

ОПИСАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ РЕДЖЕ ДЛЯ МЕЗОНОВ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ СТРУНЫ С МАССИВНЫМИ КОНЦАМИ

Миловидов А.Е., Шаров Г.С.
Кафедра функционального анализа и геометрии

Поступила в редакцию 20.05.2011, после переработки 03.06.2011.

Модель струны с массивными концами используется для описания возбужденных состояний мезонов на траекториях Редже. Квазилинейные траектории Редже порождаются равномерным вращением прямолинейной струны. На основании экспериментальных данных выбран вид учета спин-орбитального взаимодействия для спинов кварков. Этот подход позволяет описывать состояния мезонов как с легкими, так и с тяжелыми кварками.

The string model with massive ends is used for describing excited meson states on Regge trajectories. Quasilinear Regge trajectories are generated by uniform rotation of an rectilinear string. On the base of experimental data we choose the form of spin-orbit interaction term for quark spins. This approach is useful for describing meson states both with light and heavy quarks.

Ключевые слова: струна с массивными концами, спин-орбитальное взаимодействие, траектории Редже.

Keywords: string with massive ends, spin-orbit interaction, Regge trajectories.

1. Введение

Для описания мезона (связанной сильным взаимодействием системы из кварка и антикварка) широко используется модель релятивистской струны с массивными концами [1]. Основными достоинствами этой модели являются естественное описание конфаймента (невыветания кварков), а также возбужденных состояний мезонов на ведущих траекториях Редже [2, 3].

Траекторией Редже называется близкая к линейной экспериментально наблюдаемая зависимость между полным угловым моментом J и квадратом массы или энергии E для семейства частиц с одинаковым кварковым составом (и связанными с последним квантовыми числами — изоспином, странностью и т. д.), но с различными значениями J :

$$J \simeq \alpha' E^2 + \alpha_*, \quad (1)$$

При описании траекторий Редже на основе модели струны с массивными концами используются ротационные состояния данной системы — классические движения, при которых прямолинейная струна равномерно вращается, а массы m_1 и

m_2 на концах равномерно движутся по окружностям со скоростями v_1 и v_2 [2, 3, 4]. При таком движении в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ струна заметает мировую поверхность, которую можно задать в виде [3, 6]

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \Omega^{-1} [\theta \tau e_0^\mu + \cos(\theta \sigma + \phi_1) \cdot e^\mu(\tau)], \quad \sigma \in [0, \pi]. \quad (2)$$

Здесь Ω — угловая частота вращения, e_0, e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^{1,3}$, $e^\mu(\tau) = e_1^\mu \cos \theta \tau + e_2^\mu \sin \theta \tau$ — вращающийся единичный ($e^2 = -1$) вектор, направленный вдоль струны, скорость света $c = 1$, скорости концов струны v_j связаны с параметрами θ, ϕ_1, Ω и натяжением струны γ соотношениями [3]:

$$v_1 = \cos \phi_1, \quad \pi \theta = \arcsin v_1 + \arcsin v_2, \quad v_j = \left(\sqrt{m_j^2 \Omega^2 + 4\gamma^2} - m_j \Omega \right) / (2\gamma). \quad (3)$$

Для описания траекторий Редже используем выражения для классических энергии E_{cl} и углового момента L ротационных состояний (2) [1, 3, 6]:

$$E_{cl} = \frac{\pi \gamma \theta}{\Omega} + \sum_{j=1}^2 \frac{m_j}{\sqrt{1 - v_j^2}}, \quad L = \frac{\pi \gamma \theta}{2\Omega^2} + \frac{1}{2\Omega} \sum_{j=1}^2 \frac{m_j v_j^2}{\sqrt{1 - v_j^2}}. \quad (4)$$

Переход от классического углового момента L к полному моменту $J = L + S$ должен сопровождаться квантованием системы. Однако механизм квантования струны с массивными концами не разработан из-за существенной нелинейности уравнений динамики. Ниже применен подход, предложенный в работах [2, 3] для мезонов и барионов. Он включает учет спиновой составляющей в угловом моменте в виде добавки к классическому моменту (4)

$$J = L + S, \quad S = s_1 + s_2, \quad (5)$$

где s_j — проекции спинов массивных точек (кварков), а также поправку к энергии E_{cl} состояния (2) за счет спин-орбитального взаимодействия, имеющую вид [3]

$$E = E_{cl} + \Delta E_{SL}, \quad \Delta E_{SL} = \sum_{j=1}^2 \beta(v_j) (\Omega \cdot s_j). \quad (6)$$

Здесь $(\Omega \cdot s_j)$ — скалярное произведение векторов угловой скорости и спина кварка, вид функции $\beta(v_j)$ зависит от выбора модели для описания спин-орбитального взаимодействия. Ввиду невозможности на данный момент вычисления этой поправки в рамках квантовой хромодинамики существуют различные подходы к определению $\beta(v_j)$ и ΔE_{SL} . В частности, в работе [2] и ряде других публикаций предполагается, что

$$\beta(v_j) = -[(1 - v_j^2)^{-1/2} - 1]. \quad (7)$$

Данная поправка обусловлена томасовской прецессией спина кварка и выведена при допущении, что в системе покоя кварка действующее на него поле является чисто хромозлектрическим.

С другой стороны, в рамках альтернативного вышеизложенному предположения об отсутствии хромомагнитного поля в системе покоя центра вращения ротационной конфигурации (в системе покоя кварка хромомагнитное поле возникает) имеем поправку [2, 3]

$$\beta(v_j) = 1 - (1 - v_j^2)^{1/2}, \quad (8)$$

отличающуюся знаком и множителем $(1 - v_i^2)^{1/2}$ от томасовской поправки (7). Выражения вида (8) часто используются в потенциальных моделях адронов [5].

При выводе выражений (7), (8) и их аналогов [5] для спин-орбитальной поправки существенно используются упрощающие предположения, которые заменяют не позволяющие пока решить задачу уравнения квантовой хромодинамики на их некоторый электродинамический аналог. Для этого аналога задача о спин-орбитальном взаимодействии решена. Но при этом вопрос об обоснованности выбора того или иного аналога остается открытым.

2. Описание траекторий Редже и выбор параметров моделей

Для выбора между двумя конкурирующими видами (7) и (8) спин-орбитальной поправки мы предлагаем подход, основанный на сравнении экспериментальных данных с результатом действия поправок (7) и (8) для струнных моделей адронов.

Для оценки влияния спин-орбитальной поправки на положение кривой $J = J(E^2)$, а также для оценки эффективных масс кварков и других параметров полезно обратиться к асимптотикам выражений (4), (6) при больших J и E . Необходимость этого обусловлена достаточно сложной структурой этих выражений, которая не создает препятствий для численного анализа, но не позволяет явно увидеть влияние на эти траектории параметров $m_i, \gamma, \beta(v_i)$.

Асимптотические выражения для энергии E_{cl} , углового момента L , поправки (8) ΔE_{SL} для ротационного состояния (2) при $E \rightarrow \infty$ были получены в работе [6] в виде рядов малому параметру $\varepsilon_1 = \sqrt{1 - v_1^2}$:

$$E_{cl} = m_1 \left(\frac{\pi}{\varepsilon_1^2} - \frac{\pi}{2} + \frac{1 + \mu_2^3}{3} \varepsilon_1 - \frac{\pi}{8} \varepsilon_1^2 + \frac{8 + 5\mu_2^3 + 3\mu_2^5}{60} \varepsilon_1^3 - \frac{\pi}{16} \varepsilon_1^4 + \dots \right) \quad (9)$$

$$L \simeq \frac{m_1^2}{\gamma} \left(\frac{\pi}{2\varepsilon_1^4} - \frac{\pi}{2\varepsilon_1^2} - \frac{1 + \mu_2^3}{3\varepsilon_1} + \frac{14 + 5\mu_2^3 + 9\mu_2^5}{60} \varepsilon_1 + \frac{52 + 35\mu_2^3 + 42\mu_2^5 - 25\mu_2^7}{1120} \varepsilon_1^3 \right),$$

$$\Delta E_{SL} = \frac{\gamma \varepsilon_1^2}{m_1} \left[s_1 + s_2 - (s_1 + \mu_2 s_2) \varepsilon_1 + \frac{s_1 + s_2}{2} \varepsilon_1^2 + \dots \right] \quad (10)$$

Здесь $\mu_2 = \sqrt{m_2/m_1}$.

Если из суммы рядов (9) и (10) $E = E_{cl} + \Delta E_{SL}$ выразить в виде ряда параметр $\varepsilon_1 = \sqrt{\pi m_1} (E^{-1/2} - \frac{\pi}{4} m_1 E^{-3/2} + \dots)$ и подставить в ряд для углового момента J (5), то получим асимптотическое разложение момента J по степеням E :

$$J = \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha_{\ell} E^{2-\ell/2} = \alpha' E^2 + \alpha_3 E^{1/2} + \frac{\alpha_5}{E^{1/2}} + \frac{\alpha_6}{E} + \frac{\alpha_7}{E^{3/2}} + \dots, \quad E \rightarrow \infty, \quad (11)$$

где $\alpha_0 \equiv \alpha' = (2\pi\gamma)^{-1}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0$, $J_{as}(E) = \sum_{\ell=0}^7 \alpha_{\ell} E^{2-\ell/2}$,

$$\alpha_3 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{m_1^{3/2} + m_2^{3/2}}{\gamma \sqrt{\pi}}, \quad \alpha_5 = \sqrt{\pi} \left(\frac{m_1^{5/2} + m_2^{5/2}}{10\gamma} + s_1 \sqrt{m_1} + s_2 \sqrt{m_2} \right),$$

$$\alpha_6 = \frac{(m_1^{3/2} + m_2^{3/2})^2}{18\gamma}, \quad \alpha_7 = -\pi^{3/2} \left(\frac{m_1^{7/2} + m_2^{7/2}}{112\gamma} + \frac{s_1 m_1^{3/2} + s_2 m_2^{3/2}}{4} \right). \quad (12)$$

Проведем аналогичные оценки для спин-орбитальной поправки (6) к энергии состояния в виде (7) [2], обусловленном томасовской прецессией. Разложив эти выражения в ряд по степеням ε_1

$$\Delta E_{SL} = \frac{\gamma \varepsilon_1}{m_1} \left[-s_1 - \frac{s_2}{\mu_2} + (s_1 + s_2) \varepsilon_1 + \left(\frac{s_1}{2} + \frac{\mu_2^2 + 1}{4\mu_2} s_2 \right) \varepsilon_1^2 + \dots \right], \quad (13)$$

видим, что, в отличие от (10), ведущий член в (13) отрицателен и пропорционален ε_1 . Выражая из суммы рядов (9) и (13) $E = E_{cl} + \Delta E_{SL}$ параметр ε_1

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\pi m_1} \left\{ E^{-1/2} - \frac{\pi}{4} m_1 E^{-3/2} + \sqrt{\pi} \left[\frac{1 + \mu_2^3}{6} m_1^{3/2} - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{s_1}{\sqrt{m_1}} + \frac{s_2}{\sqrt{m_2}} \right) \right] E^{-2} + \dots \right\}$$

и подставляя в ряд (5), получим разложение углового момента J по степеням E :

$$J = \sum_{\ell=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_\ell E^{2-\ell/2} = J_{as}(E) + \tilde{\alpha}_6 E^{-1} + \tilde{\alpha}_7 E^{-3/2} + \dots, \quad E \rightarrow \infty; \quad (14)$$

где $J_{as}(E) = (2\pi\gamma)^{-1} E^2 + \tilde{\alpha}_3 E^{1/2} + \tilde{\alpha}_5 E^{-1/2}$,

$$\tilde{\alpha}_3 = \alpha_3 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{s_1}{\sqrt{m_1}} + \frac{s_2}{\sqrt{m_2}} \right), \quad \tilde{\alpha}_5 = \sqrt{\pi} \left(\frac{m_1^{5/2} + m_2^{5/2}}{10\gamma} + \frac{s_1 \sqrt{m_1} + s_2 \sqrt{m_2}}{4} \right). \quad (15)$$

Здесь, в отличие от разложения (11), в конечную сумму $J_{as}(E)$, представленную на рис. 1, включено три ненулевых слагаемых разложения.

Перейдем к описанию мезонов на траекториях Редже с помощью рассматриваемых струнных моделей со спин-орбитальными поправками вида (7) и (8).

Рис. 1 на примере траекторий Редже для мезонов, образованных из u и d кварков, иллюстрирует зависимость $J = J(E^2)$, определяемую формулами (4)–(6) (жирные сплошные и штриховые линии), а также близкие к ней приближенные выражения $J_{as}(E^2)$ (11) (тонкие штрих-пунктирные линии), с 5 ненулевыми слагаемыми ($0 \leq \ell \leq 7$) и (14) (с 3 слагаемыми). Энергия E здесь и ниже — в ГэВ.

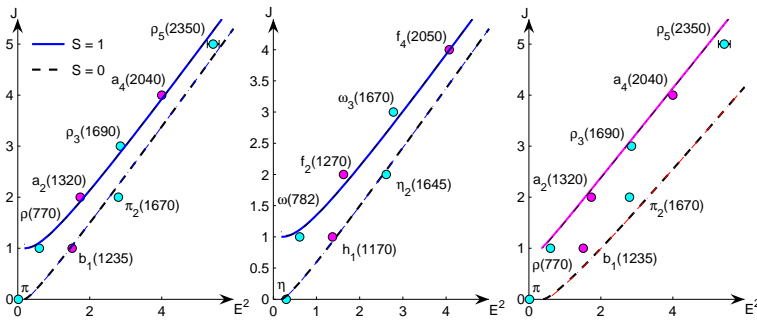


Рис. 1: Зависимость $J(E^2)$ а) для изовекторных мезонов и модели с поправкой (8), б) для изоскалярных мезонов и поправки (8), в) для изовекторных мезонов и поправки (7)

Параметры моделей — натяжение струны γ и одинаковые массы u и d кварков $m_1 = m_2$ — соответственно для поправки (8) и (7) здесь следующие:

$$\begin{aligned} \gamma &= 0.1592 \text{ ГэВ}^2, & m_{u,d} &= 212.8 \text{ МэВ} & - \Delta E_{SL} \text{ вида (8),} \\ \gamma &= 0.1832 \text{ ГэВ}^2, & m_{u,d} &= 313.8 \text{ МэВ} & - \Delta E_{SL} \text{ вида (7).} \end{aligned} \quad (16)$$

Они выбраны на основе процедуры оптимизации, изложенной ниже. Сплошные линии описывают с помощью формул (4)–(6) состояния с суммарным спином кварков $S = s_1 + s_2 = 1$ — это мезоны $\rho(770)$, $a_2(1320)$, $\rho_3(1690)$, $a_4(2040)$ с изоспином $I = 1$, а также мезоны $\omega(782)$, $f_2(1270)$... с изоспином $I = 0$. Штриховые линии описывают состояния с $S = 0$. На рис. 1а и 1б представлена модель со спин-орбитальной поправкой (8), на рис. 1в — с поправкой (7).

Тонкими штрих-пунктирными линиями показаны асимптотические приближения $J_{as}(E^2)$ (11) на рис. 1а и 1б и (14) — на рис. 1в. Как видим, приближенные выражения $J_{as}(E^2)$ с указанным выше числом слагаемых хорошо соответствуют определяемой формулами (4)–(6) зависимости $J = J(E^2)$ — различие в масштабе рис. 1 очень сложно заметить. Это различие подробно иллюстрирует рис. 2, на котором для тех же параметров моделей (16) показана разность $\Delta J = J - J_{as}$ между полным моментом (5) и его приближением J_{as} в зависимости от E^2 .

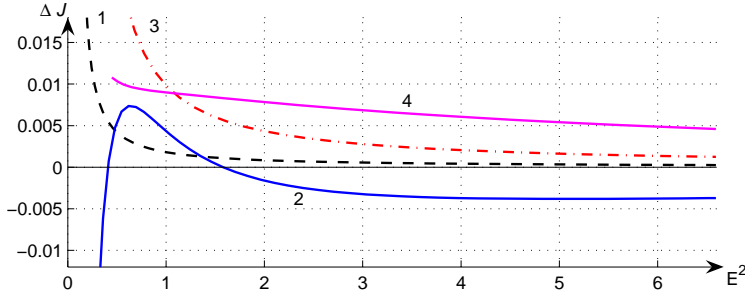


Рис. 2: Погрешность $\Delta J = J - J_{as}$ как функция E^2 : 1 — модель (8), $S = 0$; 2 — модель (8), $S = 1$; 3 — модель (7), $S = 0$; 4 — модель (7), $S = 1$

Рис. 2 показывает, что разность (погрешность) ΔJ для всех показанных на рис. 1 траекторий Редже не превосходит по модулю 0.01 и выходит за эти рамки только при значениях углового момента L близких к нулю. Но при таких значениях L струнная модель мезона становится неадекватной — мезон принимает вытянутую (струноподобную) форму только при больших L [1]–[3].

Заметим, что попытка улучшить приближение (14), добавив к J_{as} слагаемые $\tilde{\alpha}_6 E^{-1} + \tilde{\alpha}_7 E^{-3/2}$ (где, в частности, $\tilde{\alpha}_6 = \alpha_6 - \frac{1}{6}(m_1^{3/2} + m_2^{3/2})(s_1 m_1^{-1/2} + s_2 m_2^{-1/2})$), не приводит к успеху. Эти слагаемые обеспечивают сходимость ряда (14) при $E \gg 1$ ГэВ, но слишком велики при интересующих нас энергиях 0.5 – 2.5 ГэВ.

3. Оценка погрешности при описании траекторий Редже для мезонов

Перейдем к процедуре определения параметров струнной модели γ , m_1 , m_2 , позволяющих наилучшим образом описывать экспериментальные данные по мезонам, лежащим на траекториях Редже. Экспериментальные данные — значения

массы (энергии) E и полного углового момента J для мезонов — взяты из ежегодно обновляемого каталога [7].

Рассмотрим семейство из n мезонов с экспериментальными значениями энергии E_k и момента J_k , $k = 1, \dots, n$, с одинаковым кварковым составом, лежащих на одной или на нескольких (различающихся спином кварков $S = S_k$ или изоспином I) траекториях Редже. Пример такого семейства, включающего 4 траектории Редже, показан на рис. 1а и б.

Для выбора параметров модели, соответствующих наилучшему приближению экспериментальных значений E_k , J_k некоторого семейства мезонов модельной зависимостью $J = J(E)$, используем метод наименьших квадратов, то есть будем минимизировать сумму квадратов отклонений с положительными весами ρ_k :

$$F(m_1, m_2, \gamma) = \sum_{k=1}^n \rho_k \left[J_k - J(E_k) \right]^2. \quad (17)$$

Для каждой из моделей здесь и ниже мы фиксируем множители ρ_k следующим образом: $\rho_k = 1$ для надежно установленных состояний мезонов с орбитальным моментом $L \geq 1$, $\rho_k = 0,5$ для состояния $\rho_5(2350)$, зафиксированного ненадежно и не включенного в итоговые таблицы [7], и $\rho_k = 0,2$ для мезонов с $L = 0$, в частности, для π , $\rho(770)$, η , $\omega(782)$, которые не должны описываться рассматриваемыми струнными моделями.

Для вычисления значений момента $J(E_k)$, соответствующих экспериментально измеренным энергиям (массам) E_k мезонов мы должны использовать формулы (4)–(6), определяющие как момент $J = J(\Omega)$ (5), так и полную энергию

$$E(\Omega) = \sum_{j=1}^2 \left[\frac{\gamma}{\Omega} \arcsin v_j + \frac{m_j}{\sqrt{1-v_j^2}} + \beta(v_j)(\Omega \cdot s_j) \right], \quad v_j = \sqrt{\left(\frac{m_j \Omega}{2\gamma} \right)^2 + 1} - \frac{m_j \Omega}{2\gamma}$$

как функцию параметра Ω — угловой частоты. Фактически надо численно реализовать процедуру обращения функции $E = E(\Omega)$ и с помощью обратной функции $\Omega = \Omega(E)$ вычислить $J(E_k) = J(\Omega(E_k))$. Для численной реализации удобно задавать в эквидистантных узлах величину $\chi = \text{const}/\Omega$ и при вычислении $\Omega(E_k)$ использовать линейную аппроксимацию, добиваясь независимости результата от шага по χ .

Эта процедура существенно упрощается, если при оценке суммы квадратов отклонений (17) заменить $J(E_k)$ на $J_{as}(E_k)$ — приближенные асимптотические выражения (11) и (14) соответственно с $\ell \leq 7$ и $\ell \leq 5$:

$$F_{as}(m_1, m_2, \gamma) = \sum_{k=1}^n \rho_k \left[J_k - J_{as}(E_k) \right]^2. \quad (18)$$

Исследуем суммы (17) и (18) для мезонов, образованных из легких u и d кварков и представленных на рис. 1. Для этих частиц в силу приближенного равенства масс u и d кварков $m_1 = m_2 = m_{u,d}$ [2, 3] мы можем использовать всего два свободных параметра в каждой из рассматриваемых моделей — эффективное натяжение струны γ и эффективную массу кварка $m_{u,d}$. Для этого семейства мезонов исследуем на минимум функцию (17) $F = F(m_{u,d}, \gamma)$ и покажем ее линии уровня в

верхней части рис. 3 для модели с поправкой (8) (слева) и для модели с поправкой (7) (справа). Результаты аналогичных расчетов для суммы (18) $F_{as}(m_{u,d}, \gamma)$ показаны в нижней части рис. 3.

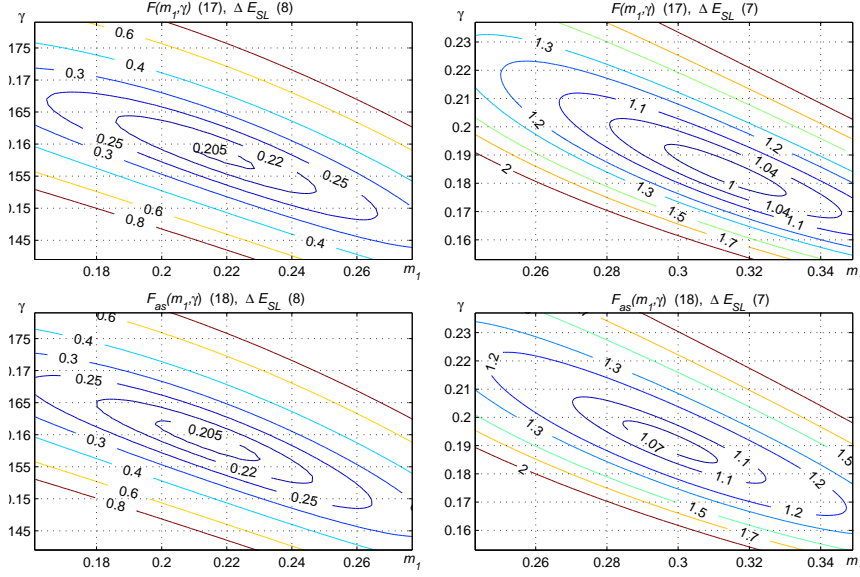


Рис. 3: Сверху: линии уровня функции $F(m_1, \gamma)$ ($m_1 = m_{u,d}$) для мезонов на рис. 1 и модели с поправкой (8) (слева) и с поправкой (7) (справа). Снизу: то же для функции $F_{as}(m_1, \gamma)$ (18), модель (8) слева, модель (7) — справа

Как видим, для модели с поправкой ΔE_{SL} вида (8) и 15 мезонов поведение функций $F(m_1, \gamma)$ и $F_{as}(m_1, \gamma)$ довольно близко: F достигает минимального значения 0.2025 при $m_{u,d} \simeq 218$ МэВ и $\gamma \simeq 0.158$ ГэВ²; а сумма (18) F_{as} достигает минимума 0.2003 при $m_{u,d} \simeq 214.4$ МэВ и $\gamma \simeq 0.159$. В то же время, для модели с поправкой (7) различие между параметрами минимумов F и F_{as} заметно больше: в частности, для F оптимальные значения $m_{u,d} \simeq 313.4$ МэВ, $\gamma \simeq 0.184$ ГэВ²; для F_{as} — $m_{u,d} \simeq 297.8$ МэВ, $\gamma \simeq 0.191$ ГэВ².

Это различие, которое отражено ниже в табл. 1 и 2, вынуждает нас использовать для наиболее точных оценок сумму (17) и формулы (4)–(6).

Для окончательного определения оптимальных значений параметров $m_{u,d}$ и γ для рассматриваемых моделей надо учесть, как эти модели описывают траектории Редже для состояний мезонов, содержащих странный кварк s . Для этого используем вновь метод наименьших квадратов, добавив в суммы (17) и (18) слагаемые, содержащие информацию из каталога [7] о мезонах со странным кварком. Последние включают 4 семейства. Мезоны семейства K , $K_1(1270)$, $K_2(1770)$ со спином кварков $S = 0$ и семейства $K^*(892)$, $K_2^*(1430)$, $K_3^*(1780)$, $K_4^*(2045)$, $K_5^*(2382)$ с $S = 1$ содержат легкий кварк с $m_1 = m_{u,d}$ и странный кварк с $m_2 = m_s$. Мезоны третьего семейства η , $h_1(1380)$, $\eta_2(1870)$ с $S = 0$ и четвертого семейства $\phi(1020)$, $f_2'(1525)$, $\phi_3(1850)$ с $S = 1$ содержат два странных кварка: $m_1 = m_2 = m_s$.

Суммы (17) и (18), включающие эти 14 и описанные выше 15 мезонов, являются функциями трех модельных параметров: $m_{u,d}$, m_s и γ . Для определения оптимальных значений этих параметров, соответствующих минимумам функций $F(m_{u,d}, m_s, \gamma)$ и $F_{as}(m_{u,d}, m_s, \gamma)$, были проведены численные расчеты, результаты которых представлены ниже на рис. 4 и табл. 1 и 2.

Показанные на рис. 4 линии уровня на плоскости $m_{u,d}$, m_s — сечения поверхностей уровня функции (17) $F(m_{u,d}, m_s, \gamma)$ плоскостью $\gamma = \gamma_{min} = \text{const}$, проходящей через точку минимума. Значения весов ρ_k присваивались 14 мезонам со странным кварком по принципам, описанным выше. В частности, мы полагали $\rho_k = 0.2$ для мезонов с $L = 0$ (K , $K^*(892)$, η , $\phi(1020)$) и $\rho_k = 0.5$ для ненадежно зафиксированных состояний $K_5^*(2382)$, $h_1(1380)$, $\eta_2(1870)$.

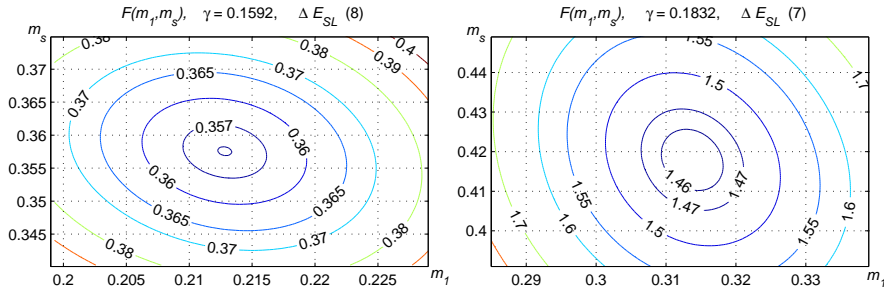


Рис. 4: Линии уровня функции $F(m_1, m_s, \gamma)$ для 29 мезонов: слева — для модели с поправкой (8) при $\gamma = 0.1592$; справа — с поправкой (7) при $\gamma = 0.1832$

В численных расчетах мы полагали, что странный кварк у мезонов $K_1(1270)$ и $K_2(1770)$ имеет проекцию спина $s_2 = -1/2$. В этом случае минимум функции F (см. табл. 1) меньше, чем значения $\min F \simeq 0.3909$ для модели (8) и $\min F \simeq 1.5998$ для модели (7), достигаемые при $s_1 = -1/2$, $s_2 = 1/2$ у этих двух мезонов.

Отметим, что энергии (массы) K -мезонов E_k усреднены по кварковому составу, например, для $K^*(1430)$ присвоено $E = 1429 \pm 4.8$ МэВ как среднее из 1425.6 ± 1.5 МэВ для $K^*(1430)^+$ (системы $u\bar{s}$) и 1432.4 ± 1.3 МэВ для $K^*(1430)^0$ (системы $d\bar{s}$).

Результаты расчетов оптимальных значений параметров $m_{u,d}$, m_s , γ , при которых достигается минимум функции (17) $F(m_{u,d}, m_s, \gamma)$, а также значение этого минимума наряду с выражением (16) приведены в табл. 1 для двух моделей с различными спин-орбитальными поправками ΔE_{SL} . При этом мы исследуем влияние на эти значения выбора весов ρ_k , характеризующих вклад, вносимый различными мезонами в сумму (17). Рассмотрено 3 варианта присвоения веса $\rho_k = \rho|_0$ для мезонов с $L = 0$ (для которых ограничена применимость струнных моделей).

Для сравнения в табл. 2 представлены аналогичные расчеты для функции (18) F_{as} с асимптотическими приближениями (11) и (14).

При различных ρ_k расхождение между параметрами функций F в табл. 1 и F_{as} в табл. 2 меньше для модели с поправкой (8), но существенно больше для модели с поправкой (7). Это диктует необходимость использования суммы (17) $F(m_1, m_2, \gamma)$ и более точных формул (4)–(6) в процедуре выбора оптимальных параметров модели.

Таблица 1: Значения $\min F$, $m_{u,d}$, m_s (в МэВ), γ в точке минимума суммы (17) для двух моделей при различных весах $\rho_k = \rho|_0$ мезонов с $L = 0$

$\rho _0$	модель с поправкой (8)				модель с поправкой (7)			
	$\min F$	$m_{u,d}$	m_s	γ (ГэВ ²)	$\min F$	$m_{u,d}$	m_s	γ (ГэВ ²)
0.1	0.3491	212.2	356.7	0.1593	1.4386	310.4	415.0	0.1846
0.2	0.3559	212.8	357.6	0.1592	1.4543	313.8	417.9	0.1832
0.5	0.3761	216.1	361.0	0.1586	1.4951	320.4	424.6	0.1800

Таблица 2: Значения $\min F$, $m_{u,d}$, m_s (в МэВ), γ в точке минимума суммы (18) для двух моделей при различных весах $\rho|_0$

$\rho _0$	модель с поправкой (8)				модель с поправкой (7)			
	$\min F$	$m_{u,d}$	m_s	γ (ГэВ ²)	$\min F$	$m_{u,d}$	m_s	γ (ГэВ ²)
0.1	0.3490	207.9	351.0	0.1602	1.5760	293.9	399.6	0.1920
0.2	0.3552	208.9	352.2	0.1600	1.5972	297.1	402.7	0.1904
0.5	0.3733	211.5	355.4	0.1595	1.6514	305.3	410.6	0.1863

Параметры минимумов функций F и F_{as} зависят от весов $\rho|_0$, причем для модели с поправкой (7) эта зависимость проявляется сильнее. Мы будем минимизировать произвол, связанный с выбором ρ_k , установив эти значения для всех семейств мезонов по описанным выше правилам: $\rho_k = \rho|_0 = 0.2$ для мезонов с $L = 0$ и $\rho_k = 0.5$ для состояний с $L \geq 2$, не включенных в итоговые таблицы [7].

Таблицы 1 и 2 показывают, что при различных ρ_k минимальное значение меры погрешности $F(m_{u,d}, m_s, \gamma)$ для модели с поправкой (7) существенно больше, чем для модели (8). Четырехкратная разница в величине минимума F говорит о предпочтительности вида (8) спин-орбитальной поправки ΔE_{SL} по сравнению с моделью (7) для описания мезонов с кварками u , d и s .

Траектории Редже для двух рассматриваемых моделей с оптимальными значениями параметров (см. табл. 1 при $\rho|_0 = 0.2$) для 14 мезонов со странным кварком показаны на рис. 5. Как и в случае рис. 1 для состояний с $S = s_1 + s_2 = 0$ (им отвечают жирные штриховые линии) модель с поправкой (8) здесь демонстрирует лучшее соответствие эксперименту, чем модели с поправкой (7).

На заключительном этапе мы должны с помощью рассматриваемых моделей описать траектории Редже для мезонов, содержащих тяжелые кварки c и b . Для этих частиц имеются экспериментальные данные [7] только о состояниях с орбитальным моментом $L = 0$ и $L = 1$ (в расчетах им припишем соответственно веса $\rho_k = 0.2$ и $\rho_k = 1$). В частности, мезоны с c -кварком данного вида образуют 4 семейства: мезоны D , $D_1(2420)$, D^* , $D_2^*(2460)$ являются аналогами K - и K^* -мезонов, в которых странный кварк заменен на очарованный c ; мезоны D_s , $D_{s1}(2536)$, D_s^* , $D_{s1}^*(2573)$ — пары $c\bar{s}$ или $s\bar{c}$; мезоны η_c , $h_c(1P)$, J/ψ , χ_{c2} — состояния чармония $c\bar{c}$.

Рассмотрим сумму квадратов отклонений (17) $F(m_{u,d}, m_s, m_c, \gamma)$ для этих 12 мезонов при условии, что параметры $m_{u,d}$, m_s , γ определены выше (см. (16)). Для этой суммы — функции одной переменной $F(m_c)$ — найдем минимум: для модели с поправкой (8) $\min F \simeq 0.023$, он достигается при $m_c \simeq 1.5323$ ГэВ. При описании мезонов $D_1(2420)$ и $D_{s1}(2536)$ мы полагали, что проекция спина у c -кварка

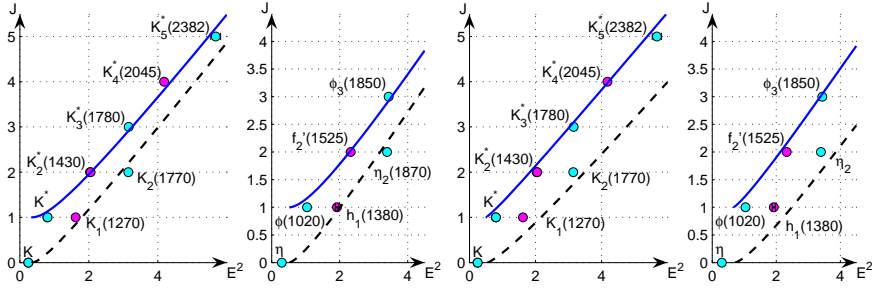


Рис. 5: Траектории Редже $J(E^2)$ для K -мезонов (с одним s -кварком) и мезонов вида $s\bar{s}$ для моделей с поправками: (8) при $m_{u,d} = 212.8$ МэВ, $m_s = 357.6$ МэВ, $\gamma = 0.1592$ ГэВ² (слева) и (7) при $m_{u,d} = 313.8$ МэВ, $m_s = 417.9$ МэВ, $\gamma = 0.1832$ ГэВ² (справа)

$s_2 = -1/2$ (по аналогии с K -мезонами). Альтернативное предположение $s_2 = 1/2$ приводит к впятеро большему значению $\min F \simeq 0.1228$ и худшему описанию данных мезонов. Аналогичные расчеты для модели с поправкой (7) для 12 мезонов с s -кварком приводят к $\min F \simeq 0.0701$, достигаемом при $m_c \simeq 1.5282$ ГэВ.

Графики функций $F(m_c)$ для этих моделей показаны на рис. 6-1, траектории Редже для трех семейств мезонов — на рис. 6-2–6-4. На всех рисунках жирные линии отвечают модели с поправкой (8) (жирные штриховые — для мезонов с $S = 0$), тонкие штрих-пунктирные — модели с поправкой (7).

В нижней части рис. 6 представлены расчеты для мезонов, содержащих тяжелый b -кварк. Для двух моделей была вычислена сумма (17) $F(m_b)$ при фиксированных $m_{u,d}$, m_s , γ с вкладами от мезонов B , B^* , B_s , B_s^* (аналогов D , D^* , D_s , D_s^* после замены s -кварка на b -кварк), а также от состояний боттомония $b\bar{b}$ Υ и $\chi_{b2}(1P)$. Если последнему состоянию присвоить вес $\rho_k = 0.5$ при стандартном выборе ρ_k для остальных 9 мезонов, получим графики функций $F(m_b)$, показанные на рис. 6-5 и следующие оптимальные значения m_b (вместе с m_s и m_c):

$$\begin{aligned} m_s = 357.6 \text{ МэВ}, & \quad m_c = 1.5323 \text{ ГэВ}, & \quad m_b = 4.829 \text{ ГэВ} & \quad \text{— модель (8),} \\ m_s = 417.9 \text{ МэВ}, & \quad m_c = 1.5282 \text{ ГэВ}, & \quad m_b = 4.8416 \text{ ГэВ} & \quad \text{— модель (7).} \end{aligned} \quad (19)$$

При этих значениях параметров данные модели порождают траектории Редже для мезонов с b -кварком (см. рис. 6-6–6-8). Как видим, обе модели хорошо описывают мезоны B , B^* , B_s , B_s^* , но хуже — состояния боттомония. Согласие для мезонов с s -кварком, включая состояния чармония на рис. 6-4, значительно лучше. Последний факт иллюстрирует величина $\min F$ на рис. 6-1 и 6-5.

4. Заключение

С помощью ротационных состояний (2) струны с массивными концами в рамках двух моделей (7) и (8) спин-орбитального взаимодействия для спинов кварков описаны возбужденные состояния мезонов, составленных из кварков u , d , s , c , b . Для этого на основе минимизации суммы квадратов отклонений (17) для двух данных моделей в виде (16) и (19) были найдены оптимальные значения модельных

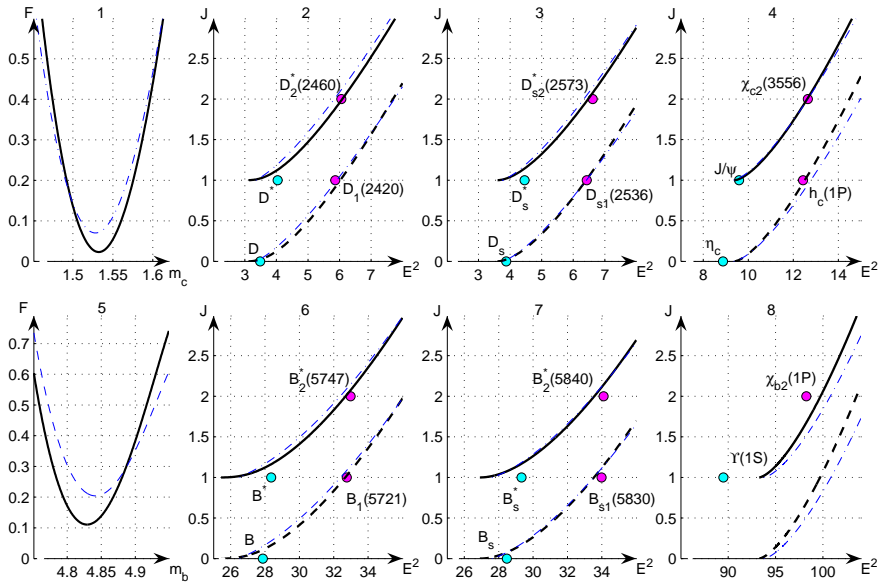


Рис. 6: Оптимизация параметров m_c , m_b и траектории Редже $J(E^2)$ для мезонов с c -кварком (2–4) и мезонов с b -кварком (6–8) для моделей (8) (жирные линии) и (7) (тонкие штрих-пунктирные линии)

параметров — эффективного натяжения струны γ , и эффективных масс кварков. Эти значения отличаются от принятых в работе [3] для модели с поправкой (8), где, в частности, было принято $m_{u,d} = 130$ МэВ, $m_s = 270$ МэВ, $\gamma = 0.175$ ГэВ². В случае модели с поправкой 7 значения $m_{u,d} = 340$ МэВ, $m_s = 440$ МэВ, $\gamma = 0.1822$ ГэВ², принятые в работе [2], оказываются более близкими к значениям, полученным в настоящей работе в результате оптимизации.

Сравнение двух рассмотренных моделей с оптимальными параметрами показывает их принципиальную применимость для описания всего спектра мезонов, представленных на рис. 1, 5, 6, однако модель со спин-орбитальной поправкой (8) в рамках одного и того же подхода демонстрирует лучшее соответствие экспериментальным данным, особенно для легких и странных мезонов (рис. 1, 5). Это, в частности, проявляется в том, что минимальная сумма квадратов отклонений (17) для мезонов с c -кварком для модели (8) примерно в 3 раза меньше, чем для модели (7). Для мезонов с b -кварком это различие составляет примерно 2 раза, а для мезонов из легких и странных кварков — 4 раза (см. табл. 1).

Список литературы

- [1] Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987.
- [2] Кобзарев И.Ю., Мартемьянов Б.В., Шепкин М.Г. Орбитальные возбуждения адронов // Успехи физ. наук. 1992. Т. 162. №4. С. 1–41.

- [3] Шаров Г.С. Струнные модели бариона и траектории Редже // Ядерная физика. 1999. Т. 62. №10. С. 1831–1843.
- [4] Soloviev L.D. Masses and internal structure of mesons in the string quark model // Phys. Rev. D. 2000. V. 61. №1. P. 015009; hep-ph/9907486.
- [5] Godfrey S., Isgur N. Mesons in a relativized quark model with chromodynamics // Phys. Rev. D. 1985. V. 32. N. 1. P. 189–231.
- [6] Ханьгин М.А., Шаров Г.С. Асимптотика зависимости углового момента от энергии для струны с массивными концами // Вестник ТвГУ. Сер. Прикладн. матем. Тверь. 2008, №14 (74), Вып. 9. С. 15–22.
- [7] Nakamura K. et al. (Particle Data Group). 2010. JP G 37. P 075021; <http://pdg.lbl.gov>.