходит на ускоренный экспоненциальный режим $a_0(t) \sim \exp(qCt)$. Правая нижняя часть рис. 1 показывает особенности зависимости $a_0(t)$ вблизи критического значения $4q^2C_F = K^2$. Для случая $C_F = 0.252$ при $K = 1$, $q = 1$ имеет место неравенство $4q^2C_F > K^2$, эволюция начинается с $a_0 = 0$, и "застывание" a_0 тем дольше, чем ближе C_F к критическому значению $C_F = 0.25$.

При $C_F < 0.25$ и тех же $K = 1$, $q = 1$ выполнено неравенство $4q^2C_F < K^2$, начальная сингулярность исчезает (на рис. 1 при $t = 0$ четная функция $a_0(t)$ имеет минимум) и при $t \to -\infty$ эволюция стартует со сжатия.

Заметим, что для открытой модели ($K = -1$) расширение начинается из точки $a_0 = 0$ и при $4q^2C_F < K^2$, и при $4q^2C_F > K^2$. На рис. 1 сливаются две кривые, отвечающие $C_F = 0.252$ и $C_F = 0.248$ при $K = -1$.

Мы нашли закон эволюции масштабного фактора $a(t,0)$ при $y = 0$ (на бране) для различных значения параметров K, C, C_F. Будем искать соответствующую им зависимость $a(t,y)$ и $b(t,y)$ при $y \neq 0$ (вне браны).

4. Решения во внешнем пространстве

Найдем решения системы (9) – (12) во внешнем пространстве (при $y \neq 0$), для которых функции (29) являются пределом при $y \to 0+$. В этом пределе искомые решения должны удовлетворять условиям (16), (17), а также условиям

$$\frac{a''}{a}\Big|_{y=0+} = \frac{\kappa^2C^2(C^2+1)\rho_B}{6} + \frac{C_1}{a_0^4(t)}, \qquad \frac{b''}{b}\Big|_{y=0+} = -\frac{4C_1}{a_0^4(t)}. \tag{30}$$

полученным подстановкой выражений для $\psi(t)$ и (27) в соотношения (21) и (24).

В данной работе нам удалось найти аналитические решения в рамках предположения

$$a(t,y) = a_0(t)\,\alpha(y), \qquad b(t,y) = b_0(t)\,\beta(y). \tag{31}$$

При этом ввиду четности функций $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ достаточно найти их при $y > 0$.

Подставляя выражения (31) в равенства (30), видим, что последние выполняются только в случае

$$C_1 = C_F = 0. \tag{32}$$

Ниже полагаем, что равенство (32) имеет место, то есть “темное излучение” отсутствует [2].

Подставив выражения (31), (22) при условии (32) в систему уравнений (9) – (13) при $y > 0$, получим следующую систему независимых уравнений:

$$\left[\frac{\alpha'(y)}{\alpha(y)}\right]^2 - \frac{\kappa^2C^2\rho_B}{6}\left[C^2 - 1 + \alpha^2(y)\,\beta^2(y)\right] = \frac{KC^2}{a_0^2(t)}\left[\beta^2(y) - 1\right] = -\frac{\alpha'(y)\,\beta'(y)}{\alpha(y)\,\beta(y)},$$
$$\frac{\alpha''(y)}{\alpha(y)} - \frac{\kappa^2C^2\rho_B}{6}\left[C^2 - 1 + 2\alpha^2(y)\,\beta^2(y)\right] = \frac{KC^2}{a_0^2(t)}\left[\beta^2(y) - 1\right] + \frac{\alpha'(y)\,\beta'(y)}{\alpha(y)\,\beta(y)}.$$

Ее решение, удовлетворяющее условиям (16), (17), (30), (32) имеет вид

$$\beta(y) = 1, \qquad \begin{aligned} \alpha(y) &= \left(1 + \kappa\sqrt{\rho_B/6}\,|y|\right)^{-1} && \text{при} \quad C = 1,\\ \alpha(y) &= \left(\cos qCy + \frac{C}{\sqrt{1-C^2}}\sin qC|y|\right)^{-1} && \text{при} \quad C < 1,\\ \alpha(y) &= \left(\operatorname{ch} qCy + \frac{C}{\sqrt{C^2-1}}\operatorname{sh} qC|y|\right)^{-1} && \text{при} \quad C > 1, \end{aligned} \tag{33}$$

Отметим, что характер зависимости (33) масштабного фактора a от y одинаков для всех K (открытой, плоской и закрытой моделей). При этом решения (29) в рамках условия (32) $C_1 = 0$ для всех значений C существуют только при $K = -1$:

$$K = -1: \quad a_0(t) = \begin{cases} q^{-1}\sin qCt, & C < 1, \\ t, & C = 1, \\ q^{-1}\operatorname{sh} qCt, & C > 1; \end{cases} \qquad \begin{matrix} K = 0,\ C > 1: \ a_0(t) = A_0 e^{qCt}; \\ \\ K = 1,\ C > 1: \ a_0(t) = q^{-1}\operatorname{ch} qCt. \end{matrix} \tag{34}$$

При $C_1 = 0$, $C \le 1$, $K = 0$ и $K = 1$ не существует нетривиальных решений $a_0(t)$ уравнения (27) в силу неположительности подкоренного выражения. Напомним, что $q = \kappa\sqrt{|C^2 - 1|\,\rho_B/6}$.

Рис. 2 иллюстрирует зависимость масштабного фактора $a(t, y)$ от времени t (слева) и от координаты y (справа), определяемую соответственно выражениями (34) и (33) при условии (32), фиксированном значении $\kappa^2\rho_B = 6$ и указанных значениях параметров C и K.

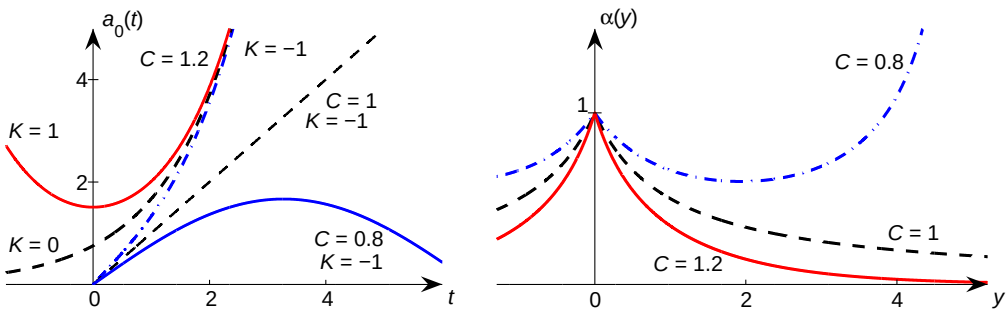

Рис. 2: Зависимость масштабного фактора a от времени t (слева) и от координаты y (справа) при $C_1 = 0$, $\kappa^2\rho_B = 6$ и указанных значениях параметров C и K

Рис. 2 демонстрирует, что масштабный фактор a имеет разрыв производной a'_y при $y = 0$, соответствующий предельному значению (16). Этот разрыв связан с функцией $\delta(y)$ в правых частях уравнений (9) и (10).

5. Заключение

В настоящей работе найдены и исследованы не обнаруженные ранее в работах [2]–[9] решения уравнений эволюции для модели Рэндалл–Сундрума с действием (1), которые являются аналогом космологических решений Фридмана. Рассмотрены три космологические модели со знаком $K = 1$, $K = 0$, $K = -1$ кривизны трехмерной однородной изотропной пространственной части многообразия. Действие (1) и соответствующие уравнения эволюции (3), (4) содержат отрицательную космологическую постоянную $\Lambda_5 = -\rho_B$ и натяжение σ браны, связанные соотношением (6) или (14). Мы, полагая, что плотность обычной видимой материи мала по сравнению с ρ_B, не включаем в уравнения (3), (4), (9)–(12).

В этих предположениях найдены космологические решения системы (9) – (12) на бране (при $y = 0$) для этих трех моделей в виде (29) (рис. 1). При фиксированных значениях κ, ρ_B и времени $t = 0$ старта эволюции решения (29) при каждом K образуют двупараметрическое семейство с параметрами C из равенства (19) и C_F из соотношения (13). Константа C_F связана с "темным излучением" [8].

Характер решений (29) сильно зависит от значения C: при $C = 1$ они напоминают космологические решения Фридмана в ОТО, но при $C \neq 1$ существенно от них отличаются. В частности, при $0 < C < 1$ для всех K и C_F начальное расширение неизбежно сменяется сжатием, и время эволюции конечно. С другой стороны, при $C > 1$ для всех K и C_F эволюция неизбежно выходит на ускоренное экспоненциальное расширение $a_0(t) \sim \exp(qCt)$, что может соответствовать последним оценкам [10] параметра акселерации для нашей Вселенной. При этом возможно отсутствие начальной сингулярности при $\frac{2}{3}\kappa^2(C^2 - 1)\,\rho_B C_F \leq K$.

Решение уравнений (9) – (12) во внешнем пространстве (при $y \neq 0$) было найдено в виде (31) и (33) для случая $C_F = 0$. Рис. 2 показывает, что характер зависимости масштабного фактора a от координаты y (5-го измерения) также существенно зависит от значения константы C (19).

Список литературы

[1] Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн М.: Мир, 1990. Т. I.

[2] Brax P., van de Bruck C. Cosmology and brane worlds: a review // Class. Quant. Grav. 2003. V. 20. P. R201–R232.

[3] Maartens R., Koyama K. Brane-World Gravity // Phys. Rev. Lett., 2010, hep-th/1004.3962

[4] Randall L., Sundrum R. A large mass hierarchy from a small extra dimension // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 3370–3373, hep-ph/9905221.

[5] Randall L., Sundrum R. An alternative to compactification // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 4690–4693.

[6] Chamblin A., Hawking S.W., Reall H.S. Brane-world black holes // Phys. Rev. D. 2000. V. 61. P. 065007, hep-th/9909205.

[7] Binétruy P., Deffayet C., Ellwanger U., Langlois D. Brane cosmological evolution in a bulk with cosmological constant // Phys. Lett. B. 2000. V. 477. P. 285–291, hep-th/9910219.

[8] Mukohyama S. Brane-world solutions, standard cosmology, and dark radiation // Phys. Lett. B. 1999. V. 473. P. 241–246.

[9] Kiritsis E., Kofinas G., Tetradis N., et. al. Cosmological evolution with brane-bulk energy exchange // J. High Energy Phys. 2003. V. 0302. P. 035, hep-th/0207060.

[10] Guzzo L., Pierleoni M., Meneux B., et al. A test of the nature of cosmic acceleration using galaxy redshift distortions // Nature. 2008. V. 451. P. 541-–544, arXiv:0802.1944 [astro-ph].