МОДЕЛИ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 532, 517.958

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Шеретов Ю.В.
Кафедра математического анализа

Поступила в редакцию 08.02.2011, после переработки 18.02.2011.

Предложены новые методы построения точных решений квазигидродинамической системы для слабосжимаемой вязкой жидкости и ее стоксовского приближения. Для квазигидродинамической системы в приближении Стокса доказаны теорема о диссипации полной кинетической энергии и теорема о единственности классического решения основной начально-краевой задачи.

New methods of construction the exact solutions of quasi-hydrodynamic system for slightly compressible fluid and its Stokes approximation are proposed. For quasi-hydrodynamic system in Stokes approximation the theorem about dissipation of total kinetic energy and the theorem on the uniqueness of classical solution of main boundary-value problem are proved.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, квазигидродинамические уравнения, аналитические функции, точные решения.
Keywords: Navier–Stokes equations, quasi-hydrodynamic equations, analytical functions, exact solutions.

Введение

Классическая диссипативная система Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости обладает семейством физически адекватных решений [1]. Не ослабевает интерес к проблеме построения ее новых точных решений [2], [3]. Эти решения могут использоваться в качестве тестовых при разработке численных методов.

В 1994 г. автором была опубликована еще одна система уравнений для слабосжимаемой вязкой жидкости, получившая название квазигидродинамической (КГД). Физические принципы подхода изложены в [4], [5]. Некоторые теоремы о существовании решений задач Коши для полных и упрощенных квазигидродинамических уравнений доказаны в [6].

КГД система для слабосжимаемой вязкой жидкости также является диссипативной и имеет глубокие связи с соответствующей системой Навье-Стокса. Существует широкий спектр точных решений, являющихся общими для уравнений Навье–Стокса и КГД, а в ряде случаев и для системы Эйлера в динамике идеальной несжимаемой жидкости [4], [5], [7] – [9].

В настоящей работе предложены новые методы построения точных решений КГД системы для слабосжимаемой вязкой жидкости и ее стоксовского приближения. Показано, что известный метод комплексных гидродинамических потенциалов Эйлера–Даламбера [10], [11] может эффективно применяться в теории КГД. Для квазигидродинамической системы в приближении Стокса доказаны теорема о диссипации полной кинетической энергии и теорема о единственности классического решения основной начально-краевой задачи.

1. Квазигидродинамическая система для вязкой слабосжимаемой жидкости

Квазигидродинамическая система, описывающая движения слабосжимаемой вязкой жидкости без учета внешних массовых сил, является диссипативной [4], [5], [8] и может быть записана в следующем дивергентном виде:

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = \mathrm{div}\ \vec{w}, \tag{1.1}$$

$$\rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho\ \mathrm{div}\ (\vec{u}\otimes\vec{u}) + \nabla p = 2\eta\ \mathrm{div}\ \widehat{\sigma} + \rho\ \mathrm{div}\ \big[(\vec{w}\otimes\vec{u}) + (\vec{u}\otimes\vec{w})\big]. \tag{1.2}$$

Здесь символом $\widehat{\sigma}$ обозначен тензор скоростей деформаций:

$$\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\big[(\nabla\otimes\vec{u}) + (\nabla\otimes\vec{u})^T\big]. \tag{1.3}$$

Вектор $\vec{w}$, связанный с вектором плотности потока массы $\vec{j}_m$ соотношением $\vec{j}_m = \rho\big(\vec{u}-\vec{w}\big)$, вычисляется с помощью выражения

$$\vec{w} = \tau\Big((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p\Big). \tag{1.4}$$

Плотность ρ, коэффициент динамической вязкости η и характерное время релаксации τ считаются заданными положительными константами. Релаксационный параметр τ определяется по формуле

$$\tau = \frac{\eta}{\rho\ c_s^2}, \tag{1.5}$$

где c_s – известная скорость звука в среде. В записи системы (1.1) – (1.5), замкнутой относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$, использованы стандартные обозначения из тензорного анализа. Например, диада $(\vec{u}\otimes\vec{w})$ представляет собой тензор–инвариант второго ранга, полученный как прямое тензорное произведение двух векторов $\vec{u}$ и $\vec{w}$. В пределе при $c_s \to +\infty$ КГД система переходит в классическую систему Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости.

Без ограничения общности положим ρ равной единице и выпишем КГД систему для случая плоских установившихся течений:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y}, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial(u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y u_x)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} =$$
$$= 2\frac{\partial}{\partial x}\Big(\eta\frac{\partial u_x}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\eta\frac{\partial u_x}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\eta\frac{\partial u_y}{\partial x}\Big) +$$
$$+2\frac{\partial(u_x w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u_x w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u_y w_x)}{\partial y}, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial(u_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y^2)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\eta\frac{\partial u_y}{\partial x}\Big) + 2\frac{\partial}{\partial y}\Big(\eta\frac{\partial u_y}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\eta\frac{\partial u_x}{\partial y}\Big) +$$
$$+\frac{\partial(u_y w_x)}{\partial x} + 2\frac{\partial(u_y w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u_x w_y)}{\partial x}. \tag{1.8}$$

Здесь

$$w_x = \tau\Big(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x}\Big), \tag{1.9}$$

$$w_y = \tau\Big(u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y}\Big). \tag{1.10}$$

Функции $u_x = u_x(x, y)$, $u_y = u_y(x, y)$ и $p = p(x, y)$ подлежат определению.

2. Построение решений стационарных квазигидродинамических уравнений с помощью аналитических функций (метод Эйлера–Даламбера)

Будем искать частные решения системы (1.6) – (1.10), удовлетворяющие условиям Эйлера–Даламбера

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0. \tag{2.2}$$

Таким образом, векторное поле $\vec{u} = (u_x, u_y)$ считается соленоидальным, а его завихренность

$$\omega = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

равна нулю. Из (2.1), (2.2) следует, что

$$\Delta u_x = 0, \quad \Delta u_y = 0, \tag{2.3}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – двумерный оператор Лапласа.

Теперь потребуем, чтобы

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{2.4}$$

$$u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \tag{2.5}$$

Поскольку τ есть положительная постоянная, последнее означает, что

$$w_x = 0, \quad w_y = 0. \tag{2.6}$$

Пусть V – односвязная область на плоскости $\mathbb{R}^2_{x,y}$. Выберем произвольно две точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), принадлежащие V, и соединим их кусочно-гладкой кривой γ, целиком лежащей в V. Принимая во внимание (2.4), (2.5) и (2.2), вычислим

$$p(x_1, y_1) = p(x_0, y_0) + \int\limits_\gamma dp = p(x_0, y_0) + \int\limits_\gamma \Big(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy\Big) =$$

$$= p(x_0, y_0) - \int\limits_\gamma \left(\Big(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}\Big) dx + \Big(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}\Big) dy\right) =$$

$$= p(x_0, y_0) - \int\limits_\gamma \left(\Big(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial x}\Big) dx + \Big(u_x \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}\Big) dy\right) =$$

$$= p(x_0, y_0) - \int\limits_\gamma \Big(u_x\ d(u_x) + u_y\ d(u_y)\Big) = p(x_0, y_0) - \frac{1}{2} \int\limits_\gamma d\Big(u_x^2 + u_y^2\Big) =$$

$$= p(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\big(u_x^2(x_0, y_0) + u_y^2(x_0, y_0)\big) -$$

$$- \frac{1}{2}\big(u_x^2(x_1, y_1) + u_y^2(x_1, y_1)\big). \tag{2.7}$$

Формально полагая $(x_1, y_1) = (x, y)$ в (2.7), можно найти давление $p = p(x, y)$, если известны компоненты скорости $u_x = u_x(x, y)$ и $u_y = u_y(x, y)$:

$$p = p(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\big(u_x^2(x_0, y_0) + u_y^2(x_0, y_0)\big) - \frac{1}{2}\big(u_x^2 + u_y^2\big). \tag{2.8}$$

Введем функцию тока Ψ и потенциал поля скорости Φ по формулам

$$\Psi(x_1, y_1) = \Psi(x_0, y_0) + \int\limits_\gamma \big(-u_y\ dx + u_x\ dy\big), \tag{2.9}$$

$$\Phi(x_1, y_1) = \Phi(x_0, y_0) + \int\limits_\gamma \big(u_x\ dx + u_y\ dy\big). \tag{2.10}$$

Из формулы Грина и (2.1), (2.2) вытекает, что криволинейные интегралы второго рода (2.9) и (2.10) не зависят от пути интегрирования γ и данные определения корректны. Кроме того,

$$u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \tag{2.11}$$

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tag{2.12}$$

и выполняются условия Коши–Римана

$$\frac{\partial \varPhi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varPhi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{2.13}$$

Пусть $z = x + iy$, где i – мнимая единица. Введем комплексный потенциал течения

$$f(z) = \varPhi(x, y) + i\Psi(x, y). \tag{2.14}$$

В силу (2.13) потенциал $f(z)$ есть однозначная аналитическая (голоморфная) функция в односвязной области V. Если же область V не является односвязной, то $f(z)$ может оказаться многозначной аналитической функцией.

Покажем, что каждая аналитическая функция $f(z)$ порождает некоторое точное решение (u_x, u_y, p) квазигидродинамической системы (1.6) – (1.10). Действительно, зная $f(z)$, можно с помощью (2.14) определить функции $\varPhi = \varPhi(x, y)$, $\Psi = \Psi(x, y)$, а затем по формулам (2.11) или (2.12) найти компоненты скорости $u_x = u_x(x, y)$ и $u_y = u_y(x, y)$. Равенство (2.8) позволяет вычислить давление $p = p(x, y)$.

Осталось доказать, что тройка (u_x, u_y, p) образует точное решение (1.6) – (1.10). В силу (2.1), (2.6) уравнение (1.6) удовлетворяется тождественно. Представим (1.7), (1.8) в эквивалентном виде

$$\begin{gathered} u_x\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\Big) + \frac{w_x}{\tau} = \eta\Big[\Delta u_x + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\Big)\Big] + \\ +2\frac{\partial(u_x w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u_x w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u_y w_x)}{\partial y}, \end{gathered} \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered} u_y\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\Big) + \frac{w_y}{\tau} = \eta\Big[\Delta u_y + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\Big)\Big] + \\ +\frac{\partial(u_y w_x)}{\partial x} + 2\frac{\partial(u_y w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u_x w_y)}{\partial x}. \end{gathered} \tag{2.16}$$

Принимая во внимание (2.1), (2.3) и (2.6), приходим к заключению о том, что равенства (2.15), (2.16) выполняются на решении (u_x, u_y, p). Нетрудно проверить, что (u_x, u_y, p) является также точным решением соответствующих систем Эйлера и Навье–Стокса.

Рассмотрим некоторые известные примеры, иллюстрирующие возможности предложенного подхода.

Пример 1. *Однородный поток жидкости.* Пусть

$$f(z) = \overline{A}z \tag{2.17}$$

– голоморфная на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функция. Здесь $A = A_x + iA_y$ – заданное комплексное число, $\overline{A} = A_x - iA_y$ – его сопряжение, $A_x \in \mathbb{R}$, $A_y \in \mathbb{R}$. Запишем $f(z)$ в виде

$$f(z) = (A_x - iA_y)(x + iy) = (xA_x + yA_y) + i(yA_x - xA_y) = \varPhi(x, y) + i\Psi(x, y),$$

где

$$\varPhi(x, y) = xA_x + yA_y, \quad \Psi(x, y) = yA_x - xA_y.$$

Отсюда с помощью (2.12) находим

$$u_x = A_x, \quad u_y = A_y. \tag{2.18}$$

Соотношение (2.8) дает

$$p = p_0 = const. \tag{2.19}$$

Точное решение (2.18), (2.19) КГД системы (1.6) – (1.10) описывает однородный стационарный поток жидкости со скоростью $\vec{A} = (A_x, A_y)$.

Пример 2. *Течение от точечного источника (стока) массы.* Рассмотрим аналитическую функцию

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{Ln} z, \quad z \neq 0. \tag{2.20}$$

Определим компоненты вектора скорости с помощью известной (см. [11] , с. 62) формулы

$$u_x + iu_y = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \overline{f'(z)}.$$

Будем иметь

$$u_x = \frac{Q}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}, \quad u_y = \frac{Q}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}. \tag{2.21}$$

Из (2.8) находим распределение давления:

$$p = p_\infty - \frac{Q^2}{8\pi^2}\frac{1}{x^2+y^2}, \tag{2.22}$$

где $p_\infty = const$. Точное решение (2.21), (2.22) системы КГД в области $V = \{(x,y) : x^2+y^2 > 0\}$ отвечает точечному источнику (стоку) массы интенсивности Q.

Пример 3. *Точечный вихрь.* Для аналитической функции

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z, \quad z \neq 0, \tag{2.23}$$

составляющие вектора скорости имеют вид

$$u_x = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}, \quad u_y = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}. \tag{2.24}$$

Распределение давления выглядит следующим образом:

$$p = p_\infty - \frac{\Gamma^2}{8\pi^2}\frac{1}{x^2+y^2}. \tag{2.25}$$

Точное решение (2.24), (2.25) квазигидродинамической системы в области $V = \{(x,y) : \ x^2+y^2 > 0\}$ описывает точечный вихрь интенсивности Γ, вращающийся против часовой стрелки. Аналогично можно построить другие точные решения КГД системы, порождаемые аналитическими функциями, например, в задачах о вихреисточнике и точечном диполе с заданным моментом [10], [11].

3. Общие точные решения уравнений Навье–Стокса и квазигидродинамических уравнений

Выпишем классическую систему Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в недивергентной форме без учета внешних сил:

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = 0, \tag{3.1}$$

$$\rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p = \eta\Delta\vec{u}. \tag{3.2}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа. Пусть V – односвязная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$, $T > 0$, $\Omega = V\times(0,\ T)$ – область в $\mathbb{R}^4_{\vec{x},t}$. Будем рассматривать гладкие в Ω (например, бесконечно-дифференцируемые) решения $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},t)$, $p = p(\vec{x},t)$ системы (3.1) – (3.2).

Теорема 1. *Пусть* $(\vec{u},p) = (\vec{u}(\vec{x},t), p(\vec{x},t))$ *– решение системы Навье–Стокса* (3.1) – (3.2) *в области* Ω *и выполнено условие*

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\big[(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\big] = \eta\big[(\Delta\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\Delta\vec{u}\big]. \tag{3.3}$$

Тогда $(\vec{u},p)$ *есть решение квазигидродинамической системы* (1.1) – (1.2).

Доказательство. Пусть $(\vec{u},p)$ – решение системы Навье–Стокса (3.1) – (3.2). Подставим его в систему. Подействуем оператором div на обе части (3.2) и учтем (3.1). Получим равенство

$$\mathrm{div}\ \big(\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p\big) = 0,$$

которое перепишем в равносильной форме

$$\mathrm{div}\ \vec{w} = 0. \tag{3.4}$$

Из (3.1) и (3.4) вытекает, что уравнение (1.1) удовлетворяется тождественно.

Принимая во внимание обозначение (1.4), представим (1.2), (3.2) следующим образом:

$$\rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho\vec{u}\ \mathrm{div}\ \vec{u} + \rho\frac{\vec{w}}{\tau} = \eta\Delta\vec{u} + \eta\nabla(\mathrm{div}\ \vec{u}) +$$
$$+\rho\vec{u}\ \mathrm{div}\ \vec{w} + \rho\vec{w}\ \mathrm{div}\ \vec{u} + \rho(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{u} + \rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{w}, \tag{3.5}$$

$$\rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho\frac{\vec{w}}{\tau} = \eta\Delta\vec{u}. \tag{3.6}$$

Подстановка (3.1), (3.4), (3.6) в (3.5) дает

$$(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{w} = 0. \tag{3.7}$$

Из (3.6) находим

$$\vec{w} = \frac{\tau}{\rho}\Big(\eta\Delta\vec{u} - \rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\Big). \tag{3.8}$$

Комбинация (3.7) и (3.8) приводит к соотношению

$$\eta\big[(\Delta\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}+(\vec{u}\cdot\nabla)\Delta\vec{u}\big]-\rho\Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\cdot\nabla\Big)\vec{u}-\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}=0,$$

которое может быть записано в эквивалентном виде (3.3). ■

Пример 4. *Течение Куэтта–Пуазейля.* Система Навье–Стокса (3.1) – (3.2) для плоских установившихся течений и при $\rho=1$ имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0, \tag{3.9}$$

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}=\eta\Big(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\Big), \tag{3.10}$$

$$u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}=\eta\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\Big). \tag{3.11}$$

В рассматриваемом случае условие (3.3) выглядит следующим образом:

$$(\Delta u_x)\frac{\partial u_x}{\partial x}+(\Delta u_y)\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_x\frac{\partial(\Delta u_x)}{\partial x}+u_y\frac{\partial(\Delta u_x)}{\partial y}=0, \tag{3.12}$$

$$(\Delta u_x)\frac{\partial u_y}{\partial x}+(\Delta u_y)\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_x\frac{\partial(\Delta u_y)}{\partial x}+u_y\frac{\partial(\Delta u_y)}{\partial y}=0, \tag{3.13}$$

где $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ – двумерный оператор Лапласа. Набор функций

$$u_x=\frac{A}{2\eta}y^2+c_1y+c_2,\quad u_y=0,\quad p=Ax+B \tag{3.14}$$

дает точное решение (3.9) – (3.11). Здесь A, B, c_1, c_2 – произвольные постоянные. Имеем

$$\Delta u_x=\frac{A}{\eta},\quad \Delta u_y=0. \tag{3.15}$$

При подстановке (3.14), (3.15) в (3.12), (3.13) получаются истинные равенства. Согласно теореме 1 тройка функций (3.14) образует точное решение квазигидродинамической системы (1.6) – (1.10). Если

$$A=\frac{p_2-p_1}{L},\quad B=p_1,\quad c_1=\frac{p_1-p_2}{2\eta L}H+\frac{U}{H},\quad c_2=0,$$

то зависимости (3.14) принимают вид

$$u_x=\frac{p_1-p_2}{2\eta L}y(H-y)+\frac{U}{H}y,\quad u_y=0,\quad p=\Big(1-\frac{x}{L}\Big)p_1+\frac{x}{L}p_2. \tag{3.16}$$

Формулы (3.16) описывают известное течение Куэтта–Пуазейля между двумя параллельными бесконечными плоскими пластинами с координатами $y=0$ и $y=H$ соответственно, находящимися на расстоянии $H>0$ друг от друга. Нижняя пластина неподвижна, а верхняя перемещается с постоянной скоростью U параллельно оси абсцисс. Значения давления при $x_1=0$ и $x_2=L>0$ соответственно равны p_1 и p_2. Для поля скорости $\vec{u} = (u_x, u_y)$ на нижней и верхней ограничивающих плоскостях выполнены условия прилипания.

Примеры других точных физически адекватных решений, общих для систем Навье–Стокса и КГД, можно найти в [4], [5], [8].

4. Квазигидродинамическая система в приближении Стокса. Теорема о диссипации кинетической энергии. Единственность решения начально–краевой задачи

Квазигидродинамическая система в приближении Стокса была выведена в [4], [5]. Без учета внешних массовых сил она имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{u} = \tau \Delta p, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla p = 2\eta \operatorname{div} \widehat{\sigma}. \tag{4.2}$$

Здесь

$$\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\big[(\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T\big]$$

– тензор скоростей деформаций, Δ – трехмерный оператор Лапласа, ∇ – оператор Гамильтона. Коэффициент динамической вязкости η и характерное время релаксации τ считаются заданными положительными константами, причем τ определяется с помощью выражения (1.5). Постоянная средняя плотность жидкости ρ положена равной единице. Система (4.1) – (4.2) замкнута относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$.

Пусть V – ограниченная односвязная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ с кусочно-гладкой границей ∂V, $\overline{V} = V \cup \partial V$ – ее замыкание, $\vec{n} = \vec{n}(\vec{x})$ – вектор внешней единичной нормали к ∂V в точке $\vec{x} \in \partial V$, $Q = V \times [0,\ T]$ – ограниченный или неограниченный цилиндр в $\mathbb{R}^3_{\vec{x}} \times \mathbb{R}_t$, $\overline{Q} = \overline{V} \times [0,\ T]$ – его замыкание, T – заданное положительное число или символ $+\infty$ соответственно. Параметр $t \in [0,\ T]$ будем интерпретировать как время. Дополним систему (4.1) – (4.2) начальным условием

$$\vec{u}\Big|_{t=0} = \vec{u}_0(\vec{x}), \qquad \vec{x} \in \overline{V}, \tag{4.3}$$

граничными условиями

$$\vec{u}\Big|_{\partial V} = \vec{0}, \qquad \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial V} = 0, \qquad t \in [0,\ T], \tag{4.4}$$

а также условием нормировки

$$\int\limits_V p\, dV = 0, \qquad t \in [0,\ T]. \tag{4.5}$$

Символом $C^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$, где α – натуральное число, обозначим совокупность непрерывных в Q функций $f = f(\vec{x}, t)$, имеющих непрерывные в Q частные производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3} \partial t^{\beta}}$$

для любых целых и неотрицательных чисел α_1, α_2, α_3 и β, подчиняющихся неравенству $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\beta\leqslant 2\alpha$. Класс $\mathbf{C}^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$ состоит из вектор–функций $\vec{f}=\vec{f}(\vec{x},t)=(f_1(\vec{x},t),f_2(\vec{x},t),f_3(\vec{x},t))$, каждая компонента f_i которых принадлежит $C^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$.

Символом $C^{\alpha,0}_{\vec{x},t}(Q)$, где α – натуральное число, обозначим класс всех непрерывных в Q функций $f=f(\vec{x},t)$, у которых существуют непрерывные в Q производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}}$$

при любых целых неотрицательных α_1, α_2, α_3, таких, что $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\leqslant\alpha$.

Определение. *Решением начально–краевой задачи* $(4.1)-(4.5)$*, назовем функции* $\vec{u}=\vec{u}(\vec{x},\ t)\in\boldsymbol{C}^{2,1}_{\vec{x},t}(Q)\cap\boldsymbol{C}^1(\overline{Q})$, $p=p(\vec{x},\ t)\in C^{2,0}_{\vec{x},t}(Q)\cap C^{1,0}_{\vec{x},t}(\overline{Q})$*, удовлетворяющие при всех* $(\vec{x},\ t)\in Q$ *уравнениям* $(4.1)-(4.2)$*, а также условиям* $(4.3)-(4.5)$.

Изучим свойства решения поставленной начально-краевой задачи, считая, что при некоторых $\vec{u}_0(\vec{x})$ оно существует. Сначала покажем, что система (4.1) – (4.2) является диссипативной и для нее может быть выведено уравнение баланса кинетической энергии с неотрицательной диссипативной функцией. Пусть

$$(\widehat{\sigma}:\widehat{\sigma})=\sum_{i,j=1}^{3}\ \sigma_{ij}^2=\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{3}\ \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)^2$$

– двойное скалярное произведение двух одинаковых тензоров. Справедлива

Теорема 2. *На любом решении системы* $(4.1)-(4.2)$ *выполняется уравнение баланса кинетической энергии*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big)+\mathrm{div}\ \Big(p\vec{u}-\tau p\nabla p-2\eta\big(\widehat{\sigma}\cdot\vec{u}\big)\Big)=-\varPhi, \tag{4.6}$$

в котором

$$\varPhi=2\eta\big(\widehat{\sigma}:\widehat{\sigma}\big)+\tau(\nabla p)^2 \tag{4.7}$$

– неотрицательная диссипативная функция.

Доказательство. Умножим обе части равенства (4.2) скалярно на вектор $\vec{u}$. Это дает

$$\vec{u}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla p=2\eta\ \vec{u}\cdot\ \mathrm{div}\ \widehat{\sigma}. \tag{4.8}$$

Преобразуем некоторые члены, входящие в (4.8):

$$\vec{u}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{u}\cdot\vec{u})=\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big), \tag{4.9}$$

$$\vec{u}\cdot\ \mathrm{div}\ \widehat{\sigma}=\sum_{i=1}^{3}\ u_i\ \sum_{j=1}^{3}\ \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}=\sum_{i,j=1}^{3}\ u_i\ \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{3}\ \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}u_i)-\sum_{i,j=1}^{3}\ \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_{i=1}^{3} \sigma_{ij} u_i\Big) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) =$$

$$= \ \mathrm{div}\ \big(\widehat{\sigma} \cdot \vec{u}\big) - \big(\widehat{\sigma} : \widehat{\sigma}\big). \tag{4.10}$$

Здесь учтена симметричность матрицы σ_{ij}. Подставив (4.9) – (4.10) в (4.8), будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big) + \vec{u} \cdot \nabla p - 2\eta\ \mathrm{div}\ \big(\widehat{\sigma} \cdot \vec{u}\big) = -2\eta\big(\widehat{\sigma} : \widehat{\sigma}\big). \tag{4.11}$$

Умножив теперь обе части (4.1) на p, преобразуем результат к виду

$$p\ \mathrm{div}\ \vec{u} = \tau \mathrm{div}\ \big(p\nabla p\big) - \tau(\nabla p)^2. \tag{4.12}$$

Складывая (4.11), (4.12) и принимая во внимание (4.7), получим (4.6).■

Для любого $t \in [0,\ T]$ на решении поставленной начально–краевой задачи определим полную кинетическую энергию жидкости в объеме

$$E(t) = \frac{1}{2} \int\limits_V \vec{u}^2\ dV. \tag{4.13}$$

Имеет место следующая теорема о диссипации кинетической энергии.

Теорема 3. *Пусть $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$, $p = p(\vec{x}, t)$ – решение начально-краевой задачи* (4.1) – (4.5). *Тогда полная кинетическая энергия жидкости $E(t)$ является функцией класса $C^1([0,T])$ и при каждом $t \in [0,T]$ выполняется неравенство*

$$\frac{dE(t)}{dt} \leqslant 0. \tag{4.14}$$

Доказательство. Пусть $(\vec{u}, p)$ – решение начально–краевой задачи (4.1) – (4.5). Подставив его в (4.6), проинтегрируем полученное равенство по множеству V. Принимая во внимание правило Лейбница и формулу Гаусса–Остроградского (см., например, [8]), будем иметь

$$\frac{dE(t)}{dt} + \iint\limits_{\partial V} (\vec{A} \cdot \vec{n})\ dS = -\int\limits_V \varPhi\ dV. \tag{4.15}$$

При этом $E(t) \in C^1([0,T])$. Векторное поле

$$\vec{A} = p\vec{u} - \tau p \nabla p - 2\eta\big(\widehat{\sigma} \cdot \vec{u}\big)$$

при фиксированном t непрерывно дифференцируемо в V и непрерывно в $\overline{V}$. Из свойств гладкости решения $(\vec{u}, p)$ и краевых условий (4.4) следует, что поверхностный интеграл второго рода в левой части (4.15) равен нулю. Поэтому

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\int\limits_V \varPhi\ dV. \tag{4.16}$$

Неравенство (4.14) следует из (4.16), если учесть неотрицательность диссипативной функции Φ. ■

Теорема 4. *На решении начально-краевой задачи* (4.1) – (4.5) *при любом* $t \in [0, T]$ *выполняются неравенства*

$$\frac{dE(t)}{dt} + ME(t) \leqslant 0 \tag{4.17}$$

и

$$\frac{dJ(t)}{dt} \leqslant 0, \tag{4.18}$$

где $J(t) = E(t)e^{Mt}$, M *– положительная константа.*

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств и неравенств

$$-\frac{dE(t)}{dt} = \int\limits_V \Phi\ dV = 2\eta \int\limits_V (\widehat{\sigma} : \widehat{\sigma})\ dV + \tau \int\limits_V (\nabla p)^2\ dV \geqslant$$

$$\geqslant 2\eta \int\limits_V (\widehat{\sigma} : \widehat{\sigma})\ dV \geqslant \eta \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2\ dV \geqslant \frac{\eta}{c_F} \int\limits_V \vec{u}^2\ dV = \frac{2\eta}{c_F} E(t). \tag{4.19}$$

Здесь были использованы неравенство Корна

$$\frac{1}{2} \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2\ dV \leqslant \int\limits_V \big(\widehat{\sigma}(\vec{u}) : \widehat{\sigma}(\vec{u})\big)\ dV$$

и неравенство Фридрихса

$$\int\limits_V \vec{u}^2\ dV \leqslant c_F \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2\ dV,$$

которые выполняются для вектор-функций $\vec{u}$ класса $\mathbf{C}^2(V) \cap \mathbf{C}^1(\overline{V})$, обращающихся в нуль на ∂V. Здесь c_F – положительная константа, зависящая только от геометрических характеристик V. Полагая $M = (2\eta)/c_F$, из (4.19) выводим (4.17).

Представим теперь (4.17) в эквивалентном виде

$$e^{-Mt} \frac{dJ(t)}{dt} \leqslant 0. \tag{4.20}$$

Неравенство (4.18) вытекает из (4.20), поскольку экспонента принимает только положительные значения. ■

Следствие 1. *На промежутке* $[0, T]$ *функция* $J(t)$ *является невозрастающей.*

Следствие 2. *При любом* $t \in [0, T]$ *выполняется неравенство*

$$E(t) \leqslant E(0)e^{-Mt}. \tag{4.21}$$

Следствие 3. *При* $T = +\infty$ *полная кинетическая энергия* $E(t)$ *убывает на промежутке* $[0,\ +\infty)$ *и стремится к нулю при* $t \to +\infty$.

Интегрируя (4.21) на множестве $[0,\ T]$, получим неравенство

$$\int\limits_0^T E(t)\ dt \leqslant \frac{E(0)}{M}\Big(1 - e^{-MT}\Big), \tag{4.22}$$

которое можно представить в эквивалентном виде

$$\int\limits_Q \vec{u}^2\ dV dt \leqslant \frac{1}{M}\Big(1 - e^{-MT}\Big)\int\limits_V \vec{u}_0^2\ dV. \tag{4.23}$$

В частности,

$$\int\limits_Q \vec{u}^2\ dV dt \leqslant \frac{1}{M}\int\limits_V \vec{u}_0^2\ dV \tag{4.24}$$

при любом конечном или бесконечном T.

Проинтегрируем теперь (4.16) по промежутку $[0,\ T]$:

$$E(0) - E(T) = \int\limits_0^T dt \int\limits_V \varPhi\ dV = \int\limits_Q \varPhi\ dV\ dt =$$

$$= \int\limits_Q \Big(2\eta\big(\widehat{\sigma} : \widehat{\sigma}\big) + \tau(\nabla p)^2\Big)\ dV\ dt \geqslant \tau \int\limits_Q (\nabla p)^2\ dV\ dt. \tag{4.25}$$

Из (4.25) находим

$$\int\limits_Q (\nabla p)^2\ dV\ dt \leqslant \frac{1}{\tau}\big(E(0) - E(T)\big) \leqslant \frac{E(0)}{\tau}.$$

Отсюда

$$\int\limits_Q (\nabla p)^2\ dV\ dt \leqslant \frac{1}{2\tau}\int\limits_V \vec{u}_0^2\ dV. \tag{4.26}$$

В силу условия нормировки (4.5), неравенство Пуанкаре для функции p имеет вид

$$\int\limits_V p^2\ dV \leqslant c_P \int\limits_V (\nabla p)^2\ dV, \tag{4.27}$$

где c_P – положительная постоянная, зависящая только от геометрических характеристик V. Интегрирование (4.27) по множеству $[0,\ T]$ дает

$$\int\limits_Q p^2\ dV\ dt \leqslant c_P \int\limits_Q (\nabla p)^2\ dV\ dt. \tag{4.28}$$

Из (4.26) и (4.28) находим

$$\int\limits_Q p^2\ dV\ dt \leqslant \frac{c_P}{2\tau} \int\limits_V \vec{u}_0^2\ dV. \tag{4.29}$$

Энергетические оценки (4.22) – (4.24), включающие скорость $\vec{u}$, справедливы и на решениях аналогично поставленной задачи для классической нестационарной системы Стокса. Содержащие p неравенства (4.26), (4.29) специфичны для КГД системы (4.1) – (4.2) и является следствием более сложной структуры диссипативного функционала Φ.

Теорема 5. *Решение начально-краевой задачи* (4.1) – (4.5) *является единственным.*

Доказательство. В силу линейности задачи (4.1) – (4.5) достаточно показать, что при условии $\vec{u}_0(\vec{x}) = \vec{0}$, $\vec{x} \in \overline{V}$ квазигидродинамическая система в приближении Стокса имеет только тривиальное решение $\vec{u} = \vec{0}$, $p = 0$. Последнее вытекает из неравенств (4.24), (4.29). ■

Открытой остается

Проблема (Шеретов Ю.В.). *Доказать существование решения (в классическом или обобщенном смысле) начально-краевой задачи* (4.1) – (4.5).

5. Двойственная квазигидродинамическая система в приближении Стокса

Стоксовское приближение квазигидродинамической системы для плоских нестационарных течений имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \tau\Big(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\Big), \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \eta\Big(2\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x}\Big), \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = \eta\Big(2\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y}\Big). \tag{5.3}$$

Здесь $u_x = u_x(x, y, t)$ и $u_y = u_y(x, y, t)$ – проекции вектора скорости на оси ox и oy декартовой системы координат, $p = p(x, y, t)$ – давление, η и τ – заданные положительные постоянные, интерпретируемые как коэффициент кинематической вязкости и характерное время релаксации соответственно. При $\tau \to 0$ система (5.1) – (5.3) переходит в классическую нестационарную систему Стокса.

Пусть (u_x, u_y, p) – решение системы (5.1) – (5.3), компоненты которого являются достаточно гладкими (например, бесконечно дифференцируемыми) функциями пространственных координат и времени. Подставим его в указанную систему. Преобразуем равенство (5.1) к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(u_x - \tau\frac{\partial p}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(u_y - \tau\frac{\partial p}{\partial y}\Big) = 0. \tag{5.4}$$

Воспользовавшись (5.4), в любой момент времени $t \geqslant 0$ на плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2_{x,y}$ определим функцию тока $\psi = \psi(x, y, t)$, которая связана с компонентами скорости и частными производными от давления посредством соотношений

$$u_x - \tau \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \tag{5.5}$$

$$-u_y + \tau \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{5.6}$$

С помощью выражений

$$\omega = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}, \tag{5.7}$$

$$\xi = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \tag{5.8}$$

определим вихрь и дивергенцию векторного поля $\vec{u} = (u_x, u_y)$. Продифференцируем (5.5) по y, а (5.6) по x, затем сложим полученные равенства. Принимая во внимание теорему Шварца о равенстве смешанных производных и определение (5.7), получим уравнение

$$\Delta\psi = -\omega. \tag{5.9}$$

Следствием (5.1), (5.8) является соотношение

$$\Delta p = \frac{\xi}{\tau}. \tag{5.10}$$

Запишем (5.2), (5.3) в эквивалентной форме

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \eta\Big(\Delta u_x + \frac{\partial \xi}{\partial x}\Big), \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = \eta\Big(\Delta u_y + \frac{\partial \xi}{\partial y}\Big). \tag{5.12}$$

Из продифференцированного по переменной x равенства (5.12) вычтем равенство (5.11), продифференцированное по y. Учитывая определение (5.7), находим

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \eta\Delta\omega. \tag{5.13}$$

Теперь сложим равенства (5.11) и (5.12), продифференцированные по переменным x и y соответственно. Получим тождество

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \Delta p = 2\eta\Delta\xi,$$

которое с помощью (5.10) может быть преобразовано к виду

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\xi}{\tau} = 2\eta\Delta\xi. \tag{5.14}$$

Система из четырех уравнений (5.13), (5.14), (5.9), (5.10) включает четыре неизвестные функции $\omega = \omega(x, y, t)$, $\xi = \xi(x, y, t)$, $\psi = \psi(x, y, t)$, $p = p(x, y, t)$. Всякое гладкое решение (u_x, u_y, p) системы (5.1) – (5.3) порождает некоторое гладкое решение (ω, ξ, ψ, p) системы (5.13), (5.14), (5.9), (5.10).

Теорема 6. *Пусть* (ω, ξ, ψ, p) – *бесконечно дифференцируемое решение системы* (5.13), (5.14), (5.9), (5.10), *причем все частные производные функций* ψ *и* p *первого и высших порядков по переменным* x, y *и* t *стремятся к нулю при* $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to +\infty$. *Тогда тройка функций* (u_x, u_y, p), *где*

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \tau \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{5.15}$$

$$u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} + \tau \frac{\partial p}{\partial y}, \tag{5.16}$$

образует решение системы (5.1) – (5.3).

Доказательство. Из (5.15), (5.16) следует, что функции u_x, u_y и p удовлетворяют уравнению (5.1). Подействуем теперь оператором Лапласа Δ на обе части равенств (5.15), (5.16). Принимая во внимание формулы (5.9), (5.10), преобразуем найденные соотношения к виду

$$\Delta u_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y}, \tag{5.17}$$

$$\Delta u_y = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}. \tag{5.18}$$

Продифференцируем (5.17) и (5.18) по t:

$$\Delta\Big(\frac{\partial u_x}{\partial t}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial t}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial \omega}{\partial t}\Big), \tag{5.19}$$

$$\Delta\Big(\frac{\partial u_y}{\partial t}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial \omega}{\partial t}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial t}\Big). \tag{5.20}$$

Исключим в (5.19), (5.20) производные $\partial\omega/\partial t$ и $\partial\xi/\partial t$, используя (5.13), (5.14). Если учесть формулы (5.7) – (5.10), то получим

$$\Delta\Big[\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - \eta\Big(2\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x}\Big)\Big] = 0,$$

$$\Delta\Big[\frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} - \eta\Big(2\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y}\Big)\Big] = 0.$$

Итак, в любой фиксированный момент времени t функции

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - \eta\Big(2\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x}\Big), \tag{5.21}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} - \eta\Big(2\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y}\Big) \tag{5.22}$$

являются гармоническими. Кроме того, они ограничены на $\mathbb{R}^2$. Но любая гармоническая и ограниченная на всей плоскости функция является постоянной (см. [10], с. 191). Поскольку все члены в (5.21), (5.22) стремятся к нулю при $r \to +\infty$, эта константа в каждый момент времени равна нулю. Отсюда следует, что удовлетворяются уравнения (5.2), (5.3). Таким образом, решение (ω, ξ, ψ, p) системы (5.13), (5.14), (5.9), (5.10) с описанными выше свойствами порождает решение исходной системы (5.1) – (5.3). ■

Уравнение (5.14) преобразуем следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(e^{t/\tau}\xi\big) = 2\eta\Delta\big(e^{t/\tau}\xi\big). \tag{5.23}$$

Пусть

$$\zeta = e^{t/\tau}\xi. \tag{5.24}$$

С учетом обозначения (5.24) уравнения (5.10), (5.23) принимают вид

$$\Delta p = \frac{\zeta}{\tau}e^{-t/\tau}, \tag{5.25}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 2\eta\Delta\zeta. \tag{5.26}$$

Очевидно, что система (5.13), (5.26), (5.9), (5.25), которую назовем двойственной по отношению к (5.1) – (5.3), эквивалентна системе (5.13), (5.14), (5.9), (5.10). Двойственная система содержит два уравнения теплопроводности Фурье и два уравнения Пуассона, свойства которых хорошо изучены. Четыре входящие в нее функции $\omega = \omega(x,y,t)$, $\zeta = \zeta(x,y,t)$, $\psi = \psi(x,y,t)$, $p = p(x,y,t)$ подлежат определению.

6. Построение решений задач Коши для нестационарных квазигидродинамических уравнений в приближении Стокса

Дополним систему (5.1) – (5.3) начальными условиями

$$u_x\Big|_{t=0} = u_x^{(0)}(x,y), \quad u_y\Big|_{t=0} = u_y^{(0)}(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{6.1}$$

Здесь $u_x^{(0)} = u_x^{(0)}(x,y)$, $u_y^{(0)} = u_y^{(0)}(x,y)$ – заданные бесконечно дифференцируемые на плоскости $\mathbb{R}^2$ функции. Изложим метод построения решений задачи Коши (5.1) – (5.3), (6.1).

Предположим, что при произвольном $t \geqslant 0$ и $r = \sqrt{x^2+y^2} \to +\infty$ выполняются условия

$$u_x \to 0, \quad u_y \to 0$$

и частные производные всех порядков от функций u_x, u_y и p стремятся к нулю при $r \to +\infty$. Вычислим

$$\omega_0(x,y) = \frac{\partial u_y^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial y}, \quad \xi_0(x,y) = \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(0)}}{\partial y}.$$

Из (5.24) вытекает равенство $\zeta_0(x,y) = \xi_0(x,y)$. Дополним двойственную систему начальными условиями

$$\omega\Big|_{t=0} = \omega_0(x,y), \tag{6.2}$$

$$\zeta\Big|_{t=0} = \zeta_0(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{6.3}$$

Формальное решение задачи Коши (5.13), (5.26), (5.9), (5.25), (6.2), (6.3) может быть найдено с помощью известных из курсов математической физики (см. [11], [12]) формул:

$$\omega(x,y,t) = \frac{1}{4\eta\pi t} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x_*,y_*)\, e^{-\dfrac{(x_*-x)^2+(y_*-y)^2}{4\eta t}} dx_* dy_*, \tag{6.4}$$

$$\zeta(x,y,t) = \frac{1}{8\eta\pi t} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \zeta_0(x_*,y_*)\, e^{-\dfrac{(x_*-x)^2+(y_*-y)^2}{8\eta t}} dx_* dy_*, \tag{6.5}$$

$$\psi(x,y,t) = \psi_0(x,y,t) - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \omega(x_*,y_*,t)\ \ln\big[(x_*-x)^2+(y_*-y)^2\big] dx_* dy_*, \tag{6.6}$$

$$p(x,y,t) = p_0(x,y,t) + \frac{e^{-t/\tau}}{4\pi\tau} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \zeta(x_*,y_*,t)\ \ln\big[(x_*-x)^2+(y_*-y)^2\big] dx_* dy_*. \tag{6.7}$$

Здесь $\psi_0(x,y,t)$ и $p_0(x,y,t)$ – произвольные функции, являющиеся при каждом фиксированном $t \geqslant 0$ гармоническими на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, причем все их частные производные первого и высших порядков стремятся к нулю при $r \to +\infty$. Построенное решение имеет смысл только в том случае, когда все интегралы в правых частях (6.4) – (6.7) существуют.

Приведем примеры точных решений поставленной задачи Коши, которые могут быть построены с помощью двойственной КГД системы в приближении Стокса.

Пример 5. *Диффузия вихря с соленоидальным полем скорости.* Пусть

$$\omega_0(x,y) = \frac{\Gamma}{4\pi\eta t_0} e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\eta t_0}}, \tag{6.8}$$

$$\zeta_0(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{6.9}$$

Здесь Γ и t_0 – заданные положительные константы. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функция

$$\omega(x,y,t) = \frac{\Gamma}{4\pi\eta(t_0+t)} e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\eta(t_0+t)}} \tag{6.10}$$

является решением задачи Коши (5.13), (6.2). Введем полярные координаты (r,φ), связанные с декартовыми координатами (x,y) посредством соотношений

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Функция ω в этих переменных выглядит следующим образом:

$$\omega(r,t) = \frac{\Gamma}{4\pi\eta(t_0+t)} e^{-\dfrac{r^2}{4\eta(t_0+t)}}. \tag{6.11}$$

Запишем уравнение Пуассона (5.9) в полярных координатах, считая, что $\psi = \psi(r,t)$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial r}\Big) = -\omega(r,t). \tag{6.12}$$

Подставив (6.11) в (6.12), получим равенство

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial r}\Big) = -\frac{\Gamma}{4\pi\eta(t_0+t)}\; r e^{-\dfrac{r^2}{4\eta(t_0+t)}}. \tag{6.13}$$

Формально заменив переменную r на r_*, представим (6.13) в эквивалентном виде

$$\frac{\partial}{\partial r_*}\Big(r_*\frac{\partial\psi(r_*,t)}{\partial r_*}\Big) = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r_*} e^{-\dfrac{r_*^2}{4\eta(t_0+t)}}. \tag{6.14}$$

Проинтегрируем (6.14) по переменной r_* на отрезке $[0,\ r]$, принимая во внимание непрерывность функции $\partial\psi(r,t)/\partial r$ в точке $(0,t)$. Будем иметь

$$\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial r} = -\frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - e^{-\dfrac{r^2}{4\eta(t_0+t)}}\right). \tag{6.15}$$

Тем же способом из (6.15) находим

$$\psi(r,t) = \psi_0(t) - \frac{\Gamma}{2\pi}\int\limits_0^r \frac{1}{r_*}\left(1 - e^{-\dfrac{r_*^2}{4\eta(t_0+t)}}\right)dr_*. \tag{6.16}$$

Здесь $\psi_0(t)$ – произвольная функция времени. Переход в (6.16) от полярных к декартовым координатам дает

$$\psi(x,y,t) = \psi_0(t) - \frac{\Gamma}{2\pi}\int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{r_*}\left(1 - e^{-\dfrac{r_*^2}{4\eta(t_0+t)}}\right)dr_*. \tag{6.17}$$

Функции

$$\zeta(x,y,t) = 0, \tag{6.18}$$

$$p(x,y,t) = p_0(t), \tag{6.19}$$

где $p_0(t)$ – произвольная функция времени, удовлетворяют уравнениям (5.26), (5.25) и условию (6.3). Зависимости (6.10), (6.18), (6.17), (6.19) образуют решение (ω,ζ,ψ,p) поставленной задачи Коши для двойственной системы. Используя

(5.15), (5.16), (6.17), (6.19), строим решение

$$u_x = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\left(1-e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\eta(t_0+t)}}\right), \tag{6.20}$$

$$u_y = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\left(1-e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\eta(t_0+t)}}\right), \tag{6.21}$$

$$p = p_0(t) \tag{6.22}$$

системы (5.1) – (5.3), удовлетворяющее начальным условиям

$$u_x\Big|_{t=0} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\left(1-e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\eta t_0}}\right),$$

$$u_y\Big|_{t=0} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\left(1-e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\eta t_0}}\right).$$

Нетрудно проверить, что равенства (6.20) – (6.22) задают также точное решение классической нестационарной системы Стокса, поскольку векторное поле $\vec{u} = (u_x, u_y)$ является соленоидальным.

Пример 6. *Диффузия вихря с несоленоидальным полем скорости.* Предположим, что

$$\omega_0(x,y) = \frac{1}{4\pi\eta t_0}e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\eta t_0}},$$

$$\zeta_0(x,y) = \frac{1}{8\pi\eta t_0}e^{-\dfrac{x^2+y^2}{8\eta t_0}}, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Тем же способом строим решение двойственной системы с начальными условиями (6.2), (6.3):

$$\omega(x,y,t) = \frac{1}{4\pi\eta(t_0+t)}e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\eta(t_0+t)}}, \tag{6.23}$$

$$\zeta(x,y,t) = \frac{1}{8\pi\eta(t_0+t)}e^{-\dfrac{x^2+y^2}{8\eta(t_0+t)}}, \tag{6.24}$$

$$\psi(x,y,t) = \psi_0(t) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{r_*}\left(1-e^{-\dfrac{r_*^2}{4\eta(t_0+t)}}\right)dr_*, \tag{6.25}$$

$$p(x,y,t) = p_0(t) + \frac{e^{-\ t/\tau}}{2\pi\tau}\int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{r_*}\left(1-e^{-\dfrac{r_*^2}{8\eta(t_0+t)}}\right)dr_*. \tag{6.26}$$

Здесь $\psi_0(t)$ и $p_0(t)$ – произвольные функции времени. Принимая во внимание теорему 6 и осуществляя переход к переменным (u_x, u_y, p), получим

$$u_x = -\frac{1}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\left(1 - e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\eta(t_0+t)}}\right) + \\ +\frac{e^{-\,t/\tau}}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\left(1 - e^{-\dfrac{x^2+y^2}{8\eta(t_0+t)}}\right), \tag{6.27}$$

$$u_y = \frac{1}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\left(1 - e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\eta(t_0+t)}}\right) + \\ +\frac{e^{-\,t/\tau}}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\left(1 - e^{-\dfrac{x^2+y^2}{8\eta(t_0+t)}}\right), \tag{6.28}$$

$$p = p_0(t) + \frac{e^{-\,t/\tau}}{2\pi\tau}\int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{r_*}\left(1 - e^{-\dfrac{r_*^2}{8\eta(t_0+t)}}\right)dr_*. \tag{6.29}$$

Начальные условия имеют вид

$$u_x\Big|_{t=0} = -\frac{1}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\left(1 - e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\eta t_0}}\right) + \frac{1}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\left(1 - e^{-\dfrac{x^2+y^2}{8\eta t_0}}\right),$$

$$u_y\Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\left(1 - e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\eta t_0}}\right) + \frac{1}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\left(1 - e^{-\dfrac{x^2+y^2}{8\eta t_0}}\right).$$

Решение (6.27) – (6.29) задачи Коши (5.1) – (5.3), (6.1) не удовлетворяет классической системе Стокса, поскольку поле скорости $\vec{u} = (u_x, u_y)$ уже не является соленоидальным. Нетрудно видеть, что спустя промежуток времени порядка нескольких времен релаксации τ с момента $t = 0$ влияние вторых слагаемых в правых частях равенств (6.27), (6.28) становится незначительным.

Заключение

Актуальным является научное направление, связанное с разработкой новых методов построения точных решений квазигидродинамических уравнений как для установившихся, так и для нестационарных течений. Особый интерес представляют решения, согласующиеся с экспериментом. Если эти решения зависят от параметра τ, то встает вопрос об их поведении при $\tau \to +0$. В некоторых случаях (см. [4], [5], [8]) при таком предельном переходе может получиться точное решение системы Навье–Стокса.

Другая перспективная и интенсивно развивающаяся в последнее время область исследований – построение численных методов различных порядков аппроксимации для расчета гидродинамических течений на основе полных или упрощенных уравнений Навье–Стокса, где в качестве искусственных регуляризаторов выступают разностные аппроксимации зависящих от τ членов в КГД уравнениях [13]-[16].

Список литературы

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986. — 736 с.

[2] Пухначев В.В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // Успехи механики. — 2006. — № 1. — С. 6–76.

[3] Аристов С.Н., Полянин А.Д. Точные решения трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса // Доклады РАН. — 2009. — Т. 427, № 1. — С. 35–40.

[4] Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений: дис. ... докт. физ. – мат. наук. Тверь, 2000. — 236 с.

[5] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[6] Злотник А.А. О параболичности квазигидродинамической системы и устойчивости малых возмущений для нее // Мат. заметки. — 2008. — Т. 83, Вып. 5. — С. 667–682.

[7] Шеретов Ю.В. О построении решений нестационарных квазигидродинамических уравнений в приближении Стокса // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун–т, 2007. — С. 49–59.

[8] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях уравнений Навье–Стокса, Эйлера и квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Прикл. мат. — 2010. — № 14. — С. 41–58.

[9] Шеретов Ю.В. Квазигидродинамические уравнения и аналитические функции // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун–т, 2010. — С. 61–68.

[10] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987. — 688 с.

[11] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М.: Наука, 1973. — 416 с.

[12] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512с.

[13] Elizarova T.G. Quasi–Gas Dynamic Equations. Berlin–Heidelberg: Springer, 2009. — 286 p.

[14] Жериков А.В. Применение квазигидродинамических уравнений: математическое моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2010. — 124 с.

[15] Елизарова Т.Г., Афанасьева М.В. Регуляризованные уравнения мелкой воды // Вестник МГУ им. М.В.Ломоносова. Физика. Астрономия. — 2010. — № 1. — С. 15–18.

[16] Елизарова Т.Г., Булатов О.В. Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. - 2011. - Т.51, №1. - С.170-184.