УДК 519.254

МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ АНОМАЛИИ РЕЛЬСОВОГО ПУТИ

Уманский В.И.
ЗАО «ИнтехГеоТранс», г. Москва

Поступила в редакцию 20.05.2011, после переработки 25.05.2011.

Разработан метод идентификации аномалии формы рельсового пути как задачи обнаружения и оценивания ее параметров при использовании критерия оптимальности в виде апостериорной вероятности возникновения аномалии.

In this article method of identification the anomalies of railway lines is elaborated as the task ofdetection and estimation her parameters with use optimality criterion in the form posteriori probability occurrence of anomalies.

Ключевые слова: идентификация, обнаружение, метод, оценивание параметров, критерий, аномалия, апостериорная вероятность.
Keywords: identification, detection, method, estimation of parameters, criterion, anomaly, posteriori probability.

Введение

Под идентификацией понимается оценка параметров аномалии формы рельсового пути (рельсовой нити) по измерительной информации, поступающей от приборов – гироскопов и акселерометров. Однако без учета соответствующих априорных данных такая задача не может быть решена с требуемой достоверностью в реальном масштабе времени при движении локомотива в силу того, что гироскопы выдают измерения векторов скорости и ускорения со случайными ошибками и возникает объективно необходимость их фильтрации. При этом моменты времени появления на рельсовом пути аномалии формы рельсовой нити (АФРН) априори неизвестны – они случайны, случайность имеет место также и в значениях параметров АФРН.

Поэтому задача идентификации может быть поставлена и разрешена только как динамическая статистическая задача одновременного обнаружения и оценивания параметров АФРН при исходных данных в виде стохастического дифференциального уравнения состояния рельсового пути, стохастического дифференциального уравнения наблюдения, описывающего связь измерений с параметрами АФРН, и критерия оптимальности идентификации в виде апостериорного функционала при условии полученных измерений в текущие моменты времени.

Такая задача весьма актуальна для автоматизации контроля текущего состояния рельсового пути в реальном масштабе времени.

Исходные измерения о реальном состоянии рельсовых нитей могут быть получены от малогабаритной системы регистрации параметров движения. Система монтируется непосредственно на локомотиве и фиксирует его линейную и угловую скорость, а также ускорения. Значения этих характеристик зависят от типа участка рельсовых нитей: прямолинейный участок, односекционный поворот, стрелочный перевод, уклон. На каждом из этих участков могут иметь место различные аномальные формы рельсовых нитей, в том числе, односторонние и двухсторонние просадки, искривления пути в плане, а также шумовые и помеховые воздействия на систему регистрации. В связи с этим система регистрации параметров движения должна быть чувствительной к изменениям формы, то есть выдаваемая системой информация должна содержать сведения о реальных текущих значениях параметров формы рельсовых нитей.

Цель статьи - обоснование необходимых исходных данных и математического метода идентификации АФРН как задачи одновременного обнаружения и оценивания ее параметров.

1. Уравнение состояния

Уравнение состояния представляет математическую модель, полностью отражающую свойства и динамику изменения АФРН в условиях внешних возмущений, априори не описываемых детерминированными соотношениями.

В основу построения уравнения состояния принимается простое утверждение: экспериментально выявленные в каждой плоскости трехмерного пространства АФРН в математических терминах являются функциями непрерывного времени (или функциями проходимого локомотивом пути при известной скорости его движения) и поэтому их можно интерпретировать как решение, в общем случае, нелинейного векторного первого порядка дифференциального уравнения с обыкновенными производными в форме Коши с учетом, что относительно параметров функции априори информации не имеется и они случайны.

Доказательство этого утверждения следующее. Множество значений АФРН по существу определяет пространство состояний, а описание АФРН функцией непрерывного времени – переходную функцию состояний АФРН. Но тогда, как известно [1,2], переходная функция есть решение дифференциального уравнения

$$\frac{dz(t)}{dt} = \Phi(t, z(t), \omega(t)),$$

где $\omega(t)$ обозначает воздействия на локомотив в точках касания рельсов его колесами, они порождают аддитивные по отношению к АФРН и между собой помехи, как установлено экспериментально, импульсного, узкополосного и шумового типов,

t– текущий момент времени, $z(t)$ - текущее состояние АФРН - параметры АФРН,

$\Phi(...)$– функция, представимая гауссоидой для простых случаев либо гауссоидной огибающей, модулирующей низкочастотное квазигармоническое колебание – в сложных случаях. Каждому типу АФРН и измеряемому параметру движения будет соответствовать свое уравнение состояния с двумя, для простых случаев, и тремя, для сложных случаев, параметрами.

Гауссоиды как реализации случайной функции описывают изменения линейных и угловых ускорений и скоростей по каждой оси приборной системы координат от времени или от проходимого локомотивом пути при известной скорости его движения.

Случайность воздействий $\omega(t)$ обусловлена объективными факторами, случайно возникающими из-за ударных нагрузок на круги катания локомотива на стыках участков рельсовой колеи в стрелочных переводах и поворотах, из-за продольных толчков локомотива со стороны вагонов в связи с изменением скорости движения, рельефа местности, из-за резонансных и линейных колебаний локомотива по всем трем осям и других причин.

При таких факторах становится обоснованным описание динамики АФРН в зависимости от проходимого локомотивом пути или, что то же, от времени при известной его скорости, векторным стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка. Естественно, конкретный вид этого уравнения определяется типом АФРН а также характером и типом воздействия случайных факторов на АФРН. Экспериментально установлен аддитивный характер и тип вызываемых ими помеховых воздействий на АФРН. Помеховые воздействия $\omega(t)$ могут проявляться в виде импульсных, узкополосных помех и псевдобелых шумов – шумов, не имеющих конечной дисперсии. Поэтому уравнение состояния, полностью описывающее динамику АФРН в приборной системе координат (вне связи с функционированием прибора), принципиально сводится к виду обобщенного стохастического уравнения Ланжевена, то есть к виду

$$dz(t) = \Phi(t, z(t))dt + \vartheta(t)dt + u(t)dt + dw(t),$$

где $dw(t) = \varsigma(t)dt$,

$w(t)$– винеровский процесс, $\varsigma(t)$– белый гауссовский шум,

$u(t)$– импульсная случайная пуассоновская помеха,

$\vartheta(t)$– узкополосная случайная помеха.

При $z(t) \equiv 0$ АФРН отсутствует на рельсовом пути или это тривиальное решение дифференциального уравнения, имеет место “гладкий” профиль формы рельсового пути в условиях отсутствия воздействий $\omega(t)$ и $\Phi(t, 0) \equiv 0$.

Отметим, что случайный процесс, заданный стохастическим дифференциальным уравнением, является марковским [3] и что решение заданного уравнения при любой фиксированной реализации возмущающего процесса $\eta(t)$ существует.

2. Уравнение наблюдения

Уравнение наблюдения определяет механизм образования измеренных данных гироскопами – акселерометрами и датчиками скоростей локомотива и записывается в виде

$$\frac{dy(t)}{dt} = z(t) + n(t),$$

если измерительный прибор инерционный, и в виде

$$S(t, z(t), n(t)) = z(t) + n(t),$$

если прибор безынерционный. Процесс $y(t)$ - это наблюдаемый процесс-результаты измерений гироскопом или акселерометром, $z(t)$- ненаблюдаемый процесс, описываемый уравнением состояния, $n(t)$ - случайный процесс, порождаемый непосредственно в каждом гироскопе или акселерометре.

В основу построения уравнения наблюдения приняты

- принцип измерения гироскопом и акселерометром линейных и угловых ускорений и скоростей локомотива, заключающийся в измерении производных как реакций гироскопов на изменения направления и скорости движения локомотива; при этом учитывается также, что гироскоп – устройство инерционное, ему свойствен внутренний шум и что при этом обратная связь становится стохастической,

- тип и характер воздействия внутреннего шума гироскопов на истинные непосредственно не наблюдаемые значения ускорений и скоростей как параметров АФРН, описываемых уравнениями состояния.

Очевидно, принцип измерения контролируемых гироскопами ускорений и скоростей однозначно приводит к составлению уравнения наблюдения в форме нелинейного дифференциального уравнения с обыкновенными производными первого порядка.

Тип и характер воздействия внутреннего шума гироскопов на истинные контролируемые ускорения и скорости локомотива определяются по экспериментальным данным, полученным в условиях полной неподвижности несущей платформы реального прибора – гироскопа при движении локомотива по строго прямолинейным участкам рельсового пути (заметим, что такие участки имеются и на поворотах локомотива).

По экспериментальным данным установлено, что внутренний шум прибора-гироскопа является гауссовым белым с нулевым средним и известной по экспериментальным данным оценкой дисперсии-мощности, он аддитивно взаимодействует с истинными значениями ускорений и скоростей локомотива независимо от типа участка рельсового пути: линейный, односекционный поворот, стрелочный перевод, линейный уклон или подъем, вогнутый или выпуклый профиль.

Количество уравнений наблюдения однозначно соответствует числу измеряемых приборами – гироскопами скоростей и ускорений (фазовых координат), то есть наблюдаемый процесс однозначно порождается “своим” ненаблюдаемым процессом.

Уравнение наблюдения для каждой измеряемой фазовой координаты можно записать в виде

$$dy(t) = F(t, z(t))d(t) + d\eta(t).$$

Это стохастическое, в общем случае, нелинейное дифференциальное уравнение, где $d\eta(t) = n(t)dt$, $\eta(t)$ - винеровский процесс, не зависящий от воздействий помех и шума в правой части уравнения состояния; оно определяет случайный процесс, подлежащий обработке – фильтрации с целью восстановления реализации вектора состояния, задаваемого стохастическим дифференциальным уравнением Ланжевена, обнаружения АФРН на участке пути, соответствующем некоторому отрезку времени, и оценивания параметров АФРН. Решение таких задач по одиночному измерению, произведенному в любой произвольно взятый момент времени невозможно, поэтому измерения должны осуществляться на некотором текущем отрезке времени. Длительность отрезка выбирается в зависимости от временной длительности АФРН для соответствующей скорости движения локомотива и предъявляемых требований по точностным характеристикам, достоверности и своевременности обнаружения и оценивания параметров АФРН и тогда решение задач обработки получаемой совокупности измерений будет осуществляться на каждом текущем (или скользящем) отрезке времени. Однако для этого должен быть сформирован критерий оптимальности обработки.

3. Критерий оптимальности

Обоснование критерия естественно осуществлять, исходя из цели, задач и требований, предъявляемых к системе обработки измеренной приборами информации.

Цель обработки – восстановление истинной реализации вектора состояния АФРН на каждом текущем отрезке времени контроля рельсовых путей с требуемой достоверностью при минимальной временной задержке.

Задачи обработки - обнаружение АФРН, оценка её параметров и классификация типа с установлением принадлежности к конкретному участку рельсового пути: линейному, односекционному повороту, стрелочному переводу, линейному уклону или подъему, выпуклому или вогнутому профилю.

Требования – оценки параметров АФРН должны быть несмещенными, с минимальными дисперсиями, эффективными и при большой выборке - состоятельными. Правило обнаружения АФРН должно обладать свойством равномерно наиболее мощных несмещенных критериев [4,5].

Выполнение таких требований возможно при решении названных задач, в том числе и задачи восстановления истинной реализации вектора состояния рельсового пути, только с использованием критериев оптимальности как достаточных статистик от совокупности измерений, получаемых от приборов на каждом текущем отрезке времени, или как функционалов от достаточных статистик [4-7].

В качестве достаточных статистик в настоящей главе принимаются

- условная плотность вероятности выборки измерений при условии существования на текущем отрезке времени ситуации, заданной с точностью до конечного числа параметров непосредственно ненаблюдаемого процесса –АФРН (или ситуации, зависящей от параметров АФРН); такая плотность есть не что иное как функция правдоподобия,

- апостериорная плотность вероятности оцениваемого ненаблюдаемого процесса – АФРН,

- корреляционный интеграл, определяющий связь выборки измерений с параметрами формы АФРН,

В качестве функционалов от достаточных статистик принимаются

- отношение функций правдоподобия и

- средний риск как обобщенный функционал от функции правдоподобия или от апостериорной плотности вероятности.

Доказательства достаточности названных статистик и функционалов изложены, например, в [7]. Здесь только отметим, что от среднего риска как критерия оптимальности достаточно просто, посредством его минимизации на множестве значений оцениваемых параметров АФРН при введении нерандомизированного правила принятия решения, однозначно осуществляется переход к критерию оптимальности в виде максимума апостериорной вероятности на множестве значений параметров АФРН либо к критерию оптимальности в виде максимума отношения функций правдоподобия на множествах значений параметров альтернативных АФРН.

Действительно, запишем выражение среднего риска в виде математического ожидания функции потерь

$$R(\psi,\varphi)=\sum_{Z}\sum_{Y}\sum_{\Gamma}\psi(\theta_j,\theta_0,\ z_j,U,\Delta T,j=1,2,3)\times \\ \times p(y_n/y^{n-1}\theta_j,A(z_j),U,\Delta T,j=1,2,3)\varphi(\gamma/y)L(\theta_j,\theta_0,z_j,U,\Delta T, \\ j=1,2,3,\gamma(y)),$$

где введены следующие обозначения:

$$\psi(\theta_j,\theta_0,z_j,U,\Delta T,j=1,2,3)= \\ =\psi(\psi_1(z_1),\ \psi_2(z_2),\ \psi_3(z_3),\psi_4(z_4),\psi_5(U),\psi_6(\Delta T),p_1,p_2,p_3,q),$$

пространство выборок – тройка ($Y,Z,p(y/y^{n-1},\theta_j,\theta_0,A(z_j),j=1,2,3)$,

- Y – пространство выборок всевозможных отсчетных значений (или непрерывных реализаций)

$$y=y^n=\{y_i\}\in Y,\quad i=0,1,2,...,n,\quad y^{n-1}=\{y_i\},\ i=0,1,2,...,n-1,$$

- i – индекс отчета,
- Z – множество возможных состояний контролируемых рельсовых нитей: будем считать $\theta_j=1$ состояние рельсовых нитей, когда на них имеется аномалия j-го типа, $\theta_0=0$ – не имеется аномалии;
- $j=0$ – индекс гипотезы – аномалии нет, а j=1,2,3 – индексы сложных альтернатив – аномалий рельсовых нитей; при этом уравнение состояния, описывающее различные формы аномалии, записывается в виде дифференциально-разностного стохастического уравнения

$$z_{j,i+1}=A(z_j,i)+(w_{i-1}-w_i)$$

для прямолинейных участков рельсовых нитей и в виде

$$z_{j,i+1}=A(z_j,i)+U(i)[\sigma(i)-\sigma(i-\Delta T_i)]+(w_{i-1}-w_i),$$

или

$$z_{j,i+1}=A(z_j,i)+U(i)\cdot 1(i-\Delta T_i)+(w_{i-1}-w_i)$$

для участков с односекционными поворотами локомотива;
в этих уравнениях (z_j,i) - функция вида
$A(z_j,i)=z_{1j}e^{-z_{2j}t_i^2}\cos z_{4j}t_i,$

где (z_j, i) - нелинейная функция компонент вектора z_j и времени; обоснованность введения таких функций исходит из результатов анализа экспериментальных данных по формам огибающих сигналов при наличии АФРН,

z_{1j} – амплитуда гауссоидальной аномалии типа j,

z_{2j} – коэффициент затухания аномалии,

z_{4j} – несущая частота гауссодальной аномалии типа j как гауссоидального «радиоимпульса»,

- $U(i)$ – амплитуда скачка линейного ускорения или другого измеряемого параметра на повороте локомотива; по результатам анализа экспериментальных данных установлено, что амплитуда скачка не зависит от типа аномалии и аномалия аддитивно накладывается на скачок ускорения;

- $\sigma(i)$, $\sigma(i - \Delta T_\tau)$ – функции единичного скачка;

- $1(i - \Delta T_\iota)$ – единичный прямоугольный импульс с неизвестной, в общем случае, длительностью ΔT_ι;

- ΔT_τ – временная длительность скачка линейного ускорения на повороте локомотива;

- w_i – шум, не связанный с помехами и шумом, воздействующими на прибор контроля текущего состояния рельсовых нитей;

- компоненты $(z_{1j}, z_{2j}, z_{3j}, z_{4j})$ вектора z_j параметров аномалии j-го типа, а также $U(i)$ и ΔT_τ в общем случае, случайные величины, они определяются распределениями вероятностей

$$\psi_1(z_1),\ \psi_2(z_2),\ \psi_3(z_3),\quad \psi_4(z_4),\quad \psi_5(U),\quad \psi_6(\Delta T)$$

соответственно;

- z_{3j} - временная длительность аномалии или это эквивалент пространственной протяженности;

- отсчеты $y_i, i = 1, 2, ..., n$, измерений прибора контроля текущего состояния рельсовых нитей описываются уравнением наблюдения - измерения в дискретной форме

$$y_i = \theta_{ji}\ \mathrm{A}(z_j, i) + n_i, \quad i - (i-1) = \Delta t,$$

в котором закон распределения вероятностей шума известен; он установлен по статистическим данным показателей датчиков информации о возможных на них воздействиях при отсутствии аномалий рельсовых нитей.

В состав исходных данных для формирования критерия обнаружения аномалии должны быть включены также:

- $p(y_i/\theta_j, j = 1, 2, 3, A(z_j), U, \Delta T, \theta_0)$ – функция правдоподобия получения реализации измерений при одном из альтернативных состояний рельсовых нитей – при $\theta_j, j = 1, 2, 3$, определяющемся вектором параметров $(z_j, U(i), \Delta T_\tau)$, либо при $\theta_0 = 0$;

- $p(\theta_j, j = 1, 2, 3, \theta_0)$ априорное распределение вероятностей на множестве возможных состояний рельсовых нитей, причем

$$p(\theta_1) = p_1, \quad p(\theta_2) = p_2, \quad p(\theta_3) = p_3, \quad p(\theta_0) = q,$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + q = 1;$$

- $\varphi(\gamma/y)$ – условная решающая функция или это функция, определяющая выбор решения $\gamma(y)$ $(\gamma \in \Gamma)$ при получении выборки измерений $y \in Y$,

$(\gamma(y) = \gamma_j = \theta_j = 1, j = 1, 2, 3;\ \gamma(y) = \gamma_0 = \theta_0 = 0)$,

- Γ – пространство возможных решений;

- функция $L(\theta_j, j = 1, 2, 3,\ \theta_0,\ z_j, U, \Delta T, \gamma(y))$, определяющая меру выигрыша при принятии правильных решений и меру риска – при принятии ошибочных решений, связанных с возможностью ложного обнаружения аномалии или с пропуском обнаружения, когда она имеется.

Перечисленные исходные данные составляют полную совокупность и однозначно обусловливают структуру критерия качества решения задачи обнаружения, распознавания типа аномалии и оценки ее параметров текущего состояния рельсовых нитей – компонент вектора ($z_j, U(i),\ \Delta T_\tau$) по выборке $y = \{y_i\},\ i = 0, 1, 2, ..., n$.

Механизм принятия оптимального решения записывается в виде

$$\varphi^* = \arg \min_{\{\varphi, z_j, j=1,2,3,U,\Delta T\}} \max_{\{\psi\}} R(\psi, \varphi).$$

Однако на практике, как правило, имеют место условия полной либо неполной априорной неопределенности: не имеется каких-либо предпосылок для задания функции потерь и априорного распределения вероятностей на множестве возможных состояний рельсовых нитей, в том числе и на множестве значений параметров аномалии, а условная решающая функция $\varphi(\gamma/y)$ должна определять только детерминированный принцип выбора решения, либо не имеется каких-либо предпосылок для задания функции потерь.

В условиях полной неопределенности механизм принятия оптимального решения по обнаружению аномалии рельсовых нитей с высоким качеством сводится к

$$\Lambda_n = \max_j \frac{\left[\max\limits_{z_j, U, \Delta T} \{p(y_n/y^{n-1}, \theta = \theta_j, A(z_j), U, \Delta T)\}\right]}{p(y_n/y^{n-1}, \theta = \theta_0)} \geq \pi(\alpha), \tag{1}$$

то есть к реализации критерия в виде отношения максимума функции правдоподобия получения от информационно-измерительных приборов выборки отсчетов в виде $(y_n/y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ при состоянии контролируемых рельсовых нитей $(\theta_j = 1,\ z_j, j = 1, 2, 3,\ U,\ \Delta T)$ к функции правдоподобия получения той же выборки $(y_n/y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ при альтернативном состоянии $(\theta_0 = 0)$ контролируемых рельсовых нитей. При этом каждый вектор отсчетов y_i, $i = 0, 1, 2, ..., n$, представляется в координатах "ускорение - время" от любого контрольно-измерительного прибора, а выборка – измерение, полученная в момент времени i в том числе и в $i = n$, в общем случае, статистически связана с выборкой, полученной в предшествующие моменты $i = 0, 1, 2, ..., n-1$, то есть выборка измерений $y^n = (y_1, y_2, ..., y_n)$ не описывается марковской последовательностью.

В (1) компоненты числителя

$$p(y_n/y^{n-1}, \theta_j = 1, A(z_j), U, \Delta T) = \prod_{i=0}^{n} p(y_i/y^{i-1}, \theta_j = 1, A(z_j), U, \Delta T)$$

для $\forall j$, $\quad p(y_0/y^{-1}) = p(y_0)$,
аналогичное выражение имеет и знаменатель,

$y^{i-1} = (y_0, y_1, ..., y_{i-1})$ – выборка измерений, накопленная от датчиков на промежутке времени $[0, i-1]$ как подынтервала скользящего окна $[0, n]$,

π – пороговый уровень принятия решения об обнаружении аномалии; устанавливается по допустимой вероятности ложного обнаружения аномалии (вероятности ложной тревоги) и условному закону распределения вероятностей статистики Λ_n – при условии $\theta_0 = 0$; вычисляется порог $\pi(\alpha)$ по выражению

$\int\limits_{\pi(\alpha)}^{\infty} \psi(\Lambda_n/\theta_0 = 0)d\Lambda = \alpha$,

где α – допустимая вероятность ложной тревоги о наличии АФРН, а $\psi(\Lambda_n/\theta_0)$ – плотность распределения вероятностей статистики Λ_n при условии отсутствия АФРН ($\theta_0 = 0$); эта плотность распределения определяется имитационным моделированием или аналитически при нормально распределенных помехах и шуме.

Для условий неполной априорной неопределенности от критерия максимума отношения правдоподобия перейдем к критерию максимума апостериорной вероятности. Действительно, заметим, что

$$p(y_n \left| y^{n-1}, \theta_j = 1\right., A(z_j), U, \Delta T) = \frac{p(y_n \left| y^{n-1}\right.)p(\theta_j = 1, A(z_j), U, \Delta T \left| y_n \right.)}{\Psi(\theta_j = 1, A(z_j), U, \Delta T)}$$

и

$$p(y_n \left| y^{n-1}, \theta_0 = 0\right., A(z_j), U, \Delta T) = \frac{p(y_n \left| y^{n-1}\right.)p(\theta_0 = 0 \left| y_n \right.)}{\Psi(\theta_0 = 0)}$$

где $p(\theta_j = 1, A(z_j), U, \Delta T \left| y_n \right.)$, $p(\theta_0 = 0 \left| y_n \right.)$ апостериорные вероятности, $j = 1, 2, 3$, переходим к отношению

$$\frac{\max\limits_{z,U,\Delta T} p(y_n \left| y^{n-1}, \theta_j = 1\right., A(z_j), U, \Delta T)}{p(y_n \left| y^{n-1}, \ \theta_0 = 0\right.)} = \frac{\max\limits_{z,U,\Delta T} \frac{p(y_n \left| y^{n-1}\right.)p(\theta_j = 1, A(z_j), U, \Delta T \left| y_n \right.)}{\Psi(\theta_j = 1, A(z_j), U, \Delta T)}}{\frac{p(y_n \left| y^{n-1}, \theta_0 = 0\right.)}{\Psi(\theta_0 = 0)}},$$

а от последнего при известном априори распределении

$$\Psi(\theta_j = 1, A(z_j), U, \Delta T), \quad \Psi(\theta_0 = 0)$$

очевидным образом осуществляется переход к критерию максимума апостериорной вероятности. Методы обнаружения и оценивания параметров АФРН по этому критерию изложим ниже.

4. Метод обнаружения аномалии формы рельсового пути

Предназначен для выработки сигнала (решения) об обнаружении АФРН в текущие моменты времени контроля состояния рельсового пути при движении локомотива.

Метод строится при следующих исходных данных.

Текущее состояние рельсового пути определяется параметром $\theta(t)$, подлежащем оценке по наблюдаемым – измеренным данным, формально представимым уравнением наблюдения (п.2).

Момент t, когда возникает АФРН, случаен, подчинен закону распределения вероятностей

$$p(t > \tau) = e^{-\lambda\tau},$$

в котором параметр λ - интенсивность потока АФРН на рельсовом пути движения локомотива при известной его скорости устанавливается по результатам выполненного контроля конкретного рельсового пути в предшествующие сеансы контроля.

Введенный закон описывает случайное распределение временных промежутков между появлениями АФРН и определяет априори переходы параметра $\theta(t)$ на множестве своих значений. Очевидно в начальный момент времени контроля рельсового пути АФРН отсутствует и $\theta(t_0 = 0) = 0$, а в процессе контроля наилучшая оценка этого параметра, как было установлено в предыдущем пункте, должна вычисляться по критерию максимума апостериорной вероятности на множестве двух альтернативных состояний: $\theta(t) = 0$, $\theta(t) = 1$; обозначим апостериорные вероятности через $p(\theta(t) = 0\,|y(t)\,)$ и $p(\theta(t) = 1\,|y(t))$. Оптимальная оценка определяется по выражению

$$\theta^{\bullet}(t) = \arg\max_{\theta(t)=0;1} p(\theta(t)\,|y(t)\,).$$

Для вычисления апостериорной вероятности (любого состояния) в соответствии с теоремой Байеса необходимо иметь условное распределение

$$p(y(t)\,|\theta(t) = 0\,) \quad \text{и} \quad p(y(t)\,|\theta(t) = 1)$$

или, что то же, функции правдоподобия.

Компоненты условного распределения определяются по плотности распределения вероятностей помеховых воздействий – шумов $\eta(t)$, сопутствующих измерениям гироскопом.

Воздействия гауссовы с нулевым средним и дисперсией пропорциональной, в общем случае, отрезку времени между последовательными измерениями, то есть $\sigma^2 = a(t_i - t_{i-1})$, так как процесс $\eta(t)$ – винеровский; в рассматриваемом методе a=1, поэтому

$$p(y(t)\,|\theta(t) = 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left\{-\frac{1}{2\Delta t}(y(t+\Delta t) - y(t) - \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \theta(s)ds)^2\right\},$$

где $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, $\int\limits_{t}^{t+\Delta t} \theta(s)ds = \begin{cases} \Delta t - u, \text{при} \quad \tau \text{ - t = u, } 0 \leq \text{u} \leq \text{t,} \\ 0, \text{при} \quad \tau \text{ - t} > \Delta\text{t} \end{cases}$

$$p(y(t)\,|\theta(t) = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left\{-\frac{1}{2\Delta t}(y(t+\Delta t) - y(t))^2\right\},$$

случайный промежуток $\tau - t \geq 0$ определяется априори вероятностью отсутствия АФРН

$$p(\theta(t) = 0) = 1 - e^{-\lambda\, t}$$

или плотностью

$$p(u) = \lambda e^{-\lambda\, t}.$$

Теперь можно записать выражение по теореме полной вероятности

$$p(y(t)\,|\theta(t) = 0) =$$
$$= \int\limits_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\Delta t}(y(t+\Delta t) - y(t) - (\Delta t - u))^2 \right\} \lambda e^{-\lambda \mathrm{u}} du +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\Delta t}(y(t+\Delta t) - y(t))^2 \right\} \lambda e^{-\lambda\, t},$$

где первое слагаемое в правой части соответствует априори событию - отсутствию АФРН с вероятностью $\lambda e^{-\lambda\, t}$, а второе – априори событию – АФРН имеется с вероятностью $\lambda e^{-\lambda\Delta\, t}$.

Достаточно очевидным образом выписывается выражение

$$p(y(t+\Delta t)\,|\theta(t) = 0\ , \theta(t+\Delta t) = 0)$$

для события $\theta(s) \equiv 0$ на всем отрезке $\Delta t : t \le s \le t + \Delta t$ для любого t,

$$p(y(t+\Delta t)\,|\theta(t) = 0\ , \theta(t+\Delta t) = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\Delta t}(y(t+\Delta t) - y(t))^2 \right\}$$

и выражения для априори переходных вероятностей параметра $\theta(t)$на множестве своих значений, то есть

$$p(\theta(t+\Delta t) = 0\,|\theta(t) = 0, y(t)) \text{ и } \quad p(\theta(t) = 0\,|y(t)) \equiv p(\theta(t) = 0\,|\theta(t) = 0, y(t))\ .$$

При таких исходных данных можно построить выражения для апостериорных вероятностей событий $\theta(t + \Delta t) = 0$ и $\theta(t) = 0$:

$$p(\theta(t+\Delta t) = 0\,|\theta(t) = 0, y(t), y(t+\Delta t)) \text{ и } \quad p(\theta(t) = 0\,|y(t) = 0, y(t+\Delta t))\ ,$$

из которых затем в результате их совместного преобразования и предельного перехода при $\Delta t \to 0$, выводится стохастическое дифференциальное уравнение для вычисления искомых апостериорных вероятностей в зависимости от выборки измерений в каждый текущий момент и определения по ним оптимальной оценки $\theta^{\bullet}(t)$. Соответствующие действия выполняются, следуя [8-10], и приводят к уравнению

$$dp(\theta(t) = 0\,|y(t)) = -p(\theta(t) = 0\,|y(t)\,)[\lambda - (1 - p^2(\theta(t) = 0\,|y(t)\,)]dt +$$

$$+p(\theta(t)=0\,|y(t)\,)](1-p(\theta(t)=0\,|y(t)\,)dy(t);$$

начальные условия для процесса $\theta(t)$ известны: $\theta(t_0)=0$, $t_0=0$. Это уравнение сводится к интегральному виду

$$p(\theta(t)=0|y(t))=p(\theta(t_0)=0|y(t_0))-\int\limits_0^t p(\theta(s)=$$
$$=0|y(s))[\lambda-(1-p^2(\theta(s)=0|y(s)))]ds+$$
$$+\int\limits_0^t p(\theta(s)=0|y(s))(1-p(\theta(s)=0|y(s)))dy(s)$$

и интегрируется на ПЭВМ методом последовательных приближений [11].

5. Метод совместного обнаружения и оценивания параметров АФРН

Метод предназначен для одновременного обнаружения и оценивания параметров АФРН по выборке измерений, представимой нелинейным стохастическим дифференциальным уравнением

$$dy(t)=\theta(t)F(t,z_j(t))d(t)+d\eta(t)$$

для марковского наблюдаемого процесса $y(t)$ и уравнениям динамики каждого типа - АФРН как уравнениям состояния, представимым нелинейными стохастическими уравнениями Ланжевена

$$dz_j(t)=\Phi_j(t,z_j(t))dt+dw(t)$$

для марковского ненаблюдаемого процесса $z(t)$ с учетом фильтрации аддитивно воздействующих на него импульсных $\vartheta(t)$ и узкополосных $u(t)$ помех, порождаемых при движении локомотива по рельсам реальной формы со стыками, поворотами и стрелочными переводами.

В качестве критерия оптимальности оценивания параметров каждого типа АФРН принимается максимум апостериорной вероятности на множестве возможных значений её параметров, а в качестве критерия оптимальности обнаружения АФРН – максимум выходного эффекта от обобщенного обновляющего процесса в каком-то из M каналов, согласованных с соответствующими моделями динамики АФРН.

В основу формирования критерия примем известное [12] рекуррентное соотношение Стратоновича

$$p(z_{j,i},t_i\,|y_i,t_i\,)=\frac{\sum\limits_{z_{j,i}}p(z_{j,i-1},t_{i-1}\,|y_{i-1},t_{i-1}\,)\vartheta(y_i,z_{j,i},t_i\,|y_{i-1},z_{j,i-1},t_{i-1}\,)}{\sum\limits_{z_{j,i}}\sum\limits_{z_{j,i-1}}p(z_{j,i-1},t_{i-1}\,|y_{i-1},t_{i-1}\,)\vartheta(y_i,z_{j,i},t_i\,|y_{i-1},z_{j,i-1},t_{i-1}\,)}$$

для апостериорной вероятности марковского процесса с дискретными состояниями – значениями компонент вектора параметров АФРН и, естественно, будем считать компоненты независимыми. Тогда каждый параметр АФРН можно оценивать своей апостериорной вероятностью на соответствующем N-уровневом множестве. Априори на таких множествах задается по Колмогорову матрица переходных вероятностей от одного значения к любому другому за время между измерениями. Переходы осуществляются скачком. Матрица вероятностей таких переходов имеет вид

$$\vartheta(\mathbf{z_{j,i}},\mathbf{t_i}|\mathbf{z_{j,i-1}},\mathbf{t_{i-1}}) = \begin{pmatrix} 1-\lambda_{00}\Delta t & \lambda_{01}\Delta t & \dots & \lambda_{oN}\Delta t \\ \lambda_{10}\Delta t & 1-\lambda_{11}\Delta t & \dots & \lambda_{NN}\Delta t \\ \dots\dots\dots & & & \\ \lambda_{N0}\Delta t & \lambda_{N2}\Delta t & \dots & 1-\lambda_{NN}\Delta t \end{pmatrix}$$

$t_i - t_{i-1} = \Delta t$, а переходная вероятность двумерного марковского процесса определяется по выражению

$$\vartheta(y_i, z_{j,i}, t_i\,|y_{i-1}, z_{j,i-1}, t_{i-1}) = \vartheta(z_{j,i}, t_i\,|z_{j,i-1}.t_{i-1})\vartheta(y_i, t_i\,|z_{j,i}, t_i) =$$

$$= (\delta_{i-1,i} + \Delta t\lambda_{i-1,i})\sqrt{\frac{\Delta t}{\pi N_0}}\exp\left\{-\frac{(y_i - z_{j,i})^2}{N_0}\Delta t\right\},$$

где $\mathrm{N}_0 = 2\Delta t\sigma^2$, σ^2- дисперсия белого гауссового шума.

Подставив эти вероятности в рекуррентное соотношение Стратоновича и воспользовавшись представлением экспоненты разложением в ряд Тейлора с учетом только членов порядка (Δt) а также разложением

$$(1-\gamma\Delta t)^{-1} = 1 - \gamma\Delta t + o(\Delta t),$$

получим выражение для апостериорной вероятности

$$p(z_j^k, t+\Delta t\,|y, t+\Delta t) = p(z_j^k, t\,|y, t) - p(z_j^k, t\,|y, t)\frac{(y-z_j^k)^2}{N_0}\Delta t +$$

$$+\sum_i p(z_j^i, t\,|y, t)\Delta t\;\lambda_{ik} + p(z_j^k, t\,|y, t)\sum_i p(z_j^i, t\,|y, t)\frac{(y-z_j^i)^2}{N_0}\Delta t,$$

где верхний индекс у z – это номер значения компоненты вектора параметров АФРН.

Это выражение с помощью предельного перехода при $\Delta t \to 0$ преобразуется в основное уравнение Стратоновича для апостериорной вероятности на дискретном множестве значений параметров АФРН

$$\frac{dp(z_j^k, t\,|y, t)}{dt} = \sum_i p(z_j^i, t\,|y, t) + \frac{1}{N_0}[2y(t)z_j^k(t) - (z_j^k(t))^2]p(z_j^k, t\,|y, t) -$$

$$-\frac{1}{N_0}p(z_j^k, t\,|y, t)\sum_i p(z_j^i, t\,|y, t)\,[2y(t)z_j^i(t) - (z_j^i(t))^2]).$$

В этом уравнении процесс $2y(t)z_j^k(t)-(z_j^k(t))^2$ назовем обобщенным обновляющим и примем его в качестве статистики критерия оптимальности обнаружения АФРН.

При решении задачи оценивания параметров АФРН на непрерывных множествах основное уравнение Стратоновича формируется в результате предельного перехода в среднем квадратическом от полученного уравнения на дискретном множестве и записывается в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(z(t),t\,|y(t),t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z}[A(z(t),t)p(z(t),t\,|y(t),t)]+\\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}[B(z(t),t)p(z(t),t\,|y(t),t)]+\\ &+\frac{2}{N_0}[y(t)z(t)-\frac{1}{2}z^2(t)]p(z(t),t\,|y(t),t)-\\ &-\frac{2}{N_0}p(z(t),t\,|y(t),t)\int[y(t)z(t)-\frac{1}{2}z^2(t)]p(z(t),t\,|y(t),t)dz(t),\end{aligned}$$

где первые два слагаемые в правой части представляют априорный оператор уравнения Колмогорова, для него коэффициенты сноса - $A(z(t),t)$ и диффузии - $B(z(t),t)$ вычисляются по стохастическому дифференциальному уравнения Ланжевена (по уравнению состояния), составленному для случая фильтрации импульсных и узкополосных помех.

При известном операторе Колмогорова вычисляется априорная плотность вероятности параметра АФРН в результате решения уравнения Колмогорова

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(z(t),t\,|y(t),t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z}[A(z(t),t)p(z(t),t\,|y(t),t)]+\\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}[B(z(t),t)p(z(t),t\,|y(t),t)]\end{aligned}$$

независимо от $y(t)$.

Последние два слагаемые в уравнении Стратоновича описывают влияние текущей выборки измерений $y(t)$ на апостериорную плотность параметров АФРН, то есть уравнение Стратоновича учитывает одновременно и априорные данные и результаты измерений текущего состояния рельсового пути.

Вычисление коэффициентов сноса и диффузии осуществляется непосредственно на основе их определений [13,14]

$$A(z(t),t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int[z(t)-y(t)]p(z(t),t\,|y(t),t)dz(t),$$

$$B(z(t),t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int[z(t)-y(t)]^2p(z(t),t\,|y(t),t)dz(t)$$

для каждого априори возможного типа АФРН.

Решение задачи оценивания параметров АФРН по составленному уравнению Стратоновича по существу представляет задачу идентификации. Сущность её решения заключается в выполнении на ПЭВМ следующих вычислительных операций метода достаточных координат [13].

Заключение

Принятый критерий оптимальности в виде апостериорной вероятности возникновения АФРН позволяет в полном объеме решить задачу идентификации - одновременного обнаружения и оценивания параметров АФРН по совокупности измерений гироскопами.

Однако для этого требуются априорные данные и в форме априорных распределений вероятностей относительно потока АФРН на рельсовом пути во время движения локомотива, и в форме множества возможных значений параметров АФРН различных типов и на различных участках пути, а также в форме структур и законов распределения вероятностей потоков импульсных и узкополосных помех и шумов, определяющих состояние формы рельсового пути.

Это обстоятельство приводит к существенному затруднению реализации критерия апостериорной вероятности по сравнению с критерием максимума отношения функций правдоподобия.

Решение задачи обнаружения АФРН одновременно с оцениванием её параметров обеспечивается наличием в стохастическом дифференциальном уравнении для апостериорной вероятности слагаемого в виде обобщенного обновляющего процесса.

Такой процесс есть объективная основа формирования достаточной статистики в виде функционала от него, аналогичного корреляционному интегралу согласованного фильтра при принятии решения об обнаружении АФРН по логике «$m/m-k$».

Достоверность решения определяется вероятностью превышения корреляционным интегралом порогового уровня, устанавливаемого по допустимой вероятности ложного обнаружения АФРН из-за потока импульсных и узкополосных помех при движении локомотива.

Список литературы

[1] Мороз А.И. Курс теории систем. М.: ВШ, 1987.

[2] Дмитриевский А.А. и др. Баллистика и навигация ракет. М.: Машиностроение, 1985.

[3] Дуб Дж. Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.

[4] Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1976.

[5] Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973.

[6] Ярлыков М.С., Миронов М.А. Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь, 1993.

[7] Кокс Д., Хинкли Д. Теоретическая статистика. М.: Мир, 1978.

[8] Вальд А. Последовательный анализ. М.: ФМЛ, 1960.

[9] Ширяев А.Н. Последовательный статистический анализ. М.: Наука, 1976.

[10] Розанов А.Ю. Случайные процессы. М.: Наука, 1971.

[11] Розов А.К. Алгоритмы последовательного обнаружения сигналов. С-Пб.: Политехника, 1992.

[12] Стратонович Р.Л. Условные Марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1966.

[13] Евланов Л.Г., Константинов В.М. Системы со случайными параметрами. М.: Наука, 1976.

[14] Кушнер Г.Дж.. Стохастическая устойчивость и управление. М.: Мир, 1969.