МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

УДК 519.95

МОДЕЛЬ ПОРТФЕЛЯ МИНИМАЛЬНОГО РИСКА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ КОМБИНИРОВАННОГО ТИПА[1]

Шефова Н.А., Язенин А.В.
Кафедра информационных технологий

Поступила в редакцию 10.01.2011, после переработки 25.03.2011.

В работе исследуется модель портфеля минимального риска в зависимости от уровня вероятности, с которым выполняется возможностно-вероятностное ограничение, моделирующее приемлемый уровень доходности портфеля в нечеткой случайной среде.

The paper investigates a model of minimal risk portfolio depending on the level of probability, with which a possibilistic-probabilistic limitation, modeling acceptable level of portfolio profitability in a fuzzy random environment, is performed.

Ключевые слова: портфель минимального риска, нечеткая случайная величина, эквивалентный детерминированный аналог, возможностно-вероятностная среда.
Keywords: minimal risk portfolio, fuzzy random variable, equivalent determinate analog, possibilistic-probabilistic environment.

1. Введение

Данная работа продолжает исследование моделей инвестиционного портфеля в нечёткой случайной среде [1-7]. В [8, 9] была разработана модель портфеля минимального риска, в которой ограничение на приемлемый уровень доходности рассматривается в возможностно-вероятностном контексте. Как было показано в [8], при уровне вероятности равном 0,5 влияние моментов второго порядка на модель ограничений исключается. В данной работе мы обобщаем полученные нами ранее результаты на уровень вероятности больший 0,5, с которым выполняется соответствующее ограничение по возможности/вероятности [11, 12].

2. Базовые понятия и обозначения

Следуя [13, 15-20], введем необходимые понятия. Пусть Γ есть множество элементов, обозначаемых далее через $\gamma \in \Gamma$, $P(\Gamma)$ - множество всех подмножеств Γ, E^1 – числовая прямая.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N 10-01-00052а.

Определение 1. *Мерой возможности называется функция множества*

$$\pi : P(\Gamma) \to E^1,$$

обладающая свойствами:

$$1.\ \pi\{\varnothing\} = 0,\ \ \pi\{\Gamma\} = 1; \quad 2.\ \pi\Big\{\bigcup_{i\in I} A_i\Big\} = \sup_{i\in I} \pi\{A_i\},$$

для любого индексного множества I и множеств $A_i \in P(\Gamma)$.

Триплет $(\Gamma, P(\Gamma), \pi)$ называется возможностным пространством.

Определение 2. *Возможностной (нечеткой) величиной называется отображение $Z : \Gamma \to E^1$. Распределением возможностных значений величины Z называется функция $\mu_Z(\cdot) : E^1 \to [0,1]$, определяемая по правилу:*

$$\mu_Z(z) = \pi\{\gamma \in \Gamma : Z(\gamma) = z\}, \quad \forall z \in E^1,$$

$\mu_Z(z)$ есть возможность того, что переменная Z может принять значение z.

Мерой, двойственной возможностной мере, является мера необходимости, определяемая следующим образом:

$$\nu(A) = 1 - \pi(A^c), \quad \forall A \in P(\Gamma),$$

A^c- есть дополнение множества A.

Определение 3. *Нечёткая величина называется триангулярной (обозначение класса $Tr(m,\, \underline{d},\, \overline{d})$), если её функция распределения имеет следующий вид:*

$$\mu_X(t) = \max\left\{0,\ \min\left\{1,\ 1 + \frac{t-m}{\underline{d}},\ 1 - \frac{t-m}{\overline{d}}\right\}\right\}, \quad \forall t \in E^1,$$

где $\underline{d}$ и $\overline{d}$ - левый и правый коэффициенты нечёткости, m - модальное значение.

Дадим определение нечеткой случайной величины.

Пусть (Ω, B, P) есть вероятностное пространство.

Определение 4. *Нечеткая случайная величина X есть вещественная функция $X(\cdot,\cdot) : \Omega \times \Gamma \to E^1$, такая, что при любом фиксированном $\gamma \in \Gamma$, величина $X_\gamma = X(\omega, \gamma)$ является случайной величиной, определенной на (Ω, B, P).*

Определение 5. *r – уровневым множеством нечеткой случайной величины называется множество $X_\omega(r) = \{t \in E^1 : \mu_{X_\omega}(t) \geq r\},\ 0 < r \leq 1$.*

Определим моменты второго порядка в соответствии с [14]. Пусть X и Y– нечеткие случайные величины.

Определение 6. *Ковариация нечетких случайных величин X и Y определяется как*

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{2}\int_0^1 (Cov(X_\omega^-(r), Y_\omega^-(r)) + Cov(X_\omega^+(r), Y_\omega^+(r)))dr.$$

Здесь $X_\omega^-(r)$, $Y_\omega^-(r)$ и $X_\omega^+(r)$, $Y_\omega^+(r)$ есть левая и правая границы r - уровневых множеств соответствующих нечетких величин.

Определяемая таким образом ковариация, как нетрудно видеть, является четкой величиной. Альтернативный подход к определению моментов второго порядка нечетких случайных величин предлагается в [21].

Определение 7. *Дисперсия нечеткой случайной величины X определяется как*

$$DX = Cov(X, X).$$

Определение 8. *Математическое ожидание нечеткой случайной величины есть нечеткая величина, такая что* $[EX(r)] = E[X(r)] = [EX^{-}(r), EX^{+}(r)]$, $0 < r \leq 1$.

3. Модель портфеля минимального риска в нечёткой случайной среде при ограничении по возможности (необходимости) и вероятности на уровень доходности

Наряду с моделью портфеля минимального риска в нечёткой случайной среде при ограничении по возможности (необходимости) на уровень ожидаемой доходности

$$V_p(w) \to \min \tag{1}$$

$$\begin{cases} \tau\left\{\overline{R}_p(w,\ \gamma) \geq m_d\right\} \geq \alpha_0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ w_1,\ ...,\ w_n \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

в [8, 9] мы ввели модель портфеля минимального риска в условиях нечётких случайных данных при ограничении по возможности (необходимости) / вероятности на уровень доходности, приемлемый для инвестора:

$$V_p(w) \to \min \tag{3}$$

$$\begin{cases} \tau\left\{P\left\{R_p(w,\ \omega,\ \gamma) \geq m_d\right\} \geq p_0\right\} \geq \alpha_0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ w_1,\ ...,\ w_n \geq 0, \end{cases} \tag{4}$$

В моделях (1), (2) и (3), (4) $w = (w_1,\ ...,\ w_n)$ есть вектор долей капитала, $V_p(w)$ - риск портфеля, $R_p(w,\ \omega,\ \gamma)$ - доходность портфеля при наличии случайных и нечетких факторов, $\overline{R}_p(w,\ \gamma)$ - ожидаемая доходность портфеля, $\tau \in \{\pi,\ \nu\}$; p_0 и α_0 - заданные уровни вероятности и возможности, $p_0,\ \alpha_0 \in (0,\ 1]$, m_d - уровень доходности, приемлемый для инвестора. В общем случае параметр m_d может быть нечёткой случайной величиной.

При наличии случайных и нечётких факторов доходность портфеля $R_p(w,\ \omega,\ \gamma)$ может быть представлена следующим образом:

$$R_p(w,\ \omega,\ \gamma) = \sum_{i=1}^{n} R_i(\omega,\ \gamma) \cdot w_i,$$

где $R_i(\omega,\ \gamma)$ - нечёткая случайная величина, моделирующая доходность i-го финансового актива.

Ожидаемая доходность портфеля описывается функцией: $\overline{R}_p(\,w,\gamma) = E\left\{R_p(w,\ \omega,\ \gamma)\right\} = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{R}_i(\gamma)\cdot w_i; \quad \overline{R}_i(\gamma) = E\left\{R_i(\omega,\gamma)\right\}.$

Риск портфеля представляет собой функцию $V_p(w) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} cov(R_i,R_j)w_iw_j$, в которой $cov(R_i,R_j)$ вычисляется в соответствии с определением 6.

В предположении, что:

1. для каждого фиксированного ω возможностные переменные $R_i(\omega,\gamma)$ характеризуются квазивогнутыми полунепрерывными сверху функциями распределения;

2. нечёткие переменные $R_i(\omega,\ \gamma)$ принимают значения в $E^1_+ = \left\{t \in E^1 : t \geq 0\right\}$ и характеризуются ограниченными носителями;

в [7] построен эквивалентный чёткий аналог задачи (1), (2):

$$V_p(w) \to \min, \tag{5}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{R}_i^{\left\{\substack{+\\-}\right\}}(\alpha_0)\cdot w_i \geq m_d, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ w_1,\ ...,\ w_n \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

При $\tau = \pi$ систему ограничений (6) мы рассматриваем для $\overline{R}_i^+$, а при $\tau = \nu$ - для $\overline{R}_i^-$. Здесь $\overline{R}_i^+$ и $\overline{R}_i^-$ - правая и левая границы ожидаемой доходности i-го финансового актива при уровне возможности $\alpha_0 = 0,5$.

Перейдем теперь к исследованию модели (3), (4).

Пусть в модели (3), (4) нечёткие случайные переменные $R_i(\omega,\gamma)$ имеют сдвиг-масштабное представление:

$$R_i(\omega,\gamma) = a_i(\omega) + \sigma_i(\omega)\cdot X_i(\gamma), \quad a_i(\omega) \in N_p(a_i^0, g_{a_i}), \quad \sigma_i(\omega) \in N_p(\sigma_i^0, g_{\sigma_i}),$$

где N_p - есть класс нормальных вероятностных распределений, $X_i(\gamma)$ - нечёткая переменная, характеризующаяся унимодальной, квазивогнутой, полунепрерывной сверху функцией распределения с ограниченным носителем.

$C^{\left\{\substack{+\\-}\right\}} = \left[C_{ij}^{\left\{\substack{+\\-}\right\}}\right]$ - ковариационная матрица, коэффициенты которой определяются по формуле:

$$\begin{aligned} C_{ij}^{\left\{\substack{+\\-}\right\}} &= cov(a_i,a_j) + cov(a_i,\sigma_j)\cdot u_j^{\left\{\substack{+\\-}\right\}}(\alpha_0) + cov(\sigma_i,a_j)\cdot u_i^{\left\{\substack{+\\-}\right\}}(\alpha_0) + \\ &+ cov(\sigma_i,\sigma_j)\cdot u_i^{\left\{\substack{+\\-}\right\}}(\alpha_0)\cdot u_j^{\left\{\substack{+\\-}\right\}}(\alpha_0), \end{aligned} \tag{7}$$

где $u_i^+(\alpha_0)$ и $u_i^-(\alpha_0)$ - правая и левая границы α_0 - уровневого множества нечёткой величины $X_i(\gamma)$.

В [8] нами была доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $cov(a_i,\sigma_j) \geq 0, \quad cov(\sigma_i,\sigma_j) \geq 0, \quad i,j = \overline{1,n}$. Тогда эквивалентный детерминированный аналог модели (3), (4) имеет следующий вид:*

$$V_p(w) \to \min, \tag{8}$$

$$\begin{cases} \overline{R}_p^{\{^+_-\}}(w) + \beta_0 \cdot \sqrt{D_p^{\{^+_-\}}(w)} \geq m_d, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ w_1, \ldots, w_n \geq 0, \end{cases} \tag{9}$$

где β_0 есть решение уравнения $\Phi_0(t) = 1 - p_0$, $\Phi_0(t)$- функция стандартного нормального распределения.

При $\tau = \pi$ систему ограничений (9) рассматриваем для $\overline{R}_i^+$ и D_p^+, при $\tau = \nu$ - для $\overline{R}_p^-$ и D_p^-.

Здесь $\overline{R}_p^{\{^+_-\}}$ и $D_p^{\{^+_-\}}$ - α_0-уровневые границы ожидаемой доходности и α_0-уровневые границы дисперсии портфеля, определяемые по формулам:

$$\overline{R}_p^{\{^+_-\}}(w) = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(a_i^0 + \sigma_i^0 \cdot u_i^{\{^+_-\}}(\alpha_0) \right),$$

$$D_p^{\{^+_-\}}(w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}^{\{^+_-\}} \cdot w_i \cdot w_j .$$

При $p_0 \geq 0,5$ модель (8), (9) является задачей выпуклого программирования, так как в этом случае $\beta_0 \leq 0$.

Замечание: при $p_0 = 0.5$ и α_0=0.5 эквивалентный детерминированный аналог (8), (9) принимает следующий вид:

$$V_p(w) \to \min, \tag{10}$$

$$\begin{cases} \overline{R}_p^{\{^+_-\}}(w) \geq m_d, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ w_1, \ldots, w_n \geq 0. \end{cases} \tag{11}$$

Таким образом, при $p_0 = 0.5$ эквивалентные детерминированные аналоги моделей (1), (2) и (3), (4) совпадают.

Для исследования поведения модели (3), (4) при уровне вероятности $p_0 \geq 0,5$ на реальных данных рассмотрим процедуру интеллектуального анализа данных, позволяющую в конечном итоге определить ковариационную матрицу и ожидаемые доходности. В дальнейшем это позволит нам исследовать поведение множества инвестиционных возможностей в зависимости от уровня вероятности.

4. Интеллектуальный анализ данных для вероятностно-возможностной модели портфеля минимального риска

Продемонстрируем возможности разработанного подхода к оптимизации портфеля на реальных данных. Рассмотрим портфель, состоящий из трёх видов ценных бумаг (Газпрома, ЛУКОЙЛа и Норильского Никеля), информация о которых взята из электронных архивов Российского информационного агентства «РосБизнесКонсалтинг». Как правило, информация о торгуемых ценных бумагах представляется в виде таблицы, где указывается дата торгов, средневзвешенная цена, цена покупки при открытии, цена продажи при закрытии, минимальная цена сделки максимальная цена сделки. Фрагмент одной из таблиц представлен ниже (Таблица 1).

Таблица 1: Элементы архива итогов торгов ценной бумаги компании "Газпром"за период с 15.12.2008 по 14.12.2009 ($)

Дата торгов	Средневзвешенная цена	Покупка (открытие)	Продажа (закрытие)	Минимальная цена сделки	Максимальная цена сделки
15.12.2008	117,30	116,30	116,80	115,80	118,86
16.12.2008	116,15	115,50	115,50	114,70	117,49
17.12.2008	115,40	117,77	113,15	112,12	117,92
...	...	...	...	...	...
10.12.2009	166,33	165,88	166,09	164,16	167,77
11.12.2009	166,80	167,10	166,11	165,66	167,80
14.12.2009	166,63	167,50	167,09	165,83	167,75

Как показано в [7], наиболее точно колебание цены финансового актива в течение одного дня торгов можно отследить с помощью таких характеристик, как минимальная цена, средневзвешенная цена и максимальная цена сделки. Поэтому результатом первичной обработки должен быть временной ряд с характеристиками доходности финансового актива, представленными в таблице 2.

Таблица 2: Структура элементов временного ряда, необходимых для оценки параметров распределения ожидаемой доходности финансового актива

Дата торгов	Минимальная цена сделки	Средневзвешенная цена	Максимальная цена сделки
$date_i$	$p_i^{\min}$	p_i^{avr}	$p_i^{\max}$

Рассмотрим совокупность имеющихся цен и на основании данной информации построим распределение возможных доходностей финансового актива. Нетрудно видеть, что наибольший доход за временной период $(date_{i-1}, date_i)$ получит инвестор, купивший финансовый актив в $date_{i-1}$ по цене $p_{i-1}^{\min}$ и продавший его в $date_i$ по цене $p_i^{\max}$. Аналогичным образом вычисляем минимальную и среднюю доходность. Полученные формулы приведены в таблице 3.

Представленные временные ряды позволяют оценить параметры распределения, характеризующие ожидаемую доходность инвестиционного портфеля $\overline{R}(\gamma) = E\{R(\omega, \gamma)\}$, где $R(\omega, \gamma)$ - нечёткая случайная переменная, представляющая собой доходность ценной бумаги и имеющая сдвиг-масштабное представление

Таблица 3: Структура элементов временного ряда, характеризующая параметры распределения доходности финансового актива

Дата торгов	Минимальная доходность ($d_{\min}$), %	Средняя доходность (d_{avr}), %	Максимальная доходность ($d_{\max}$), %
$date_i$	$\frac{p_i^{\min}-p_{i-1}^{\max}}{p_{i-1}^{\max}} \times 100$	$\frac{p_i^{avr}-p_{i-1}^{avr}}{p_{i-1}^{avr}} \times 100$	$\frac{p_i^{\max}-p_{i-1}^{\min}}{p_{i-1}^{\min}} \times 100$

$R(\omega,\gamma) = a(\omega)+\sigma(\omega)\cdot X(\gamma)$. Фрагмент временного ряда, необходимого для оценки параметров этих распределений, представлен в таблице 4.

Таблица 4: Распределение доходностей ценной бумаги компании "Газпром"за период с 15.12.2008 по 14.12.2009

Дата торгов	Минимальная доходность ($d_{\min}$), %	Средняя доходность (d_{avr}), %	Максимальная доходность ($d_{\max}$), %
16.12.2008	-3,4999	-0,9804	1,4594
17.12.2008	-4,5706	-0,6457	2,8073
18.12.2008	-10,4732	-5,6759	1,4716
...	...	...	...
10.12.2009	-2,5757	-0,2399	1,6788
11.12.2009	-1,2577	0,2826	2,2173
14.12.2009	-1,1740	-0,1019	1,2616

В отличие от [7] в данной работе мы разделяем вероятностную и нечёткую составляющие в математической модели финансового актива. Значение параметра $a(\omega)$ представляет собой среднее значение доходности финансового актива на заданную дату $a(\omega) = d_{avr}$. Параметр $\sigma(\omega)$ есть разброс между максимальным и минимальным значениями доходности финансового актива $\sigma(\omega) = d_{\max} - d_{\min}$. Значения параметров сдвиг-масштабного распределения $a(\omega)$ и $\sigma(\omega)$ приведены в таблице 5.

Согласно формулам, известным из теории вероятностей и математической статистики, для $a(\omega)$ и $\sigma(\omega)$ рассчитываются значения моментов первого и второго порядка. Математические ожидания параметров будут соответственно $a^0 = 0,1802$ и $\sigma^0 = 8,8209$. Информация о значениях дисперсий и ковариаций параметров случайных величин $a(\omega)$ и $\sigma(\omega)$ для рассматриваемых ценных бумаг представлена в таблице 6.

Для моделирования нечеткой величины $X(\gamma)$ воспользуемся триангулярными возможностными распределениями. Для этого пересчитаем значения доходностей с учётом полученных значений $a(\omega)$, $\sigma_{\max}(\omega)$ и $\sigma_{\min}(\omega)$. Фрагмент временного ряда, необходимого для оценки параметров распределения нечёткой составляющей $X(\gamma)$, представлен в таблице 7.

Таблица 5: Параметры ценной бумаги компании "Газпром характеризующие сдвиг-масштабное распределение за период с 15.12.2008 по 14.12.2009

Дата торгов	$a(\omega) = d_{avr}$, %	$\sigma(\omega) = d_{\max} - d_{\min}$, %
16.12.2008	-0,9804	4,9593
17.12.2008	-0,6457	7,3779
18.12.2008	-5,6759	11,9448
...	...	...
10.12.2009	-0,2399	4,2545
11.12.2009	0,2826	3,4750
14.12.2009	-0,1019	2,4356

Таблица 6: Таблица значений моментов второго порядка случайных параметров

	a_1	a_2	a_3	σ_1	σ_2	σ_3
a_1	7,7260	6,2633	7,6702	0,0990	0,5439	-0,3251
a_2	6,2633	13,6959	6,6097	0,5046	1,9305	0,4275
a_3	7,6702	6,6097	13,9132	-0,9629	-0,5486	0,8445
σ_1	0,0990	0,5046	-0,9629	8,7071	7,5095	10,5111
σ_2	0,5439	1,9305	-0,5486	7,5095	12,9228	13,8007
σ_3	-0,3251	0,4275	0,8445	10,5111	13,8007	28,8681

Таблица 7: Распределение доходностей нечёткой случайной составляющей ценной бумаги компании "Газпром"за период с 15.12.2008 по 14.12.2009

Дата торгов	Минимальная доходность ($d'_{\min}$), %	Средняя доходность (d'_{avr}), %	Максимальная доходность ($d'_{\max}$), %
16.12.2008	-0,5080	0,0000	0,4920
17.12.2008	-0,5320	0,0000	0,4680
18.12.2008	-0,4016	0,0000	0,5984
...	...	...	...
10.12.2009	-0,5490	0,0000	0,4510
11.12.2009	-0,4432	0,0000	0,5568
14.12.2009	-0,4402	0,0000	0,5598

На основании полученных данных построим распределение доходности вида $Tr(\xi+\eta,\ \eta,\ \zeta)$.

Таблица 8: Распределение параметров нечёткой случайной составляющей доходности ценной бумаги компании "Газпром"за период с 15.12.2008 по 14.12.2009

Дата торгов	ξ	η	ζ
16.12.2008	-0,5080	0,5080	0,4920
17.12.2008	-0,5320	0,5320	0,4680
18.12.2008	-0,4016	0,4016	0,5984
...	...	...	...
10.12.2009	-0,5490	0,5490	0,4510
11.12.2009	-0,4432	0,4432	0,5568
14.12.2009	-0,4402	0,4402	0,5598

Для полученных параметров согласно формулам, известным из теории вероятностей и математической статистики, рассчитываются значения математических ожиданий.

Далее определяем значения правой и левой границ α_0 - уровневого множества нечёткой величины $X(\gamma)$ по формулам: $u^+(\alpha) = (\xi^0+\eta^0)+\zeta^0\cdot(1-\alpha)$ и $u^-(\alpha) = \xi^0+(1-\alpha)\eta^0$. Для рассматриваемых финансовых активов при уровне возможности $\alpha_0 = 0,5$ получим следующие результаты:

$$
\begin{array}{ll}
u_1^+ = 0,2551; & u_1^- = -0,2449;\\
u_2^+ = 0,2551; & u_2^- = -0,2449;\\
u_3^+ = 0,2571; & u_3^- = -0,2429.
\end{array}
$$

Используя данные таблицы 6 и значения правой и левой границ α_0 - уровневого множества нечёткой составляющей доходности ценной бумаги, рассчитаем по формуле (7) ковариационные матрицы $C^{\{{+\atop -}\}}$ для доходностей ценных бумаг:

$$
C^+ = \begin{pmatrix} 8,3431 & 7,0194 & 8,0304\\ 7,0194 & 15,5215 & 7,4847\\ 8,0304 & 7,4847 & 16,2558 \end{pmatrix}; \qquad C^- = \begin{pmatrix} 8,1998 & 6,4570 & 8,6102\\ 6,4570 & 13,5255 & 7,4612\\ 8,6102 & 7,4612 & 15,2060 \end{pmatrix}.
$$

Коэффициенты ковариационной матрицы для расчёта риска портфеля определяются по формуле:

$$
cov\,(R_i,R_j) = cov(a_i,a_j)+cov(a_i,\sigma_j)\cdot(\xi_j+\tfrac{3}{4}\eta_j+\tfrac{1}{4}\zeta_j)+cov(a_j,\sigma_i)\cdot(\xi_i+\tfrac{3}{4}\eta_i+\tfrac{1}{4}\zeta_i)+
$$

$$
+cov(\sigma_i,\sigma_j)\cdot(\xi_i\cdot\xi_j+\tfrac{3}{4}\xi_i\cdot\eta_j+\tfrac{3}{4}\xi_j\cdot\eta_i+\tfrac{2}{3}\eta_i\cdot\eta_j+\tfrac{1}{4}\xi_i\cdot\zeta_j+\tfrac{1}{4}\xi_j\cdot\zeta_i+\tfrac{1}{4}\eta_i\cdot\zeta_j+\tfrac{1}{4}\eta_j\cdot\zeta_i+\tfrac{1}{6}\zeta_i\cdot\zeta_j).
$$

На основании данных таблиц 6 и 8 получаем ковариационную матрицу для расчёта риска портфеля:

$$
C = \begin{pmatrix} 8,4529 & 6,8947 & 8,5394\\ 6,8947 & 14,7929 & 7,7607\\ 8,5394 & 7,7607 & 16,3328 \end{pmatrix}.
$$

5. Поведение множества инвестиционных возможностей в зависимости от уровня вероятности

Пусть в модели (3), (4) $\tau = \pi$. Для рассматриваемого числового примера при уровне возможности $\alpha_0 = 0,5$ получаем следующий эквивалентный детерминированный аналог:

$$8.4529 \cdot w_1^2 + 14.7929 \cdot w_2^2 + 16.3328 \cdot w_3^2 + 13.7894 \cdot w_1 \cdot w_2 + 17.0788 \cdot w_1 \cdot w_3 + \\ +15.5214 \cdot w_2 \cdot w_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2,4303 \cdot w_1 + 2,6852 \cdot w_2 + 3,3823 \cdot w_3 + \beta_0 \cdot (8.3431 \cdot w_1^2 + 15.5215 \cdot w_2^2 + \\ +16.2558 \cdot w_3^2 + 14.0388 \cdot w_1 \cdot w_2 + 16.0607 \cdot w_1 \cdot w_3 + 14.9692 \cdot w_2 \cdot w_3)^{\frac{1}{2}} \geq m_d, \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1, \\ w_1,\ w_1, w_3 \geq 0. \end{cases}$$

Соответствующая необходимостная модель для (3), (4) имеет следующий вид:

$$8.4529 \cdot w_1^2 + 14.7929 \cdot w_2^2 + 16.3328 \cdot w_3^2 + 13.7894 \cdot w_1 \cdot w_2 + 17.0788 \cdot w_1 \cdot w_3 + \\ +15.5214 \cdot w_2 \cdot w_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} -1,9801 \cdot w_1 - 2,0827 \cdot w_2 - 2,4879 \cdot w_3 + \beta_0 \cdot (8.1998 \cdot w_1^2 + 13.5255 \cdot w_2^2 + \\ +15.2060 \cdot w_3^2 + 12.9140 \cdot w_1 \cdot w_2 + 17.2205 \cdot w_1 \cdot w_3 + 14.9225 \cdot w_2 \cdot w_3)^{\frac{1}{2}} \geq m_d, \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1, \\ w_1,\ w_1, w_3 \geq 0. \end{cases}$$

Квазиэффективные (т.е. понимаемые как эффективные с некоторой степенью вероятности/возможности) инвестиционные возможности в контексте возможность (необходимость) / вероятность при различных уровнях вероятности ($p_0 \geq 0,5$) для рассматриваемого модельного примера на оценочной плоскости (m_d, σ), где $\sigma = \sqrt{V_p(w)}$, представлены на рисунках 1-3.

Обозначим через $X_\tau^{0,5}(p_0)$ множество эффективных решений задачи (3), (4) при $\tau = \pi$ для уровня возможности $\alpha_0 = 0,5$.

При сделанных ранее предположениях и обозначениях имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $p_0^{(1)} \leq p_0^{(2)}$, тогда $X_\tau^{0,5}(p_0^{(2)}) \subseteq X_\tau^{0,5}(p_0^{(1)})$. Кроме того, при $p_0 \to 1$ множество $X_\tau^{0,5}(p_0)$ вырождается в одну точку.*

Доказательство. Пусть $\overline{w} \in X_\tau^{0,5}(p_0^{(2)})$. Покажем, что $\overline{w} \in X_\tau^{0,5}(p_0^{(1)})$.

Рассмотрим эквивалентный детерминированный аналог (8), (9) задачи (3), (4). $D_p(\overline{w})$ и $R_p(\overline{w})$ не зависят от p_0.

При $p_0^{(1)} \leq p_0^{(2)}$ имеем $\beta_0^{(1)} \geq \beta_0^{(2)}$, а значит справедливо неравенство:

$$m_d \leq \overline{R}_p(\overline{w}) + \beta_0^{(2)} \cdot \sqrt{D_p(\overline{w})} \leq \overline{R}_p(\overline{w}) + \beta_0^{(1)} \cdot \sqrt{D_p(\overline{w})}.$$

Таким образом, если $\overline{w}$ является решением (8), (9) при уровне вероятности $p_0^{(2)}$, то $\overline{w}$ является решением (8), (9) при уровне вероятности $p_0^{(1)}$. Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы рассмотрим множество значений функции $\overline{R}_p(w) + \beta_0 \cdot \sqrt{D_p(w)}$.

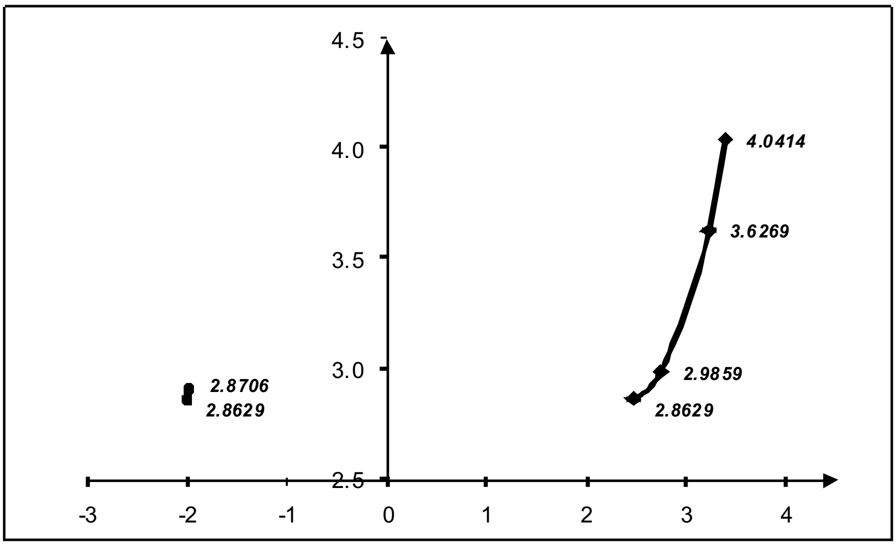

Рис. 1: Квазиэффективные инвестиционные возможности при $p_0 = 0,5$

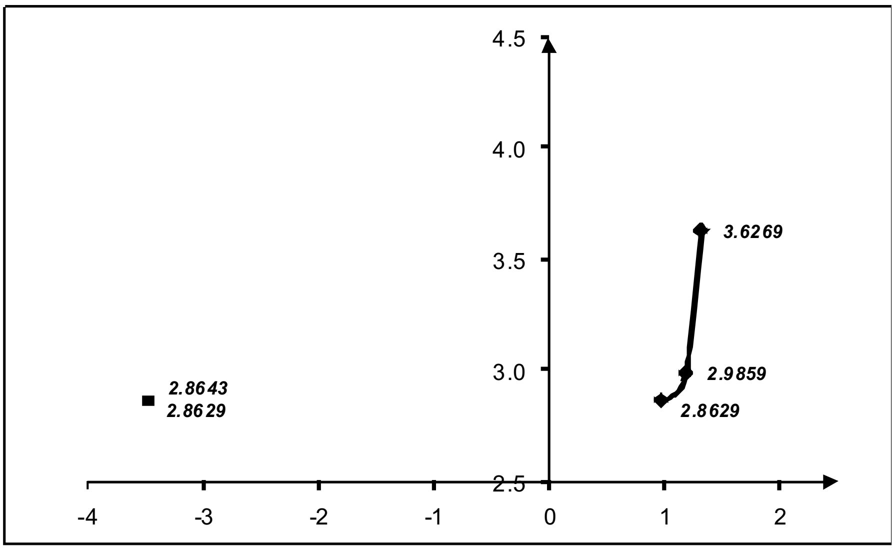

Рис. 2: Квазиэффективные инвестиционные возможности при $p_0 = 0,7$

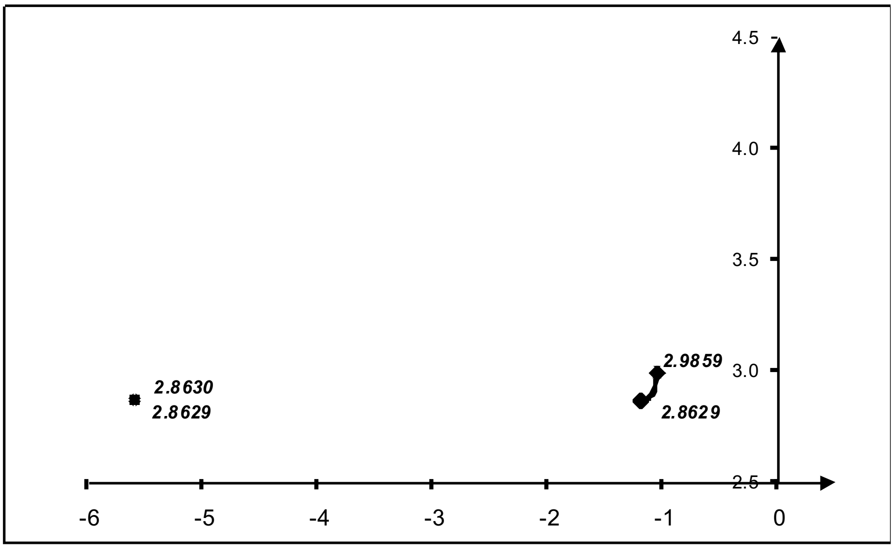

Рис. 3: Квазиэффективные инвестиционные возможности при $p_0 = 0,9$

Так как множество допустимых портфелей в модели Марковица ограничено и замкнуто, а функция $\overline{R}_p(w) + \beta_0 \cdot \sqrt{D_p(w)}$ является непрерывной, то существует портфель $w^{\max}$ такой, что $\max\limits_w \left(\overline{R}_p(w) + \beta_0 \cdot \sqrt{D_p(w)}\right) = \overline{R}_p(w^{\max}) + \beta_0 \cdot \sqrt{D_p(w^{\max})}$. Также существует портфель $w^{\min}$ такой, что $\min\limits_w \left(\overline{R}_p(w) + \beta_0 \cdot \sqrt{D_p(w)}\right) = \overline{R}_p(w^{\min}) + \beta_0 \cdot \sqrt{D_p(w^{\min})}$.

Так как множество портфелей ограничено, то ограниченными являются множества значений функций$\overline{R}_p(w)$ и $D_p(w)$. Поэтому, мы можем ввести $\overline{R}_p(w^{\max}) = \overline{R}_p^{\max}$, $\overline{R}_p(w^{\min}) = \overline{R}_p^{\min}$, $D_p(w^{\max}) = D_p^{\max}$ и $D_p(w^{\min}) = D_p^{\min}$. Ясно, что $\overline{R}_p^{\max} \geq \overline{R}_p^{\min}$, $D_p^{\max} \geq D_p^{\min}$.

Очевидным является следующее неравенство:

$$\max_w \left(\overline{R}_p(w) + \beta_0 \cdot \sqrt{D_p(w)}\right) \geq \min_w \left(\overline{R}_p(w) + \beta_0 \cdot \sqrt{D_p(w)}\right);$$

Данное неравенство можно преобразовать к следующему виду:

$$\beta_0 \cdot \left(\sqrt{D_p^{\max}} - \sqrt{D_p^{\min}}\right) \geq \overline{R}_p^{\min} - \overline{R}_p^{\max}.$$

При $p_0 > 0,5$ имеем $\beta_0 < 0$, а значит

$$\sqrt{D_p^{\max}} - \sqrt{D_p^{\min}} \leq \frac{\overline{R}_p^{\min} - \overline{R}_p^{\max}}{\beta_0}.$$

Поскольку $\beta_0 = \Phi_0^{-1}(1 - p_0)$, то

$$\lim_{p_0 \to 1} \frac{\overline{R}_p^{\min} - \overline{R}_p^{\max}}{\Phi_0^{-1}(1-p_0)} = \lim_{\beta_0 \to -\infty} \frac{\overline{R}_p^{\min} - \overline{R}_p^{\max}}{\beta_0} = 0.$$

Таким образом, $\sqrt{D_p^{\max}} - \sqrt{D_p^{\min}} \leq \frac{\overline{R}_p^{\min} - \overline{R}_p^{\max}}{\beta_0} \xrightarrow[\beta_0 \to -\infty]{} 0$. Отсюда следует, что $D_p^{\max} \xrightarrow[\beta_0 \to -\infty]{} D_p^{\min}$ и соответственно $\overline{R}_p^{\max} \xrightarrow[\beta_0 \to -\infty]{} \overline{R}_p^{\min}$, а $\max\limits_w \left(\overline{R}_p(w) + \beta_0 \cdot \sqrt{D_p(w)}\right) \xrightarrow[\beta_0 \to -\infty]{} \min\limits_w \left(\overline{R}_p(w) + \beta_0 \cdot \sqrt{D_p(w)}\right)$. Отсюда видим, что множество значений функции $\overline{R}_p(w) + \beta_0 \cdot \sqrt{D_p(w)}$ при $\beta_0 \to -\infty$ стремится к одной точке, а значит и множество $X_\tau^{0,5}(p_0)$ при $p_0 \to 1$ вырождается в одну точку. Теорема доказана. □

Заключение

В статье исследована модель портфеля минимального риска в нечеткой случайной среде [8] в зависимости от уровня вероятности, с которой выполняется ограничение на уровень доходности портфеля. При значении вероятности большем 0,5 на возможностно-вероятностное ограничение, определяющее инвестиционные возможности лица принимающего решение, существенное влияние оказывает α-уровневая дисперсия. Для ситуации, когда случайная составляющая портфеля моделируется нормальным распределением, показано, что область допустимых портфелей монотонно сужается. Следствием этого является то, что множество парето-оптимальных оценок портфеля при уровне вероятности, стремящемся к единице, стягивается в точку. Это позволяет сузить множество Парето, что является важным моментом при принятии решений в условиях многокритериальности.

В плане дальнейших исследований представляется важной разработка моделей портфельного анализа для случая слабой t-нормы [22], описывающей взаимодействие нечётких факторов.

Список литературы

[1] Язенин И.А. Портфели минимального риска и максимальной эффективности в условиях нечетких случайных данных. Сложные системы: моделирование и оптимизация, Тверь, ТвГУ, 2001г., С. 59 – 63.

[2] Язенин И.А. О методах оптимизации инвестиционного портфеля в нечеткой случайной среде. Сложные системы: обработка информации, моделирование и оптимизация, Тверь, ТвГУ, 2002г., С. 130 – 135.

[3] Язенин И.А. Об одной модели оптимизации инвестиционного портфеля. Вестник ТвГУ, №2, Серия «Прикладная математика», выпуск 1, 2003г., С. 102 – 105.

[4] A.V.Yazenin. Optimization with Fuzzy Random Data and its Application in Financial Analysis. International Conference on Fuzzy Sets and Soft Computing in Economics and Finance, June 17-20, Proceedings, 2004, Saint-Petersburg, Russia, pp.16 – 32.

[5] E.N.Grishina. On One Method of Portfolio Optimization with Fuzzy Random Data. International Conference on Fuzzy Sets and Soft Computing in Economics and Finance, June 17-20, Proceedings, 2004, Saint-Petersburg, Russia, pp.493 – 498.

[6] E.N. Grishina, A.V. Yazenin About one approach to portfolio optimization. 11th Zittau East West fuzzy Colloguium, Proceedings (Wissenschaftliche Berichte, Heft 81, Nr. 2029-2059), HS Zittau/Gorlitz, Germany, 2004, pp. 219 – 226

[7] A.V. Yazenin, E.N. Grishina, M.Wagenknecht. Metods of searching for quasieffective portfolios in fuzzy random environment. 15th Zittau East West fuzzy Colloguium, Proceedings (Wissenschaftliche Berichte, Heft 100, Nr. 2360-2395), HS Zittau/Gorlitz, Germany, 2008, pp. 121 – 125

[8] Язенин А.В., Шефова Н.А. Об одной возможностно-вероятностной модели портфеля минимального риска. Вестник Тверского государственного университета, №14. Серия «Прикладная математика», выпуск 2 (17), 2010 г., с. 85 – 95.

[9] A.Yazenin, N. Shefova, M.Wagenknecht. Possibilistic-Probablistic Models of Minimal Risk Portfolio: Comparison Study. Proceedings of 17th Zittau Fuzzy Colloquium. 2010. Zittau. Germany, pp. 155 – 164.

[10] H.Markowitz. Portfolio selection: efficient diversification of investments. Wiley. New York, 1959.

[11] Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. М., Наука, 1976.

[12] A.V. Yazenin. On the problem possibilistic optimization. Fuzzy sets and systems 81(1996) 133 – 140.

[13] A.V.Yazenin, M.Wagenknecht. Possibilistic optimization. Brandenburgische Technische Universitat. Cottbus. Germany. 1996.

[14] Y.Feng, L.Hu, H.Shu. The variance and covariance of fuzzy random variables. Fuzzy sets and systems 120(2001) 487 – 497.

[15] S.Nahmias. Fuzzy variables. Fuzzy sets and systems 1(1978) 97 – 110.

[16] S.Nahmias. Fuzzy variables in random environment. In: Gupta M.M. et. al.(eds.). Advances in fuzzy sets Theory. NHCP. 1979.

[17] H.Kwakernaak. Fuzzy random variables - I. Definitions and theorems, Inf. Sci.. 15(1978) 1-29.

[18] M.D.Puri, D.Ralesky. Fuzzy random variables. J. Math. Anal. Appl. 114(1986) 409 – 422.

[19] L.A.Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy sets and systems 1(1978) 3 – 28.

[20] Д.Дюбуа, А.Прад. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. М.,1990.

[21] Хохлов М.Ю., Язенин А.В. Расчет числовых характеристик нечетких случайных величин // Вестник ТвГУ, №2, Серия «Прикладная математика», выпуск 1, 2003, с.39 – 43.

[22] Солдатенко И.С., Язенин А.В. Задача возможностной оптимизации с взаимно t-связанными параметрами: сравнительное изучение // Известия РАН. Теория и системы управления, 2008, №5, с.87 – 98.