ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

УДК 519.216.8

КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГИЛЬБЕРТОВОЗНАЧНЫХ СЕМИМАРТИНГАЛОВ

Лаврентьев В.В.
Лаборатория статистического анализа,
факультет вычислительной математики и кибернетики,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 24.02.2011, после переработки 02.03.2011.

В работе выводится каноническое разложение для гильбертовозначных семимартингалов с помощью стохастических интегралов.

In this paper we derive a canonical decomposition for Hilbert-valued semimartingales with stochastic integrals.

Ключевые слова: семимартингал, гильбертово пространство, триплет локальных характеристик.
Keywords: semimartingale, Hilbert space, triplet of local characteristics.

Введение

Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ - измеримое пространство, с выделенным на нем неубывающим непрерывным справа семейством $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ σ-алгебр $\mathcal{F}_t$ таких, что $\mathcal{F} = \vee_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$; и $X = (X_t, \mathcal{F}_t; H)$ - семимартингал, принимающий значения в гильбертовом пространстве H, т.е.

$$X_t = X_0 + M_t + V_t, \tag{1}$$

где $M \in \mathcal{M}_{loc}(H)$ - локальный мартингал и $V \in \mathcal{V}_{loc}(H)$ - процесс локально ограниченной вариации.

Обозначим через $\mu = \mu(dt, dx)$ целочисленную случайную меру скачков семимартингала X:

$$\mu((0,t], \Gamma) = \sum_{0<s\leq t} I(\Delta X_s \in \Gamma), \quad \Gamma \in \mathcal{B}(H \backslash \{0\}), \tag{2}$$

где $\mathcal{B}$ – σ-алгебра борелевских множеств.

Для семимартингалов, принимающих значения в сепарабельном банаховом пространстве $\mathbb{H}$ со свойством Радона-Никодима (в частности, в рефлексивном пространстве), справедливо следующее разложение (см. [1]):

$$X_t = X_0 + B_t^a + M_t^a + \int_0^t \int_{\|x\|>a} x\,\mu(ds, dx) \tag{3}$$

с предсказуемым процессом $B^a = (B^a_t, \mathcal{F}_t; \mathbb{H})$ из класса процессов локально интегрируемой вариации $\mathcal{A}_{loc}(\mathbb{H})$ и локально квадратично интегрируемым мартингалом $M^a \in \mathcal{M}^2_{loc}(\mathbb{H})$. В отличии от (1) такое представление единственно.

Рассмотрим более детально представление (3) для случая $\mathbb{H} = H$, т.е. для случая семимартингалов, принимающих значения в сепарабельном гильбертовом пространстве. Для гильбертовозначного процесса X для $i \geq 1$ через x_i будем обозначать действительные процессы, определяемые равенствами $(x_i)_t = (e_i, X_t)$, где $\{e_i\}$ - ортонормированный базис в H, т.е. $X_t = ((x_1)_t, (x_2)_t, \cdots)$. Тогда $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(H)$ соответствует набор предсказуемых действительных процессов локально интегрируемой вариации $(< m_i, m_j >)_{i,j\geq 1}$ таких, что $m_i m_j - < m_i, m_j >$ - локальный мартингал; $< m_i > \equiv < m_i, m_i >$. Заметим [2], что

$$< M >_t = \sum_{i=1}^{\infty} < m_i >_t .$$

Далее будем следовать схеме, рассмотренной в [3], для действительных семимартингалов. Известно [4], что $M^a \in \mathcal{M}^2_{loc}(H)$ допускает (и притом единственное) разложение в сумму непрерывного и чисто разрывного мартингалов $M \equiv M^c$ и M^{ad}.

Представление (3) можно теперь переписать в виде (полагая для определенности $a = 1$):

$$X_t = X_0 + B_t + M_t + M^d_t + \int_0^t \int_{\|x\|>1} x\, \mu\,(ds, dx)\,. \tag{4}$$

Более того, как и для случая $H = \mathbf{R}$ имеет место следующий результат.

1. Каноническое представление гильбертовозначных семимартингалов

Теорема. *Семимартингал $X = (X_t, \mathcal{F}_t; H)$ допускает представление:*

$$X_t = X_0 + B_t + M_t + \int_0^1 \int_{\|x\|\leq 1} x d(\mu - \nu) + \int_0^t \int_{\|x\|>1} x\, \mu\,(ds, dx)\,, \tag{5}$$

где $B = (B_t, \mathcal{F}_t; H)$ - предсказуемый процесс из класса $\mathcal{A}_{loc}(H)$ (процессы с локально интегрируемой вариацией), $M = (M_t, \mathcal{F}_t; H) \in \mathcal{M}^c_{loc}(H)$ (непрерывный локальный мартингал), $\mu = \mu(ds, dx)$ - мера скачков семимартингала X и $\nu = \nu(ds, dx)$ - ее компенсатор.

Доказательство. В силу (4) достаточно показать. что

$$M^d_t = \int_0^t \int_{\|x\|\leq 1} x d(\mu - \nu). \tag{6}$$

В отличии от теоремы 2 в [5] μ -мера скачков семимартингала X, а не локального мартингала M^d.

Без ограничения общности можно считать, что $X_t = A_t + M^d_t$, где A - предсказуемый процесс из класса $\mathcal{A}_{loc}(H)$ и $M^d \in \mathcal{M}^{d,2}_{loc}(H)$.

Так как $\left(\sum_{0<s\le t}\|\Delta X_s\|^2\right)^{1/2} \le \left(2\sum_{0<s\le t}\left\|\Delta M_s^d\right\|^2\right)^{1/2} + 2\sum_{0<s\le t}\|\Delta A_s\|$, то $\left(\sum_{s\le\cdot}\|\Delta X_s\|^2\right)^{1/2} \in \mathcal{A}^+_{loc}(\mathbf{R})$ и, следовательно, в силу леммы 1 в [3]

$$\sum_{s\le\cdot}\|\Delta X_s\|^2/(1+\|\Delta X_s\|) \in \mathcal{A}^+_{loc}(\mathbf{R}). \tag{7}$$

В силу теоремы 1 в [5] стохастические интегралы

$$Z_t \equiv \int_0^t \int_{H\setminus\{0\}} xd(\mu-\nu), t>0$$

определены, если

$$\sum_{s\le\cdot}\|\Delta Y_s\|^2/(1+\|\Delta Y_s\|) \in \mathcal{A}^+_{loc}(\mathbf{R}),$$

где $Y_t = \int_{\|x\|\le 1} x\mu(\{t\},dx) - \int_{\|x\|\le 1} x\nu(\{t\},dx)$.

Заметим, что $\|Y_t\| \le 2$ и

$$\sum_{s\le t}\|Y_s\|^2 \le 2\left\{\sum_{s\le t} I(\|\Delta X_s\|\le 1)\|\Delta X_s\|^2 + \sum_{s\le t}\left\|\int_{\|x\|\le 1} x\nu(\{s\},dx)\right\|^2\right\} \le$$

$$\le 2\left\{\sum_{s\le t} I(\|\Delta X_s\|\le 1)\|\Delta X_s\|^2 + \sum_{s\le t}\int_{\|x\|\le 1}\|x\|^2\nu(\{s\},dx)\right\}. \tag{8}$$

При $|x|\le 1, x\in\mathbf{R}, x^2/(1+|x|) \le x^2 \le 2x^2/(1+|x|)$, следовательно, в силу (7)

$$\alpha \equiv \sum_{s\le\cdot} I(\|\Delta X_s\|\le 1)\|\Delta X_s\|^2 \in \mathcal{A}^+_{loc}(\mathbf{R}).$$

Пусть (τ_n) - локализующая последовательность для этого процесса, т.е. $(\tau_n)\uparrow\infty$ и $\mathbf{E}\alpha_{\tau_n}<\infty$. Тогда из соотношений (8) и Леммы 1 в [5] как и в работе ([3], с. 383) вытекает, что $\mathbf{E}\sum_{s\le\tau_n}\|Y_s\|^2 \le 4\mathbf{E}\alpha_{\tau_n}<\infty$.

Итак, $\sum_{s\le\cdot}\|Y_s\|^2 \in \mathcal{A}^+_{loc}(\mathbf{R})$, следовательно, $\sum_{s\le\cdot}\frac{\|Y_s\|^2}{1+\|Y_s\|} \in \mathcal{A}^+_{loc}(\mathbf{R})$, процесс $Z = (Z_t,\mathcal{F}_t;H)$ определен и является чисто разрывным локальным мартингалом с $\Delta Z = Y$. Для доказательства (6) нужно установить, что $\Delta M^d = \Delta Z$ или $\Delta X - \Delta A = \Delta Z$, но $\Delta X_t = \int_{\|x\|\le 1} x\mu(\{t\},dx)$ и $\Delta Z = Y$, следовательно, достаточно показать, что предсказуемые процессы ΔA и $\left(\int_{\|x\|\le 1} x\nu(\{t\},dx)\right)_{t\ge 0}$ $\mathbf{P}$-неразличимы. Для этого нужно проверить, что $(\Delta A, e_i)$ и $\left(\int_{\|x\|\le 1}(x,e_i)\nu(\{t\},dx)\right)_{t\ge 0}$ $\mathbf{P}$-неразличимы при каждом $i\ge 1$, где $\{e_i\}$ - некоторый ортонормированный базис в H. В силу теоремы 13 из гл. IV книги [7] (с. 93) достаточно убедиться, что для любого конечного предсказуемого момента остановки τ $\mathbf{P}$-п.н. выполнено равенство:

$$(\Delta A, e_i)_\tau = \int_{\|x\|\le 1}(x,e_i)\nu(\{\tau\},dx). \tag{9}$$

Справедливость (9) вытекает из следующего соотношения (см. также [6])

$$(\Delta A, e_i)_\tau = \mathbf{E}((\Delta X_\tau, e_i)|\mathcal{F}_{\tau-}) =$$

$$= \mathbf{E}\left(\int_{\|x\|\le 1}(x,e_i)\mu(\{\tau\},dx)|\mathcal{F}_{\tau-}\right) = \int_{\|x\|\le 1}(x,e_i)\nu(\{\tau\},dx). \tag{10}$$

Разложение (5) доказано.

2. Триплет локальных характеристик семимартингала

Отметим, что из (5) следует равенство

$$\Delta B_t = \int_{\|x\| \le 1} x\nu(\{t\}, dx). \tag{11}$$

Следующее свойство меры ν, доказанное в работе [8] для семимартингалов, принимающих значения в конечномерном пространстве, распространяется на случай гильбертовозначных семимартингалов.

Лемма. *Пусть $X = (X_t, \mathcal{F}_t; H)$ - семимартингал, тогда компенсатор случайной меры скачков процесса X - мера ν обладает следующим свойством:*

$$\int_0^t \int_{H \setminus \{0\}} \|x\|^2 \wedge 1 d\nu < \infty. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть X^1 определяется по формуле

$$X_t^a = X_0 + \sum_{s \le t} \Delta X_s I(\|\Delta X_s\| > a)$$

для $a = 1$. Тогда в силу Леммы 1 в [1] процесс $X - X^1$ допускает разложение $X - X^1 = A + M$ с предсказуемым процессом $A \in \mathcal{A}_{loc}(H)$ и $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(H)$.

Пусть (τ_n) - локализующая последовательность моментов остановки для A и M, тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \int_0^{t \wedge \tau_n} \int_{\|x\| \le 1} \|x\|^2 d\mu = \mathbf{E} \sum_{s \le t \wedge \tau_n} \|\Delta X_s\|^2 I(\|\Delta X_s\| \le 1) \le \\ \le 2\mathbf{E} \sum_{s \le t \wedge \tau_n} \|\Delta A_s\|^2 I(\|\Delta X_s\| \le 1) + \le 2\mathbf{E} \sum_{s \le t \wedge \tau_n} \|\Delta M_s\|^2 I(\|\Delta X_s\| \le 1).\end{aligned} \tag{13}$$

Так как $\|\Delta A_s\| \le 1$ и $A^{\tau_n} \in \mathcal{A}(H)$, то первое слагаемое в правой части конечно. Для гильбертовозначных мартингалов M второе слагаемое ограничено величиной $2\mathbf{E}\,\|M_t^{\tau_n}\|^2$ (см. [4]).

Далее в силу леммы 1 в [5]

$$\mathbf{E} \int_0^{t \wedge \tau_n} \int_{\|x\| \le 1} \|x\|^2 d\nu = \mathbf{E} \int_0^{t \wedge \tau_n} \int_{\|x\| \le 1} \|x\|^2 d\mu < \infty.$$

Отсюда, поскольку $\tau_n \uparrow \infty$ $\mathbf{P}$-п.н., вытекает, что $\mathbf{P}$-п.н.

$$\int_0^t \int_{H \setminus \{0\}} \|x\|^2 I(\|x\| \le 1) d\nu < \infty, t > 0. \tag{14}$$

Покажем теперь, что $\mathbf{P}$-п.н.

$$\int_0^t \int_{H \setminus \{0\}} I(\|x\| > 1) d\nu < \infty. \tag{15}$$

Для этого введем последовательность м.о. (τ_n), полагая $\tau_0 = 0$, $\inf\oslash = \infty$ и $\tau_{n+1} = \inf\{t > \tau_n : \|\Delta X_s\| > 1\}$. Тогда

$$n \geq \mathbf{E} \sum_{s \leq t\wedge\tau_n} I(\|\Delta X_s\| > 1) =$$

$$= \int_0^{t\wedge\tau_n} \int_{H\setminus\{0\}} I(\|x\| > 1) d\mu = \int_0^{t\wedge\tau_n} \int_{H\setminus\{0\}} I(\|x\| > 1) d\nu \quad (16)$$

и, поскольку $\tau_n \uparrow \infty$ $\mathbf{P}$- п.н., отсюда вытекает справедливость (15) и (в силу (14)) утверждение леммы.

Заключение

По аналогии с конечномерным случаем соотношение (5) будет называться каноническим представлением семимартингала, а набор $(B, (< m_i, m_j >)_{i,j\geq 1}, \nu)$ - триплетом локальных характеристик семимартингала X. Следует отметить, что этот триплет определяется по процессу X единственным образом.

Если семимартингал X является стохастически непрерывным, то его триплет локальных характеристик будет непрерывным: $\mathbf{P}$ - п.н. Функции B и $< m_i, m_j >, i, j \geq 1$ непрерывны и $\nu(\{t\}, H\setminus\{0\}, t > 0$. (см. [8]).

Если семимартингал X является процессом с независимыми приращениями, то как следствие теоремы Петтиса и результатов работы [9] получаем, что процессы B и $< m_i, m_j >, i, j \geq 1$ и случайная мера ν не зависят от ω.

Список литературы

[1] Лаврентьев В.В. Разложение банаховозначных семимартингалов // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. Вып. 16, 2010. С. 25-28.

[2] Meyer P.A. Notes sur les integrales stochastiques. I Integrales Hilbertiennes. - Lect. Notes Math., 1977, Vol.581, p.446-462.

[3] Кабанов Ю.М., Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Абсолютная непрерывность и сингулярность локально абсолютно непрерывных вероятностных распределений. I. - Матем. сб., 1978, т.107, № 3, с. 364–415.

[4] Metivier M., Pellaumail J. Stochastic integration. - New York etc.: Acad.Press, 1980. - 196 p.

[5] Лаврентьев В.В. О структуре гильбертовозначных мартингалов // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. Вып. 17, 2010. С. 13-19.

[6] Jacod J. Un théorème de répresentation pour les martingales discontinues. - Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 1976, Bd 34, p. 225-244.

[7] Деллашери К. Емкости и случайные процессы. - М.: Мир, 1975. - 192 с.

[8] Гальчук Л.И. Обобщение теоремы Гирсанова о замене меры на случай полумартингалов со скачками // Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, вып. 2, с. 279-294.

[9] Григелионис Б. О мартингальной характеризации случайных процессов с независимыми приращениямию // Лит. матем. сб., 1977, т. 17, № 1, с. 75-86.