ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

УДК 004.8

СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ КЛИК МАКСИМАЛЬНЫХ ГРАФОВ СМЕЖНОСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ БАЙЕСОВСКИХ СЕТЕЙ

Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.
СПИИРАН, Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 20.12.2010, после переработки 18.03.2011.

В задачах представления и обработки алгебраических байесовских сетей (АБС) особую роль играет их вторичная структура в форме графа смежности, при этом минимальные графы смежности являются наиболее «эффективным» вариантом такой структуры для выполнения основных алгоритмов логико-вероятностного вывода в АБС. Цель данной работы — построение исчерпывающей классификации для особых подграфов минимальных графов смежности, называемых владениями. Предложена система терминов, структурирующая исследуемую область. Составлена и исследована классификация владений. Доказано, что классификация исчерпывающая, а также, что она есть непротиворечивое расширение использованной прежде. Полученные результаты являются основой для дальнейших исследований глобальной структуры АБС, в частности, таких вопросов, как мощность множества минимальных графов смежности, классификация клик, исследование их внутренней структуры, а также для улучшения времени работы алгоритмов построения множества минимальных графов смежности.

The secondary structure, usually represented in a form of a join graph, is very sufficient in algebraic Bayesian networks (ABN) presentation and processing and minimal join graphs are the most effective variation of such a structure for ABN main algorithms probabilistic logic inference work. The goal of this work is the designing of exhaustive classification for special minimal join graph subgraphs called possessions. A system of term is given to structure the research space. A classification of possessions is compiled and researched. The classification is proven to be exhaustive. The classification is proven to be a consistent extension for the one used before. The obtained results are the basement for the further ABN global structure researches, in particular, in such the questions as the questions of minimal join graph set cardinal number, clique classification, their inner structure researches and minimal join graph set synthesis algorithms improvements.

Ключевые слова: алгебраические байесовские сети, вторичная структура, минимальный граф смежности, автоматическое обучение, структурный синтез, владения.
Keywords: algebraical Bayesian networks, secondary structure, minimal join graph, automated learning, machine learning, structure synthesis, possessions.

Введение

Алгебраические байесовские сети (АБС) представляют собой логико-вероятностную графическую модель [1, 14] сложных систем знаний с неопределенностью. В теории АБС неопределенность знаний характеризуется с помощью оценок вероятностей (то есть утверждениям приписывается вероятностная мера истинности — благодаря этому мы можем оперировать не просто бинарными оценками истина/ложь, но вероятностями). При этом в алгебраических байесовских сетях можно осуществить как априорный, так и апостериорный логико-вероятностные выводы. Выделяют первичную и вторичную структуру АБС [6, 14, 16].

Особенности вторичной структуры существенны для выбора алгоритмов логико-вероятностного вывода всех видов, более того, от них [особенностей] зависит сама возможность выполнения таких алгоритмов [10, 11, 12, 13, 15]. Вариантами представлений вторичной структуры одной и той же АБС, предложенными в [14], являются графы смежности и их семейства. С точки зрения потребностей теории АБС, особенно важным является исследование минимальных графов смежности. В частности, вторичная структура любой ациклической алгебраической сети, преимущество которых для реализации алгоритмов логико-вероятностного вывода было показано в [3, 4, 5, 6, 7, 8, 17], представима минимальным графом смежности (более того, в этом случае можно говорить о дереве смежности [9]). Но свойства этих графов изучены недостаточно, хотя можно отметить недавно полученные результаты в работах [2], где рассматривалось матроидное представление минимальных графов смежности, а также [20], где был получен целый ряд результатов о вторичной структуре АБС.

В частности, в последней статье вводится классификация владений (компонент связности особых подграфов графов смежности; ниже будет дано точное определение), которые используются, в том числе, в доказательстве теоремы о представлении множества минимальных графов смежности в виде объединения декартового произведения особых подграфов максимального графа смежности, сформулированной и доказанной в той же работе. Однако вопрос о том, что приведенная классификация является исчерпывающей, остается открытым.

Цель данной работы — построить полную классификацию владений и доказать, что построенная классификация является исчерпывающей, а также выяснить, насколько полно для нее можно воспроизвести результаты, сформулированные в работе [20], касающиеся теоремы о множестве минимальных графов смежности. Теорема устанавливает биекцию между множеством минимальных графов смежности и декартовым произведением множеств особых подграфов максимального графа смежности. Эта теорема, в свою очередь, позволяет осуществить построение множества минимальных графов смежности, исследовать отношения между множеством минимальных графов смежности и нередуцируемых графов смежности, вычислить мощность множества минимальных графов смежности и достичь многих других результатов.

В настоящей работе мы будем любое определение вводить в двух вариантах, где это возможно и оправдано: более описательном и более формальном. Оба варианта будут одинаково строги; такой дуализм выбран для упрощения восприятия материала читателями, специализирующимися в различных отраслях науки.

1. Основные определения и обозначения

В данном разделе приводятся определения так, как они были введены в [20].

Граф — пара $\langle V,\ E\rangle$, где V — *множество вершин графа*, а E — *множество ребер*, каждое из которых является неупорядоченной парой $(v_i,\ v_j)$, $i \neq j, v_i,\ v_j \in V$. Для удобства будем через V и E обозначать функции от графа, возвращающие множество его вершин и множество его ребер соответственно:

$$V\left(G'\right) = V';\ E\left(G'\right) = E',$$

где $G' = \left\langle V', E'\right\rangle$.

Внесем дополнительную определенность: $\subseteq$ — (нестрогое) включение:

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\forall a \in A \quad a \in B);$$

$\subset$ — строгое включение:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall a \in A,\ a \in B \quad \exists b \in B : b \notin A).$$

Алфавитом будем называть множество атомарных пропозициональных формул $A = \ \{x_1, \ldots,\ x_n\}$, над которым будут заданы максимальные фрагменты знаний. *Слово* V — подмножество алфавита: $V \subseteq A$.

Множество главных конъюнктов максимальных фрагментов знаний (МФЗ), вошедших в АБС, — это такое множество слов $V^* = \ \{V_i \subseteq A\}_{i=1}^{i=m}$, что:

1. Оно не содержит несобственное подмножество алфавита:

$$V_i \neq A,\ V_i \neq \varnothing;$$

2. Никакое слово полностью не содержит никакое другое слово:

$$\forall\ i \neq j\ (V_i \not\subseteq V_j) \text{ и } (V_j \not\subseteq V_i).$$

Граф максимальных фрагментов знаний — ненаправленный граф G, вершины которого соответствуют элементам множества главных конъюнктов МФЗ, вошедших в алгебраическую байесовскую сеть, а ребра удовлетворяют условию

$$(V_i, V_j) \in E\,(G) \Rightarrow V_i \cap V_j \neq \varnothing.$$

Введем понятия веса для вершины, для ребра и для подграфа. *Вес* $W\,(V_i)$ *вершины* $V_i \in V(G)$ — множество атомов алфавита, вошедших в V_i:

$$W\,(V_i) = \{x_i | x_i \in V\}$$

Вес $W\,(\{V_i,\ V_j\})$ *ребра* $\{V_i,\ V_j\} \in E\,(G)$ графа G определяется как пересечение весов тех вершин, которые соединены этим ребром:

$$W\,(\{V_i,\ V_j\}) = W\,(V_i) \cap W\,(V_j).$$

Вес $W(H)$ *подграфа* $H \subseteq G$ — наибольшее по включению слово, которое входит в веса всех его вершин:

$$W(H) = \bigcap_{V \in H} W(V).$$

Магистральный путь $B : V_b \to V_e$ от вершины V_b до вершины V_e, пересечение весов которых непусто, — это такой путь от вершины V_b до вершины V_e, что вес любой принадлежащей ему вершины содержит пересечение весов начальной и конечной вершин:

$$B : V_b \to V_e = P : V_b \rightsquigarrow V_e,$$

такой, что $\forall\ V_i \in B\ W(V_b) \cap W(V_e) \subset W(V_i)$. Граф *магистрально связен*, если между каждой парой несовпадающих вершин, веса которых содержат общие элементы, существует магистральный путь.

Благодаря введенным понятиям *граф смежности* определяется как магистрально связный граф МФЗ. При этом магистрально связный граф не обязательно связен (например, граф из двух вершин ab и cd, в котором нет ребер, тем не менее, является магистрально связным).

Максимальный граф смежности $G_{\max}$ — наибольший по числу ребер граф смежности (рис. 1). Так как в графе МФЗ возможны не все ребра, а только те, которые соединяют вершины, пересечение весов которых непусто, то максимальный граф смежности вовсе необязательно совпадает с полным подграфом. В статье [20] было доказано, что для заданного множества вершин существует и при этом единственный максимальный граф смежности.

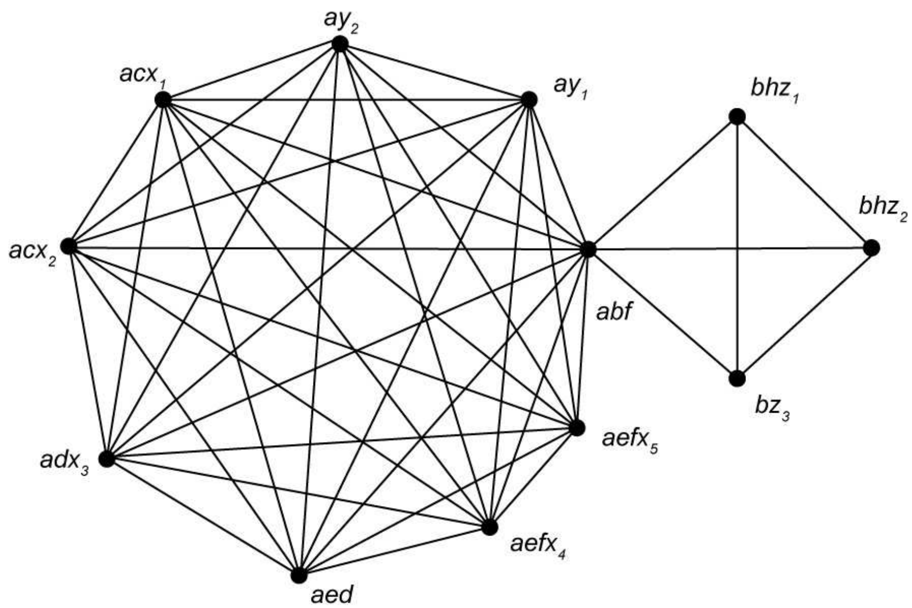

Рис. 1: Максимальный граф смежности на вершинах ay_1, ay_2, acx_1, acx_2, adx_3, aed, $aefx_4$, $aefx_5$, abf, bhz_1, bhz_2, bz_3

2. Сужения и клики

Для сохранения строгости изложения мы уточним некоторые определения из [20].

Сужение $G \downarrow U$ ненаправленного графа G на слово U — это ненаправленный граф, в который входят только те вершины и ребра исходного графа G, веса которых содержат или равны U:

$$G \downarrow U = \langle \{V_i | V_i \in V(G),\ U \subseteq W(V_i)\},\ \{E_i | E_i \in E(G),\ U \subseteq W(E_i)\} \rangle .$$

Любое слово, являющееся весом какого-либо ребра графа G, будем называть *значимым словом графа* G, а сужение графа G на такое слово — *значимым сужением* .

Утверждение 1. Для любого значимого сужения $G \downarrow U$ выполняется $W(G \downarrow U) = W(U)$.

Доказательство. Поскольку для всех $V \in V(G \downarrow U) \quad W(V) \subseteq W(U)$ и для всех $E \in E(G \downarrow U) \quad W(E) \subseteq W(U)$, то $W(G \downarrow U) \subseteq W(U)$. Так как U — значимое, то существует такое ребро E^*, что $W(E^*) = U$. Понятно, что $E^* \in G \downarrow U$, поэтому $W(U) \subseteq W(G \downarrow U)$. Отсюда следует, что $W(G \downarrow U) = W(U)$.

Кликой U будем называть значимое сужение максимального графа смежности на вес U (рис. 2). Вес любой клики является значимым словом, а сама она является полным подграфом графа $G_{\max}$. Множество всех таких клик будем обозначать как Clique.

В [20] было доказано, что если сужение $G_{\max}$ на произвольное слово непусто, то оно является максимальным подграфом. Отсюда следует, что клика является полным подграфом, как ее обычно и понимают в теории графов.

Граф клик — направленный граф, вершинами которого являются клики из множества Clique (рис. 3). Ребро из вершины P в вершину Q проведено, если клика P содержит клику Q, и не существует клики R, такой, что клика P содержит клику R и клика R содержит клику Q: G_{Clique} — пара $\langle \text{Clique},\ E_{\text{Clique}} \rangle$, где

$$\forall\ P,\ Q \in \text{Clique},\ (P, Q) \in E \Leftrightarrow Q \subset P \text{ и } \nexists\ R \in \text{Clique} : Q \subset R \subset P.$$

3. Владения и их классификация

Определение 1. *Сильное сужение* $G \Downarrow U$ — значимое сужение $G \downarrow U$, из которого удалили все ребра веса U:

$$G \Downarrow U = \langle \{V_i | V_i \in V(G),\ U \subseteq W(V_i)\},\ \{E_i | E_i \in E(G),\ U \subset W(E_i)\} \rangle .$$

Пояснение. Сильное сужение графа $G_{\max} \Downarrow U$ представляет собой компоненты связности, на которые разбивается сужение $G_{\max} \downarrow U$ удалением ребер веса U (рис. 4).

Определение 2. *Владение* P_U^i — множество вершин i-й компоненты связности сильного сужения $G_{\max} \Downarrow U$ (рис. 4).

Определение 3. *Доменная вершина* D_U клики U — вершина, принадлежащая клике U и не принадлежащая ни одному из ее сыновей (рис. 5).

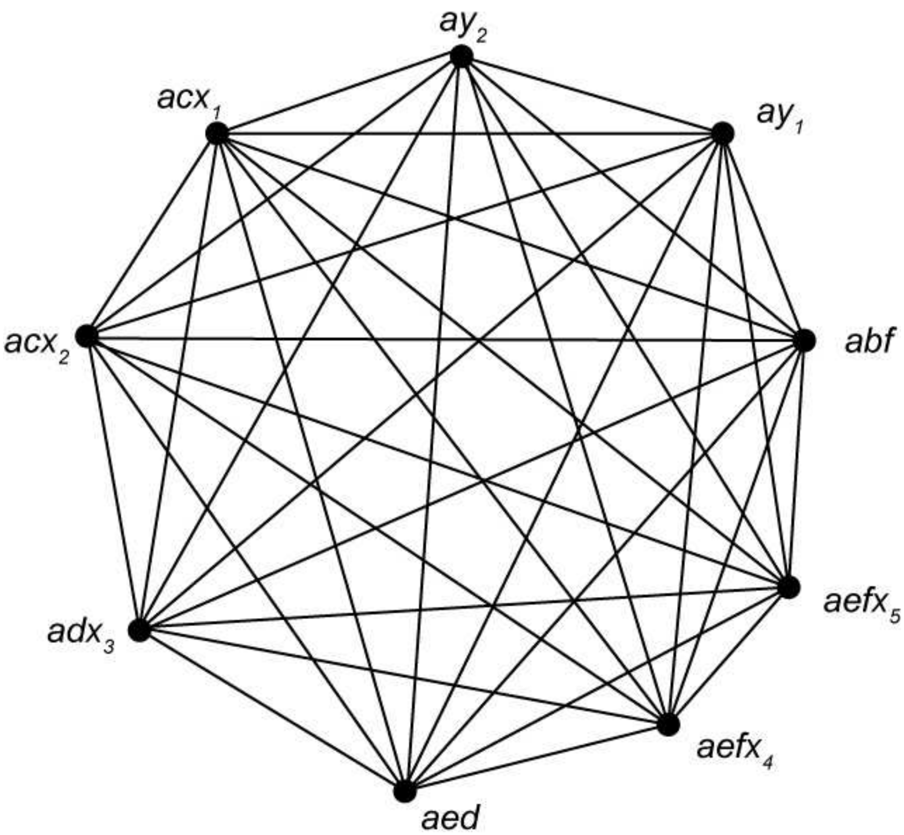

Рис. 2: Клика a (образованная сужением максимального графа с рис. 1 на вес a)

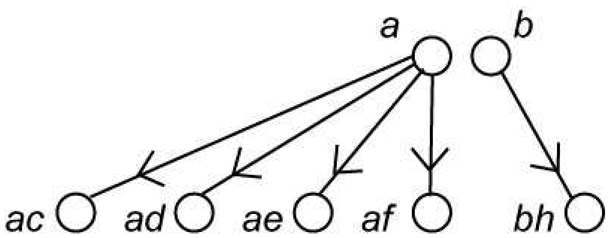

Рис. 3: Граф клик, построенный для графа на рис. 1

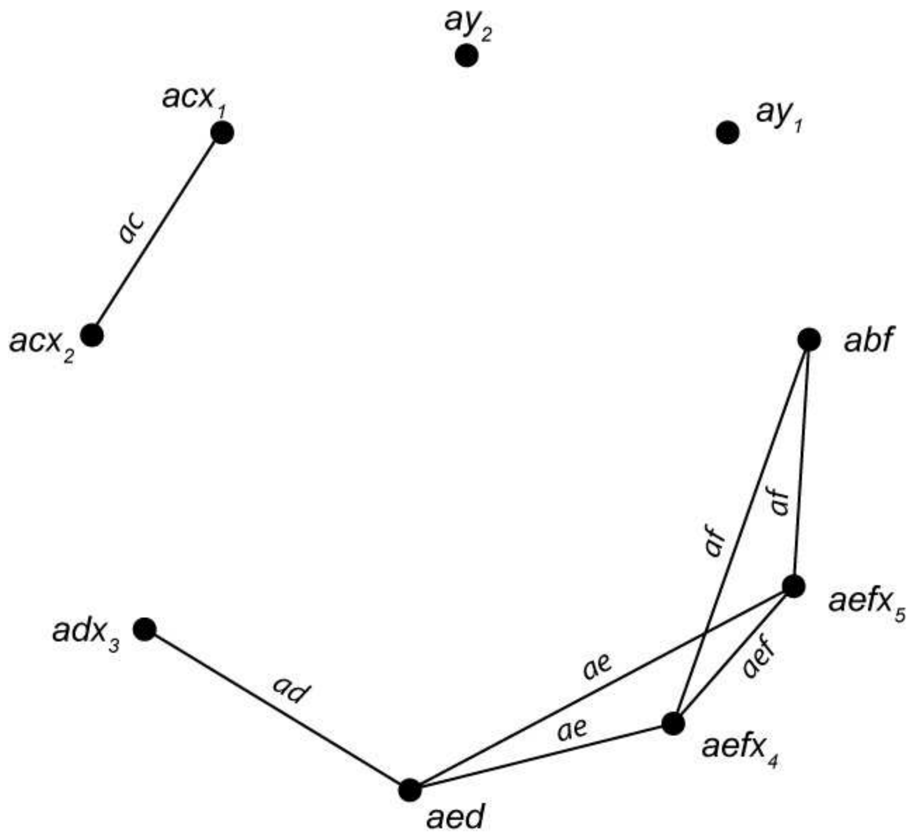

Рис. 4: Сильное сужение графа с рис. 1 на вес a. Оно состоит из 4-х владений.

Определение 4. *Вассал* V_U клики U — множество вершин, входящих в какого-либо сына клики U (рис. 5).

Определение 5. Два вассала V_U^i и V_U^j называются *братьями* (обозначается $V_U^i \leftrightarrow V_U^j$), если их пересечение непусто (рис. 5):

$$V_U^i \leftrightarrow V_U^j \Leftrightarrow V_U^i \cap V_U^j \neq \varnothing.$$

Определение 6. Два вассала V_U^i и V_U^j называются *полусиблингами* (обозначается $V_U^i \nleftrightarrow V_U^j$), если существует такой упорядоченный набор вассалов $\{V_U^{w_1}, \ldots, V_U^{w_n}\}$, что V_U^i — брат $V_U^{w_1}$, $V_U^{w_1}$ — брат $V_U^{w_2}$, ..., $V_U^{w_{n-1}}$ — брат $V_U^{w_n}$, а $V_U^{w_n}$ — брат V_U^j (рис. 5).

То же самое, более формально:

Определение 6'. Два вассала V_U^i и V_U^j называются *полусиблингами*:

$$V_U^i \nleftrightarrow V_U^j \Leftrightarrow \exists \{V_U^{w_1}, \ldots V_U^{w_n}\} : V_U^b \leftrightarrow V_U^{w_1},\ V_U^{w_n} \leftrightarrow V_U^e \text{ и } \forall i < n\ V_U^{w_i} \leftrightarrow V_U^{w_{i+1}}.$$

Определение 7. *Полусиблинговый путь* между двумя родственными вассалами V_U^i и V_U^j — такой набор вассалов $\{V_U^{w_1}, \ldots, V_U^{w_n}\}$ из определения 6', что $V_U^b \nleftrightarrow V_U^{w_1}$; $V_U^{w_n} \nleftrightarrow V_U^e$ и $\forall i < n\ V_U^{w_i} \nleftrightarrow V_U^{w_{i+1}}$ (рис. 5).

Определение 8. *Братство* B_U клики U — непустой набор вассалов $\{V_U^1, \ldots, V_U^l\}$ клики U, такой, что с каждым вассалом в братство входят все его полусиблинги и только они (рис. 5).

То же самое, более формально:

Определение 8'. *Братство* B_U клики U:

$$B_U = \{V_U^i | V_U^i \in B_U \ \&\ (V_U^i \nleftrightarrow V_U^j) \Rightarrow V_U^j \in B_U; V_U^i,\ V_U^j \in B_U \Rightarrow V_U^i \nleftrightarrow V_U^j\}.$$

Если построить граф, вершинами которого будут вассалы клики U, а ребра между двумя вассалами будут проведены, если их пересечение непусто, то братством будет являться компонента связности такого графа.

4. Теорема о классификации владений

Лемма 1. В строгом сужении $G \downarrow U$ никакие две вершины из вассалов, не являющиеся полусиблингами, не будут связаны.

Доказательство. Пускай две вершины: $v_1 \in V_U^1$ и $v_2 \in V_U^2$ связны путем $P \in G \downarrow U$. Каждое ребро этого пути имеет вес, строго включающий в себя U, а, значит, оно проходит по какому-либо вассалу. Вершины этого пути, одно ребро которых принадлежит одному вассалу, а второе ребро — другому, принадлежат обоим вассалам. Получаются, что два «соседних» по пути вассала являются братьями. Значит, вассалы V_U^1 и V_U^2 являются полусиблингами.

Теорема о классификации владений. Любое владение любого сильного сужения $G \downarrow U$ является либо доменной вершиной, либо вассалом, либо братством U.

Доказательство. Вершины, входящие в сильное сужение $G \downarrow U$, входят в клику U и делятся на те, которые также входят в какого-либо из ее сыновей, и на те, которые ни в одного из сыновей не входят.

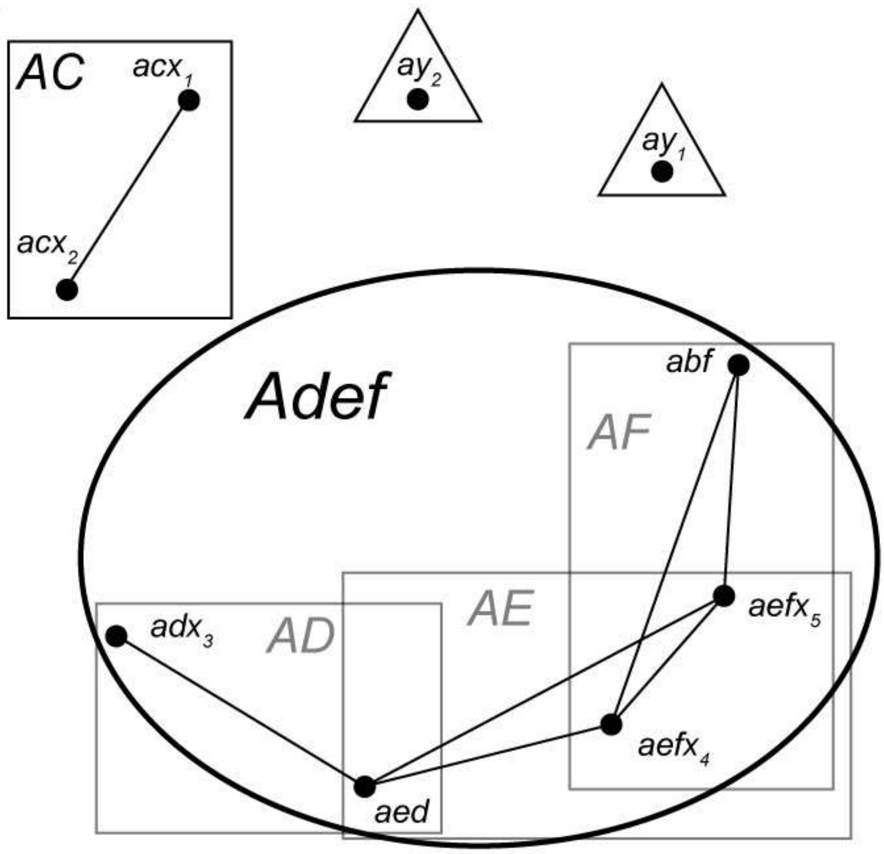

Рис. 5: Владения

Треугольниками обозначены доменные вершины ay_1 и ay_2; прямоугольником обозначен вассал AC, состоящий из вершин acx_1 и acx_2; овалом обозначено братство $Adef$, состоящее из выделенных полупрозрачными прямоугольниками вассалов AD, AE и AF; вассалы AD и AE, точно так же, как и вассалы AE и AF, приходятся друг другу братьями; вассалы AD и AF являются полусиблингами. Они соединены полусиблинговым путем $\{AE\}$.

Докажем, что каждая доменная вершина в $G \downarrow U$ будет образовывать владение. Действительно, если она соединена в $G \downarrow U$ ребром веса $U^* \supset U$ с какой-нибудь другой вершиной, значит, она входит в клику веса U^*, которая будет являться потомком клики веса U, а значит, она входит в какого-нибудь из сыновей клики U.

Теперь заметим, что вершины, входящие в какого-либо сына клики веса S, связны в $G \downarrow U$, потому как магистральный путь, их связывающий, содержит ребра, включающие вес S, а, значит, строго включающие вес U, поэтому принадлежащие $G \downarrow U$.

Если вассал S, в который входит вершина, не пересекается с другими вассалами, то, по лемме 1, никакая его вершина не будет соединена с вершиной из другого вассала, а, значит, он образует отдельную компоненту связности.

Если же вассал S, в который входит вершина, входит в братство, то он любая его вершина v будет связана с любой вершиной v^B любого его брата B, так как v связна с $v^* \in S \cap B$ ребрами веса S и v^* связана с v^B ребрами веса B. Отсюда следует, что любая вершина вассала S будет связана с любой вершиной вассала, приходящемуся тому полусиблингом, а это значит, что братство будет связно. По лемме 1 братство не будет соединено с другими вассалами, а значит, оно образует компоненту связности.

6. Теорема о множестве минимальных графов смежности в свете теоремы о классификации владений

После того, как была сформулирована классификация владений и доказано, что она является исчерпывающей, необходимо выяснить, какие изменения потребуются в доказательстве теоремы о множестве минимальных графов смежности.

Теорема (о множестве минимальных графов смежности) [20]. Множество минимальных графов смежности совпадает с множеством пучков.

Единственным местом в доказательстве упомянутой теоремы, которое касается видов владений, является следующее предложение: «Каждое владение … является либо доменной вершиной, либо вассалом, либо набором вассалов» [20]. Как видим, это непосредственно согласуется с предложенной классификацией, поэтому доказательство теоремы о множестве минимальных графов смежности остается корректным.

Подробное доказательство теоремы представлено в [20], его новая версия публикуется в статье [24].

Заключение

В статье были рассмотрены особые объекты, связанные с изучением вторичной структуры алгебраических байесовских сетей — владения. Само понятие владений было введено в [20], где оно применялось для доказательства теоремы о минимальных графах смежности. Работа опиралась на то, что владения бывают лишь нескольких типов, или, по крайней мере, имеют схожую структуру, однако строгого доказательства данная гипотеза не получила.

В данной статье была предложена классификация владений, которая обобщает предположения, выдвинутые в [20], а также доказана теорема о том, что классификация является исчерпывающей. Поскольку предложенная классификация формально согласована с той, которая применяется в [20], то этот результат формально обосновывает предположения, на которых основаны формулировки, доказательства и выводы, сделанные в указанной статье. Несмотря на то, что классификация, предложенная в ней, оказалась неполна, схемы работы, предложенные для доменов и владений, обобщаются до братств, предложенных в данной работе.

В разработке комплекса алгоритмов и программ логико-вероятностного вывода множество владений и особенности его состава (мощность, число разных типов владений, сложность братств) для каждой клики, предложенные в статье, могут рассматриваться в качестве еще одной структуры алгебраических байесовских сетей, которая в заметной степени упростит автоматический анализ свойств их вторичной структуры. Кроме того, эта новая структура позволит облегчить выявление циклов в минимальных графах смежности.

Результаты структурного анализа клик максимальных графов смежности, полученные в настоящей работе, лежат в основе исследования особенностей вторичной структуры АБС [24], работ по компаративному анализу клик [21, 23], оценки мощности множества минимальных графов смежности [22], а также двух алгоритмов синтеза множества минимальных графов смежности [18, 19].

Поддержка исследований

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект **№09-01-00861-а** «Методология построения интеллектуальных систем поддержки принятия решений на основе баз фрагментов знаний с вероятностной неопределенностью», а также грантом правительства Санкт-Петербурга для победителей конкурса грантов Санкт-Петербурга для студентов, аспирантов, молодых ученых, молодых кандидатов наук 2010 г., диплом ПСП№10697.

Список литературы

[1] Городецкий В.И., Тулупьев А.Л. Формирование непротиворечивых баз знаний с неопределенностью // Известия РАН. Сер. Теория и системы управления. 1997. № 5. С. 33–42.

[2] Опарин В.В., Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В. Матроидное представление семейства графов смежности над набором фрагментов знаний // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2010. Вып. 4. С. 73–76.

[3] Павельчук А.В., Тулупьев А.Л., Тотмянина С.А. Подход к объектно-ориентированному представлению данных алгебраических байесовских сетей в java-коде и реляционных СУБД // Региональная информатика-2008 (РИ-2008). XI Санкт-Петербургская международная конференция. Санкт-Петербург, 22–24 октября, 2008 г.: Материалы конференции / СПОИСУ. СПб.: 2009. С. 68–76.

[4] Сироткин А.В. Модели, алгоритмы и вычислительная сложность синтеза согласованных оценок истинности в алгебраических байесовских сетях // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2009. № 11. С. 32–37.

[5] Тотмянина С.А., Павельчук А.В., Тулупьев А.Л. Алгебраические байесовские сети: структуры данных в СУБД и Java- коде // Интегрированные модели, мягкие вычисления, вероятностные системы и комплексы программ в искусственном интеллекте. Научно-практическая конференция студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов (Коломна, 26–27 мая 2009 г.). Научные доклады. В 2-х т. Т. 2. М.: Физматлит, 2009, С. 123–131.

[6] Тулупьев А.Л. Алгебраические байесовские сети: глобальный логико-вероятностный вывод в деревьях смежности: Учеб. пособие. СПб.: СПбГУ; ООО Издательство «Анатолия». 2007. 40 с. (Сер. Элементы мягких вычислений).

[7] Тулупьев А.Л. Алгебраические байесовские сети: реализация логико-вероятностного вывода в комплексе java-программ // Труды СПИИРАН. СПб.: Наука, 2009. Вып. 8. С. 191–232.

[8] Тулупьев А.Л. Алгебраические байесовские сети: система операций глобального логико-вероятностного вывода // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2010. № 11. С 65–72.

[9] Тулупьев А.Л. Ациклические алгебраические байесовские сети: логико-вероятностный вывод // Нечеткие системы и мягкие вычисления: Научный журнал Российской ассоциации нечетких систем и мягких вычислений. 2006. Том 1, № 1. С. 57–93.

[10] Тулупьев А.Л. Байесовские сети: логико-вероятностный вывод в циклах. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2008. 140 с. (Элементы мягких вычислений.)

[11] Тулупьев А.Л. Непротиворечивость оценок вероятностей в алгебраических байесовских сетях // Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2009. Вып. 3. С. 144–151.

[12] Тулупьев А.Л. Преобразование ациклических байесовских сетей доверия в алгебраические байесовские сети // Известия высших учебных заведений: Приборостроение. 2009. № 3. С. 21–23.

[13] Тулупьев А.Л. Согласованность данных и оценка вероятности альтернатив в цикле стохастических предпочтений // Известия высших учебных заведений: Приборостроение. 2009. № 7. С. 3–8.

[14] Тулупьев А.Л., Николенко С.И., Сироткин А.В. Байесовские сети: логико-вероятностный подход. СПб.: Наука, 2006. 607 с.

[15] Тулупьев А.Л., Сироткин А.В. Алгебраические байесовские сети: принцип декомпозиции и логико-вероятностный вывод в условиях неопределенности // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2008. № 10. т. 6. С. 85–87.

[16] Тулупьев А.Л., Сироткин А.В., Николенко С.И. Байесовские сети доверия: логико-вероятностный вывод в ациклических направленных графах. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2009. 400 с.

[17] Тулупьев А.Л., Столяров Д.М., Ментюков М.В. Представление локальной и глобальной структуры алгебраической байесовской сети в Java-приложениях // Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 5. СПб.: Наука, 2007. С. 71–99.

[18] Фильченков А.А. Алгоритм построения множества минимальных графов смежности при помощи клик владений // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 2 (13).

[19] Фильченков А.А. Алгоритм построения множества минимальных графов смежности при помощи клик-собственников владений // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 4 (15).

[20] Фильченков А.А., Тулупьев А.Л. Структурный анализ систем минимальных графов смежности Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 11. С. 104–127.

[21] Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В. Компаративный анализ клик минимальных графов смежности алгебраических байесовских сетей // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 2 (13).

[22] Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В. Мощность множества минимальных графов смежности // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 4 (15).

[23] Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В. Ребра графов смежности в контексте компаративного анализа клик минимальных графов смежности // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 3 (14).

[24] Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В. Особенности анализа вторичной структуры алгебраической байесовской сети // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 1 (12). С. 97–118.