

**КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ  
И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ**

**Сухоmozгий А.А., Шеретов Ю.В.**  
Кафедра математического анализа

---

*Поступила в редакцию 03.10.2011, после переработки 25.11.2011.*

---

Предложен новый метод построения точных решений стационарных квазигидродинамических уравнений с помощью гармонических функций. Все найденные решения удовлетворяют также соответствующим системам Эйлера и Навье–Стокса.

New method of constructing the exact solutions for stationary quasi-hydrodynamic equations with the help of harmonic functions is proposed. All found solutions also satisfy to corresponding Euler and Navier–Stokes systems.

**Ключевые слова:** уравнения Навье–Стокса, квазигидродинамические уравнения, гармонические функции, точные решения.

**Keywords:** Navier–Stokes equations, quasi-hydrodynamic equations, harmonic functions, exact solutions.

## **Введение**

Методы теории функций широко применялись при построении точных решений классических моделей гидродинамики [1], [2]. В частности, с любой аналитической функцией на комплексной плоскости можно связать решение уравнений Эйлера и Навье–Стокса. Особый класс представляют собой установившиеся безвихревые течения несжимаемой жидкости. Каждому такому течению отвечает потенциал скоростей, являющийся гармонической функцией.

В статье [3] автором была предложена еще одна система уравнений гидродинамики, получившая название квазигидродинамической (КГД). Она является диссипативной, имеет точные решения в задачах Пуазейля и Куэтта и описывает течения слабосжимаемой вязкой жидкости в широком диапазоне параметров. Физические принципы, лежащие в основе теории, изложены в [4], [5]. Полученные к настоящему времени результаты указывают на наличие глубоких и разветвленных связей системы КГД с классическими моделями [6] – [10]. В рамках этого подхода разработаны новые эффективные численные методы [5], [11], [12].

В настоящей работе показано, что с любой определенной в некоторой области пространства гармонической функцией можно ассоциировать точное решение стационарных уравнений КГД, которое будет удовлетворять также системам Эйлера и Навье–Стокса.

### 1. Квазигидродинамическая система для установившихся течений

Квазигидродинамическая система, описывающая стационарные движения слабосжимаемой вязкой жидкости без учета внешних массовых сил, имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} \vec{w}, \quad (1.1)$$

$$\rho \operatorname{div} (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p = 2\eta \operatorname{div} \hat{\sigma} + \rho \operatorname{div} [(\vec{w} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{w})]. \quad (1.2)$$

Здесь символом  $\hat{\sigma}$  обозначен тензор скоростей деформаций:

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(\vec{u}) = \frac{1}{2} [(\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T].$$

Вектор  $\vec{w}$ , связанный с вектором плотности потока массы  $\vec{j}_m$  соотношением  $\vec{j}_m = \rho(\vec{u} - \vec{w})$ , вычисляется с помощью выражения

$$\vec{w} = \frac{\tau}{\rho} (\rho(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p). \quad (1.3)$$

Средняя плотность жидкости  $\rho$ , коэффициент динамической вязкости  $\eta$  и характерное время релаксации  $\tau$  считаются заданными положительными константами. Релаксационный параметр  $\tau$  определяется по формуле

$$\tau = \frac{\eta}{\rho c_s^2}.$$

Символом  $c_s$  обозначена скорость звука в среде.

Система (1.1) – (1.2) замкнута относительно неизвестных функций – скорости  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$  и давления  $p = p(\vec{x})$ , где  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$  – заданная точка в пространстве  $\mathbb{R}_x^3$ . В ее записи использованы стандартные обозначения из тензорного анализа. Например, диада  $(\vec{u} \otimes \vec{w})$  представляет собой тензор-инвариант второго ранга, полученный как прямое тензорное произведение двух векторов  $\vec{u}$  и  $\vec{w}$ . Если  $c_s \rightarrow +\infty$ , то квазигидродинамическая система переходит в классическую систему Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Аксиомы, лежащие в основе физического вывода системы (1.1) – (1.2), наиболее подробно изложены в [5].

### 2. Построение точных решений стационарных квазигидродинамических уравнений с помощью гармонических функций

Пусть  $V$  – область в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}_x^3$ ,  $\varphi = \varphi(\vec{x})$  – определенная на  $V$  произвольная гармоническая функция. Как известно, такая функция является непрерывной, аналитической и имеет непрерывные производные всех порядков. Будем трактовать  $\varphi$  как потенциал скоростей и определим векторное поле  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$  по формуле

$$\vec{u} = \nabla \varphi. \quad (2.1)$$

Это поле является соленоидальным и безвихревым, поскольку

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} (\nabla \varphi) = \Delta \varphi = 0, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{u} = \operatorname{rot} (\nabla \varphi) = 0. \quad (2.3)$$

Давление  $p = p(\vec{x})$  вычислим с помощью формулы Бернулли

$$p = A - \rho \frac{\vec{u}^2}{2}, \quad (2.4)$$

где  $A$  – произвольная постоянная.

Покажем, что пара функций  $(\vec{u}, p)$ , определяемых равенствами (2.1) и (2.4), образует точное решение системы (1.1) – (1.2). Вспомогая тождество

$$\nabla \left( \frac{\vec{u}^2}{2} \right) = (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + [\vec{u} \times \operatorname{rot} \vec{u}]$$

и учитывая (2.3), будем иметь

$$0 = \nabla \left( \rho \frac{\vec{u}^2}{2} + p \right) = \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \rho [\vec{u} \times \operatorname{rot} \vec{u}] + \nabla p = \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p.$$

Символом  $\times$  обозначено векторное произведение. Принимая во внимание (1.3), приходим к заключению о том, что

$$\vec{w} = 0. \quad (2.5)$$

Справедлива цепочка равенств

$$\operatorname{div} \hat{\sigma} = \frac{1}{2} (\Delta \vec{u} + \nabla (\operatorname{div} \vec{u})) = \nabla (\operatorname{div} \vec{u}) - \frac{1}{2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}, \quad (2.6)$$

в которой символом  $\Delta$  обозначен оператор Лапласа. Здесь использовано известное (см. [1], с. 32) векторное тождество

$$\Delta \vec{u} = \nabla (\operatorname{div} \vec{u}) - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}.$$

Из (2.6) с учетом (2.2), (2.3) находим

$$\operatorname{div} \hat{\sigma} = 0. \quad (2.7)$$

В силу (2.2), (2.5) уравнение (1.1) удовлетворяется тождественно. Представим (1.2) в эквивалентной форме

$$\rho \vec{u} \operatorname{div} \vec{u} + \frac{\rho \vec{w}}{\tau} = 2\eta \operatorname{div} \hat{\sigma} + \rho \operatorname{div} [(\vec{w} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{w})]. \quad (2.8)$$

Левая и правая части (2.8) равны нулю в силу (2.2), (2.5), (2.7) и поэтому совпадают. Таким образом, пара  $(\vec{u}, p)$  задает точное решение (1.1) – (1.2).

**Замечание.** Предложенный метод построения решений применим не только для трехмерных, но и для двумерных уравнений в случае установившихся течений.

### 3. Иллюстрирующие примеры

Рассмотрим примеры построения точных решений стационарных квазигидродинамических уравнений с помощью гармонических функций.

**Пример 1.** *Точечный источник (сток) массы.* На множестве  $\mathbb{R}_x^3 \setminus \vec{0}$  рассмотрим гармоническую функцию типа ньютонова потенциала:

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (3.1)$$

С помощью (2.1) вычислим компоненты вектора скорости

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{Q}{4\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ u_y &= \frac{Q}{4\pi} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ u_z &= \frac{Q}{4\pi} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Формула (2.4) позволяет найти распределение давления

$$p = p_\infty - \frac{\rho Q^2}{32\pi^2(x^2 + y^2 + z^2)^2}. \quad (3.3)$$

Здесь  $p_\infty$  – заданная константа.

Построенное решение (3.2), (3.3) описывает пространственное течение от точечного источника (стока) массы интенсивности  $Q$ , помещенного в начало координат. В зависимости от знака (+ или –) величина  $Q$  интерпретируется как объем жидкости, выделяемый источником или поглощаемый стоком за единицу времени. Это точное решение системы КГД было выписано в [7] в сферической системе координат.

**Пример 2.** *Диполь.* Рассмотрим гармоническую функцию

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{Q}{4\pi\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}},$$

где  $Q$  и  $d$  – положительные постоянные. С ее помощью находим компоненты поля скорости

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{x+d}{((x+d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{x-d}{((x-d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right), \\ u_y &= \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{y}{((x+d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{y}{((x-d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right), \\ u_z &= \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{z}{((x+d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{z}{((x-d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Поле давления имеет вид

$$p = p_\infty - \frac{\rho}{2}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2). \quad (3.5)$$

Зависимости (3.4), (3.5) отвечают течению от диполя, т.е. от источника и стока интенсивностей  $Q$  и  $-Q$ , расположенных в точках с координатами  $(-d, 0, 0)$  и  $(d, 0, 0)$  соответственно.

**Пример 3.** *Точечный диполь.* Гармоническая функция

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \frac{m_x x + m_y y + m_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

представляет собой потенциал скоростей течения от точечного диполя с моментом  $\vec{m} = (m_x, m_y, m_z)$ , расположенного в начале координат (см. [1], с. 279). Составляющие вектора скорости выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{3x(m_x x + m_y y + m_z z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{m_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right), \\ u_y &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{3y(m_x x + m_y y + m_z z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{m_y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right), \\ u_z &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{3z(m_x x + m_y y + m_z z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{m_z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Давление может быть найдено подстановкой (3.6) в (3.5).

## Заключение

Заметим, что все приведенные выше точные решения КГД системы удовлетворяют также классическим стационарным системам Эйлера и Навье–Стокса. Аналогичное утверждение справедливо для любого установившегося трехмерного или двумерного течения с безвихревым соленоидальным полем скорости, порождаемым заданным гармоническим потенциалом. Это свидетельствует о взаимосвязи указанных трех систем.

Перспективным является научное направление, связанное с разработкой новых методов построения точных решений стационарных и нестационарных квазигидродинамических уравнений, выяснением вопросов об условиях их единственности и физической адекватности, сравнением с решениями классических уравнений гидродинамики. Некоторые результаты в этом направлении уже опубликованы в [3] – [10].

**Список литературы**

- [1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987. — 840 с.
- [2] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М.: Наука, 1973. — 416 с.
- [3] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Мат. моделирование. — 1994. — Т. 6, № 10. — С. 35–45.
- [4] Шеретов Ю.В. Квазигидродинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды // Применение функционального анализа в теории приближений. — Тверь: Твер. гос. ун-т, 1997. — С. 127–155.
- [5] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. — М.–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009. — 400 с.
- [6] Шеретов Ю.В. О точных решениях квазигидродинамических уравнений // Применение функционального анализа в теории приближений. — Тверь: Твер. гос. ун-т, 1998. — С. 213–241.
- [7] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях уравнений Навье–Стокса, Эйлера и квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Прикл. мат. — 2010. — Вып. 2(17). — С. 41–58.
- [8] Шеретов Ю.В. Квазигидродинамические уравнения и аналитические функции // Применение функционального анализа в теории приближений. — Тверь: Твер. гос. ун-т, 2010. — С. 61–68.
- [9] Шеретов Ю.В. Методы построения точных решений квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Прикл. мат. — 2011. — Вып. 2(21). — С. 5–26.
- [10] Шеретов Ю.В. Единственность классического решения основной начально-краевой задачи для квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Прикл. мат. — 2011. — Вып. 1(20). — С. 7–20.
- [11] Elizarova T.G. Quasi-Gas Dynamic Equations. Berlin–Heidelberg: Springer, 2009. — 286 p.
- [12] Жериков А.В. Применение квазигидродинамических уравнений: математическое моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2010. — 124 с.