УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Мегралиев Я.Т.
Кафедра дифференциальных и интегральных уравнений,
Бакинский государственный университет, г. Азербайджан, Баку

Поступила в редакцию 31.10.2011, после переработки 07.12.2011.

В работе исследована одна обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказывается существование и единственность классического решения задачи.

In this work an inverse problem for the elliptic equation of second order with periodical boundary conditions is investigated. For this reason, first of all the initial problem reduces to the equivalent problem, for which the theorem of existence and uniqueness proves. Then using these facts the existence and uniqueness of the classical solution of initial problem is proved.

Ключевые слова: обратная краевая задача, эллиптическое уравнение, метод Фурье, классическое решение.
Keywords: inverse boundary problem, elliptic equation, method Fourier, classic solution.

Введение

В настоящее время теория нелокальных задач интенсивно развивается и представляет собой важный раздел теории дифференциальных уравнений с частными производными. Большой интерес в этой области представляют задачи с нелокальными интегральными условиями. Появление интегральных условий связано с тем, что при изучении некоторых физических процессов границы областей их протекания могут оказаться недоступными для непосредственных измерений, хотя известно среднее значение искомых величин. Условия такого вида могут появиться при математическом моделировании явлений, связанных с физикой плазмы [1], распространением тепла [2,3], процессом влагопереноса в капилярно-пористых средах [4], вопросами демографии и математической биологии.

1. Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим для уравнения

$$u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

в области $D_T = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le T\}$ обратную задачу с граничными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,T) = \psi(x) \quad (0 \le x \le 1), \tag{2}$$

периодическим условием

$$u(0,t) = u(1,t) \quad (0 \le t \le T), \tag{3}$$

нелокальным интегральным условием

$$\int\limits_0^1 u(x,t)dx = 0 \quad (0 \le t \le T) \tag{4}$$

и с дополнительным условием

$$u(x_0,t) = h(t) \quad (0 \le t \le T), \tag{5}$$

где $x_0 \in (0,1)$-фиксированное число,$f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(t)$ -заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ - искомые функции.

Отметим, что если $a(t)$–известная функция, то задача определения $u(x,t)$ из (1)–(4) обычно называют прямой краевой задачей или же просто прямой задачей. А в случае, когда $a(t)$–неизвестная функция, то задачи определения из (1)–(5) наряду с функцией $u(x,t)$ и неизвестной функции $a(t)$, по дополнительной информации (условие (5)), называют обратной краевой задачей.

Определение. *Классическим решением* обратной краевой задачи (1)-(5) назовём пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих следующими свойствами:

1. функция $u(x,t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1);
2. функция $a(t)$ непрерывна на $[0,T]$;
3. все условия (1)–(5) удовлетворяются в обычном смысле.

Для исследования задачи (1)-(5) сначала рассмотрим следующую задачу:

$$y''(t) = a(t)y(t) \quad (0 \le t \le T), \tag{6}$$

$$y(0) = 0, \; y'(T) = 0, \tag{7}$$

где $a(t) \in C[0,T]$-заданная функция, а $y = y(t)$-искомая функция, причем под решением задачи (6), (7) понимаем функцию $y(t)$, принадлежащую $C^2\,[0,T]$ и удовлетворяющую условиям (6), (7) в обычном смысле.

Доказывается следующая

Лемма 1. *Пусть функция* $a(t) \in C[0,T]$ *такая, что*

$$\|a(t)\|_{C[0,T]} \le R = const.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2}T^2R < 1. \tag{8}$$

Тогда задача (6), (7) *имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что задача

$$y''(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(T) = 0 \tag{9}$$

имеет только тривиальное решение.

Тогда известно [5], что задача (9) имеет одну функцию Грина и краевая задача (6), (7) эквивалентна интегральному уравнению

$$y(t) = \int_0^T G(t,\tau)a(\tau)y(\tau)d\tau \quad (0 \le t \le T), \tag{10}$$

где

$$G(t,\tau) = \begin{cases} -t, & t \in [0,\tau], \\ -\tau, & t \in [\tau, T]. \end{cases}$$

Обозначив

$$Ay(t) = \int_0^T G(t,\tau)a(\tau)y(\tau)d\tau\,, \tag{11}$$

запишем (10) в виде

$$y(t) = Ay(t). \tag{12}$$

Уравнение (12) будем изучать в пространстве $C[0,T]$.

Легко видеть, что оператор A является непрерывным в пространстве $C[0,T]$.

Покажем, что оператор A является в пространстве $C[0,T]$ сжимающим. Действительно, для любых $y(t), \overline{y}(t)$ из пространства $C[0,T]$ имеем:

$$\|A(y(t)) - A(\overline{y}(t))\|_{C[0,T]} \le \frac{1}{2}\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\,T^2\,\|y(t)-\overline{y}(t)\|_{C[0,T]}\,. \tag{13}$$

Тогда, с учетом (8), из (13) следует, что оператор A является сжимающим в $C[0,T]$. Поэтому, в пространстве $C[0,T]$ оператор A имеет единственную неподвижную точку $y(t)$, которая является единственным решением уравнения (12). Таким образом, интегральное уравнение (10) имеет в $C[0,T]$ единственное решение, следовательно, краевая задача (6), (7) также имеет в $C[0,T]$ единственное решение. Так как $y(t) = 0$ является решением краевой задачи (6), (7), то она имеет только одно тривиальное решение. Лемма доказана.

Наряду с обратной краевой задачей (1)-(5) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу. Требуется определить пару $\{u(x,t),\, a(t)\}$ функций $u(x,t)$, $a(t)$, обладающих свойствами 1) и 2) определения классического решения задачи (1)-(5), из (1)-(3),

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) \quad (0 \le t \le T), \tag{14}$$

$$h''(t)+u_{xx}(x_0,t)=a(t)h(t)+f(x_0,t) \quad (0\le t\le T). \tag{15}$$

Справедлива следующая

Лемма 2. *Пусть* $\varphi(x)$, $\psi(x)\in C[0,1]$, $h(t)\in C^2[0,T]$, $h(t)\neq 0$ *при* $t\in[0,T]$, $f(x,t)\in C(D_T)$, $\int_0^1 f(x,t)dx=0$ $(0\le t\le T)$ *и выполняются условия согласования*

$$\int_0^1\varphi(x)dx=0, \quad \int_0^1\psi(x)dx=0, \quad \varphi(x_0)=h(0), \quad \psi(x_0)=h'(T).$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Каждое классическое решение* $\{u(x,t),\, a(t)\}$ *задачи* (1)-(5) *является и решением задачи* (1)-(3), (14), (15);

2. *Каждое решение* $\{u(x,t),\, a(t)\}$*задачи* (1)-(3), (14), (15),*такое, что*

$$\frac{1}{2}T^2\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}<1, \tag{16}$$

является классическим решением задачи (1)-(5).

Доказательство. Пусть $\{u(x,t),a(t)\}$ является решением задачи (1)-(5). Интегрируя уравнение (1) по x от 0 до 1, имеем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx+u_x(1,t)-u_x(0,t)=$$

$$=a(t)\int_0^1 u(x,t)dx+\int_0^1 f(x,t)dx \quad (0\le t\le T). \tag{17}$$

Допуская, что $\int_0^1 f(x,t)dx=0$ $(0\le t\le T)$, с учётом (4), легко приходим к выполнению (14).

Далее, считая $h(t)\in C^2[0,T]$ и дифференцируя два раза (5), получаем:

$$u_{tt}(x_0,t)=h''(t) \quad (0\le t\le T). \tag{18}$$

Из (1) имеем:

$$u_{tt}(x_0,t)+u_{xx}(x_0,t)=a(t)u(x_0,t)+f(x_0,t) \quad (0\le t\le T). \tag{19}$$

Отсюда, с учетом (5) и (18), приходим к выполнению (15).

Теперь, предположим, что $\{u(x,t),a(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (14), (15). Тогда из (17), с учётом (3) и (14), находим:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx-a(t)\int_0^1 u(x,t)dx=0 \quad (0\le t\le T). \tag{20}$$

В силу (2) и $\int_0^1 \varphi(x)dx = 0, \quad \int_0^1 \psi(x)dx = 0$, очевидно, что

$$\int_0^1 u(x,0)dx = \int_0^1 \varphi(x)dx = 0, \quad \int_0^1 u_t(x,T)dx = \int_0^1 \psi(x)dx = 0. \tag{21}$$

Так как, в силу леммы 1, задача (20), (21) имеет только тривиальное решение, то $\int_0^1 u(x,t)dx = 0$, т.е. выполняется условие (4).

Теперь, из (15) и (19) получаем:

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(x_0,t) - h(t)) = a(t)(u(x_0,t) - h(t)) \quad (0 \le t \le T). \tag{22}$$

Далее, в силу (2) и $\varphi(x_0) = h(0), \ \psi(x_0) = h'(T)$, имеем:

$$\begin{cases} u(x_0,0) - h(0) = \varphi(x_0) - h(0) = 0, \\ u_t(x_0,T) - h'(T) = \psi(x_0) - h'(T) = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Из (22) и (23), в силу леммы 1, заключаем, что выполняется условие (5). Лемма доказана.

2. Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Известно [6],что система

$$1, \cos\lambda_1 x, \ \sin\lambda_1 x, \ldots, \cos\lambda_k x, \ \sin\lambda_k x, \ldots \tag{24}$$

образует базис в $L_2(0,1)$, где $\lambda_k = 2k\pi \quad (k = 1, 2, \ldots)$.

Так как система (24) образует базис в $L_2(0,1)$, то очевидно, что для каждого решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)-(3), (14),(15) его первая компонента $u(x,t)$ имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t)\cos\lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t)\sin\lambda_k x \quad (\lambda_k = 2\pi k), \tag{25}$$

где

$$u_{10}(t) = \int_0^1 u(x,t)dx,$$

$$u_{1k}(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx, \quad u_{2k}(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Применяя формальную схему метода Фурье, для определения искомых коэффициентов $u_{1k}(t) \quad (k = 0, 1, \ldots)$ и $u_{2k}(t) \quad (k = 1, 2, \ldots)$ функции $u(x,t)$ из (1) и (2) получаем:

$$u''_{10}(t) = F_{10}(t; u, a) \quad (0 \le t \le T), \tag{26}$$

$$u''_{ik}(t) - \lambda_k^2 u_{ik}(t) = F_{ik}(t; u, a) \quad (0 \le t \le T; \quad i = 1, 2; \quad k = 1, 2, \ldots), \tag{27}$$

$$u_{10} = \varphi_{10}, \quad u'_{10}(T) = \psi_{10}, \tag{28}$$

$$u_{ik}(0) = \varphi_{ik}, \quad u'_{ik}(T) = \psi_{ik} \quad (i = 1, 2; k = 1, 2, \ldots), \tag{29}$$

где

$$F_{1k}(t) = a(t)u_{1k}(t) + f_{1k}(t) \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$f_{10}(t) = \int_0^1 f(x,t)dx, \quad f_{1k}(t) = 2\int_0^1 f(x,t)\cos\lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$\varphi_{10} = \int_0^1 \varphi(x)dx, \quad \psi_{10} = \int_0^1 \psi(x)dx,$$

$$\varphi_{1k} = 2\int_0^1 \varphi(x) cos \lambda_k x dx, \quad \psi_{1k} = 2\int_0^1 \psi(x) cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$F_{2k}(t) = a(t)u_{2k}(t) + f_{2k}(t), \quad f_{2k}(t) = 2\int_0^1 f(x,t)\sin\lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$\varphi_{2k} = 2\int_0^1 \varphi(x)\sin\lambda_k x dx, \quad \psi_{2k} = 2\int_0^1 \psi(x)\sin\lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Далее, из (26)-(29) находим:

$$u_{10}(t) = \varphi_{10} + \psi_{10} t + \int_0^T G_0(t,\tau) F_{10}(\tau; u, a) d\tau, \tag{30}$$

$$u_{ik}(t) = \frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)}\varphi_{ik} + \frac{sh(\lambda_k t)}{\lambda_k ch(\lambda_k T)}\psi_{ik} +$$

$$+\frac{1}{\lambda_k}\int_0^T G_k(t,\tau) F_{ik}(\tau; u, a) d\tau \quad (i = 1, 2; \quad k = 1, 2, \ldots), \tag{31}$$

где

$$G_0(t,\tau) = \begin{cases} -t, & t \in [0,\tau] \\ -\tau, & t \in [\tau, T], \end{cases}$$

$$G_k(t,\tau) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2ch(\lambda_k T)}\left[sh(\lambda_k(T+t-\tau)) - sh(\lambda_k(T-(t+\tau)))\right], & t \in [0,\tau], \\ -\dfrac{sh(\lambda_k(T-(t+\tau))) - sh(\lambda_k(T-(t-\tau)))}{2ch(\lambda_k T)}, & t \in [\tau, T]. \end{cases}$$

После подстановки выражений $u_{1k}(t) \quad (k = 0, 1, \ldots)$ и $u_{2k}(t) \quad (k = 1, 2, \ldots)$ в (25), для определения компоненты $u(x,t)$ решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)-(3), (14), (15), получаем:

$$u(x,t) = \varphi_{10} + \psi_{10}t + \int_0^T G_0(t,\tau)F_{10}(\tau; u, a)d\tau +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)}\varphi_{1k} + \frac{sh(\lambda_k t)}{\lambda_k ch(\lambda_k T)}\psi_{1k} + \frac{1}{\lambda_k}\int_0^T G_k(t,\tau)F_{1k}(\tau; u, a)d\tau\right\}\cos\lambda_k x +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)}\varphi_{2k} + \frac{sh(\lambda_k t)}{\lambda_k ch(\lambda_k T)}\psi_{2k} + \frac{1}{\lambda_k}\int_0^T G_k(t,\tau)F_{2k}(\tau; u, a)d\tau\right\}\sin\lambda_k x. \tag{32}$$

Теперь, из (15), с учетом (25), имеем:

$$a(t) = h^{-1}(t)\left\{h''(t) - f(x_0,t) - \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 u_{1k}(t)\cos\lambda_k x_0 - \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 u_{2k}(t)\sin\lambda_k x_0\right\}. \tag{33}$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)-(3), (14) , (15) подставим выражение (31) в (33):

$$a(t) = h^{-1}(t)\left\{h''(t) - f(x_0,t) - \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left[\frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)}\varphi_{1k} +\right.\right.$$

$$\left. + \frac{sh(\lambda_k t)}{\lambda_k ch(\lambda_k T)}\psi_{1k} + \frac{1}{\lambda_k}\int_0^T G_k(t,\tau)F_{1k}(\tau; u, a)d\tau\right]\cos\lambda_k x_0 -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left[\frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)}\varphi_{2k} + \frac{sh(\lambda_k t)}{\lambda_k ch(\lambda_k T)}\psi_{2k} +\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\lambda_k}\int_0^T G_k(t,\tau)F_{2k}(\tau; u, a)d\tau\right]\sin\lambda_k x_0\right\}. \tag{34}$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), (14), (15) свелось к решению системы (32), (34) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $a(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1)-(3), (14), (15) важную роль играет следующая

Лемма 3. *Если* $\{u(x,t), a(t)\}$ *- любое классическое решение задачи* (1)-(3), (14),(15), *то функции*

$$u_{10}(t) = \int_0^1 u(x,t)dx,$$

$$u_{1k}(t)=2\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx,\quad u_{2k}(t)=2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx\quad (k=1,2,\ldots).$$

удовлетворяют системе (30), (31).

Замечание. Из леммы 3 следует, что для доказательства единственности решения задачи (1)-(3), (14),(15) достаточно доказать единственность решения системы (32), (34).

Теперь рассмотрим следующие пространства:

Обозначим через $B_{2,T}^3$ [7], совокупность всех функций вида

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_{1k}(t)\cos\lambda_k x+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k}(t)\sin\lambda_k x\quad (\lambda_k=2\pi k),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_{1k}(t)\quad (k=0,1,\ldots)$ и $u_{2k}(t)\quad (k=1,2,\ldots)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$J_T(u)\equiv\|u_{10}(t)\|_{C[0,T]}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_{1k}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty.$$

В этом множестве операции сложения и умножения на числа (действительные) определим обычном образом; под нулевым элементом этого множества будем понимать функцию $u(x,t)\equiv 0$ на D_T, а норму в этом множестве определим формулой

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}=J_T(u).$$

Докажем, что все эти пространства банаховы. Действительно, справедливость первых двух аксиом нормы очевидна, а справедливость третьей аксиомы нормы легко устанавливается с помощью сумматорного неравенства Минковского; следовательно, $B_{2,T}^3$ является линейным нормированным пространством. Докажем его полноту. Пусть

$$u_n(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_{1k,n}(t)\cos\lambda_k x+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k,n}(t)\sin\lambda_k x\quad (n=1,2,\ldots)$$

– любая последовательность, фундаментальная в $B_{2,T}^3$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_ε, что

$$\|u_n(x,t)-u_m(x,t)\|_{B_{2,T}^3}=\|u_{10,n}(t)-u_{10,m}(t)\|_{C[0,T]}+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_{1k,n}(t)-u_{1k,m}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left\|u_{2k,n}(t)-u_{2k,m}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon \quad \text{для любых} \quad n,m\geq n_\varepsilon. \tag{35}$$

Следовательно, при любом фиксированном $k \quad (k=1,2,\ldots)$:

$$\left\|u_{10,n}(t)-u_{10,m}(t)\right\|_{C[0,T]}<\varepsilon,$$

$$\left\|u_{1k,n}(t)-u_{1k,m}(t)\right\|_{C[0,T]}<\varepsilon,$$

$$\left\|u_{2k,n}(t)-u_{2k,m}(t)\right\|_{C[0,T]}<\varepsilon \quad \text{для любых} \quad n,m\geq n_\varepsilon. \tag{36}$$

А это означает, что последовательность $\{u_{10,n}(t)\}_{n-1}^{\infty}$ и при любом фиксированном $k \quad (k=1,2,\ldots)$ последовательности $\{u_{1k,n}(t)\}_{n-1}^{\infty}, \{u_{2k,n}(t)\}_{n-1}^{\infty}$ фундаментальны в $C[0,T]$ и, следовательно, в силу полноты $C[0,T]$, сходятся в пространстве $C[0,T]$:

$$u_{10,n}(t)\overset{C[0,T]}{\to}u_{10,0}(t)\in C[0,T] \quad \text{при } n\to\infty,$$

$$u_{1k,n}(t)\overset{C[0,T]}{\to}u_{1k,0}(t)\in C[0,T] \quad \text{при } n\to\infty,$$

$$u_{10,n}(t)\overset{C[0,T]}{\to}u_{10,0}(t)\in C[0,T] \quad \text{при } n\to\infty. \tag{37}$$

Далее, в силу (35), для любого фиксированного номера N:

$$\left\|u_{10,n}(t)-u_{10,m}(t)\right\|_{C[0,T]}+\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\lambda_k^3\left\|u_{1k,n}(t)-u_{1k,m}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\lambda_k^3\left\|u_{2k,n}(t)-u_{2k,m}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon \quad \text{для любых} \quad n,m\geq n_\varepsilon. \tag{38}$$

Пользуясь соотношениями (37) и переходя к пределу при $m\to\infty$ в (38), получаем:

$$\left\|u_{10,n}(t)-u_{10,0}(t)\right\|_{C[0,T]}+\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\lambda_k^3\left\|u_{1k,n}(t)-u_{1k,0}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\lambda_k^3\left\|u_{2k,n}(t)-u_{2k,0}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\varepsilon \quad \text{для любого} \quad n\geq n_\varepsilon. \tag{39}$$

Отсюда, в силу произвольности N (или одно и тоже, переходя к пределу при $N \to \infty$), получаем:

$$\|u_{10,n}(t) - u_{10,0}(t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \|u_{1k,n}(t) - u_{1k,0}(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \|u_{2k,n}(t) - u_{2k,0}(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon \quad \text{для любого} \quad n \ge n_\varepsilon. \tag{40}$$

Примем обозначение

$$u_0(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k,0}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k,0}(t) \sin \lambda_k x.$$

Так как $u_0(x,t) = [u_0(x,t) - u_{n_\varepsilon}(x,t)] + u_{n_\varepsilon}(x,t)$ и, в силу (40), $u_0(x,t) - u_{n_\varepsilon}(x,t) \in \in B_{2,T}^3$, а также $u_{n_\varepsilon}(x,t) \in B_{2,T}^3$, то получаем, что

$$u_0(x,t) \in B_{2,T}^3.$$

Таким образом, в силу (40), для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что

$$\|u_n(x,t) - u_0(x,t)\|_{B_{2,T}^3} \le \varepsilon \quad \text{для любого} \quad n \ge n_\varepsilon.$$

А это означает, что последовательность $u_n(x,t)$ сходится в $B_{2,T}^3$ к элементу $u_0(x,t) \in B_{2,T}^3$. Этим полнота и, следовательно, банаховость пространства $B_{2,T}^3$ доказана.

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^3$, в частности, обладает следующими свойствами:

$$u(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t) \in C(D_T), \quad u_{xxx}(x,t) \in C\left([0,T];\, L_2(0,1)\right);$$

$$u(0,t) = u(1,t), \quad u_x(0,t) = u_x(1,t), \quad u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) \quad (0 \le t \le T).$$

Через E_T^3 обозначим пространство $B_{2,T}^3 \times C[0,T]$ вектор-функций $z(x,t) = = \{u(x.t), a(t)\}$ с нормой

$$\|z\|_{E_T^3} = \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

Очевидно, что E_T^3 является банаховым пространством.

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^3 оператор

$$\Phi(u,a) = \{\Phi_1(u,a), \Phi_2(u,a)\},$$

где

$$\Phi_1(u,a) = \tilde{u}(x,t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_{2k}(t) \sin \lambda_k x, \tag{41}$$

$$\Phi_2(u,a) = \tilde{a}(t), \tag{42}$$

где $\tilde{u}_{10}(t)$, $\tilde{u}_{ik}(t)$, $k = 1, 2, \ldots)$ и $\tilde{a}(t)$ равны соответственно правым частям (30), (31) и (34).

Нетрудно видеть, что

$$\frac{sh(\lambda_k t)}{ch(\lambda_k T)} < 1 \quad (0 \le t \le T), \qquad \frac{ch(\lambda_k (T-t))}{ch(\lambda_k T)} \le 1 \quad (0 \le t \le T),$$

$$\frac{sh(\lambda_k (T+t-\tau))}{ch(\lambda_k T)} \le 1 \quad (0 \le t \le \tau \le T), \qquad \frac{sh(\lambda_k (T-(t+\tau))}{ch(\lambda_k T)} \le 1 \quad (0 \le t \le \tau \le T),$$

$$\frac{sh(\lambda_k (T-(t-\tau))}{ch(\lambda_k T)} \le 1 \quad (0 \le t \le \tau \le T), \qquad \frac{sh(\lambda_k (T-(t-\tau))}{ch(\lambda_k T)} \le 1 \quad (0 \le \tau \le t \le T).$$

Учитывая эти соотношения, с помощью нетрудных преобразований находим:

$$\|\tilde{u}_{10}(t)\|_{C[0,T]} \le |\varphi_{10}| + T\,|\psi_{10}| + 2T\sqrt{T}\left(\int\limits_0^T |f_{10}(\tau)|^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+2T^2\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|u_{10}(t)\|_{C[0,T]}\,, \tag{43}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,\|\tilde{u}_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \le 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,|\varphi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\,|\psi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{T}\left(\int\limits_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\,|f_{ik}(\tau)|)^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+2T\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\,\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{44}$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \le \left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\|h''(t) - f(x_0,t)\|_{C[0,T]} + \frac{\sqrt{6}}{12}\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,|\varphi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} +\right.$$

$$+\frac{\sqrt{6}}{12}\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\,|\psi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{6T}}{6}\sum_{i=1}^{2}\left(\int\limits_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\,|f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{\sqrt{6}T}{6}\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\left\|u_{ik}(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg\}. \tag{45}$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (14),(15) удовлетворяют следующим условиям:
1. $\varphi(x)\in C^2[0,1]$, $\varphi'''(x)\in L_2(0,1)$, $\varphi(0)=\varphi(1)$, $\varphi'(0)=\varphi'(1)$, $\varphi''(0)=\varphi''(1)$.
2. $\psi(x)\in C^1[0,1]$, $\psi''(x)\in L_2(0,1)$, $\psi(0)=\psi(1)$, $\psi'(0)=\psi'(1)$.
3. $f(x,t), f_x(x,t)\in C(D_T), f_{xx}(x,t)\in L_2(D_T)$,
$f(0,t)=f(1,t), f_x(0,t)=f_x(1,t) \quad (0\le t\le T)$.
4. $h(t)\in C^2[0,T], h(t)\neq 0$ при $t\in[0,T]$.

Тогда из (43)-(45) имеем:

$$\left\|\tilde{u}(x,t)\right\|_{B^3_{2,T}}\le A_1(T)+B_1(T)\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u(x,t)\right\|_{B^3_{2,T}}, \tag{46}$$

$$\left\|\tilde{a}(t)\right\|_{C[0,T]}\le A_2(T)+B_2(T)\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u(x,t)\right\|_{B^3_{2,T}}, \tag{47}$$

где

$$A_1(T)=\left\|\varphi(x)\right\|_{L_2(0,1)}+T\left\|\psi(x)\right\|_{L_2(0,1)}+2T\sqrt{T}\left\|f(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}+$$

$$+4\left\|\varphi'''(x)\right\|_{L_2(0,1)}+4\left\|\psi''(x)\right\|_{L_2(0,1)}+4\sqrt{T}\left\|f_{xx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)},$$

$$B_1(T)=2T^2+2T,$$

$$A_2(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\Big\{\left\|h''(t)-f(x_0,t)\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+\frac{\sqrt{6}}{6}\left\|\varphi'''(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\frac{\sqrt{6}}{6}\left\|\psi''(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\frac{\sqrt{6T}}{3}\left\|f_{xx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}\Big\},$$

$$B_2(T)=\frac{\sqrt{6}}{6}\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}T.$$

Из неравенств (46), (47) заключаем:

$$\left\|\tilde{u}(x,t)\right\|_{B^3_{2,T}}+\left\|\tilde{a}(t)\right\|_{C[0,T]}\le A(T)+B(T)\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u(x,t)\right\|_{B^3_{2,T}}, \tag{48}$$

где

$$A(T)=A_1(T)+A_2(T),\quad B(T)=B_1(T)+B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1-4 *и*

$$(A(T)+2)^2B(T)<1. \tag{49}$$

Тогда задача (1)-(3), (14),(15) *имеет в шаре* $K=K_R(\|z\|_{E^3_T}\le R=A(T)+2)$ *пространства* E^3_T *единственное решение.*

Доказательство. В пространстве E_T^3 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \tag{50}$$

где $z = \{u, a\}$, компоненты $\Phi_i(u, a)$ $(i = 1, 2)$ оператора $\Phi(u, a)$ определены правыми частями уравнений (32),(34).

Рассмотрим оператор $\Phi(u, a)$ в шаре $K = K_R$ из E_T^3. Аналогично (48) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^3} \leq A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \tag{51}$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_s\|_{E_T^3} \leq B(T)R(\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^3}). \tag{52}$$

Тогда из оценок (51) и (52), с учетом (49), следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a\}$, которая является единственным в шаре $K = K_R$ решением уравнения (50), т.е. $\{u, a\}$ является в шаре $K = K_R$ единственным решением системы (32), (34).

Функция $u(x, t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^3$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x, t)$ и $u_{xx}(x, t)$ в D_T.

Теперь из (26) и (27), соответственно, имеем:

$$\|u_{10}''(t)\|_{C[0,T]} \leq \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_{10}(t)\|_{C[0,T]} + 2 \left\| \|f(x,t)\|_{C[0,T]} \right\|_{L_2(0,1)},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|u_{ik}''(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} \left\| \|a(t)u_x(x,t) + f_x(x,t)\|_{C[0,T]} \right\|_{L_2(0,1)}.$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(x, t)$ непрерывна в D_T.

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3),(14) и (15) удовлетворяются в обычном смысле. Следовательно, $\{u(x, t), a(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (14),(15). В силу леммы 3, оно единственное. Теорема доказана.

С помощью леммы 2 доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1,

$$\int_0^1 f(x,t)dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad \frac{1}{2}(A(T) + 2)T^2 < 1$$

и выполнены условия согласования

$$\int_0^1 \varphi(x)dx = 0, \quad \int_0^1 \psi(x)dx = 0, \quad \varphi(x_0) = h(0), \quad \psi(x_0) = h'(T).$$

Тогда задача (1)-(5)*имеет в шаре* $K = K_R(\|z\|_{E_T^3} \leq A(T) + 2)$ *пространства* E_T^3 *единственное классическое решение.*

Заключение

В работе доказано существование и единственность решения одной обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с периодическими краевыми условиями. Пользуясь этими фактами доказано существование и единственность классического решения одной обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с интегральным условием.

Список литературы

[1] Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1980. — Т. 16, № 11. —С. 1925–1935.

[2] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. — 1963. — v. 5, № 21. —P. 155–160.

[3] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. — 1977. — Т. 13, № 2. —С. 294–304.

[4] Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. — 1982. — Т. 18, № 1. — С. 72–81.

[5] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы — М.: Наука, 1969. — 526 с.

[6] Будак Б.М. Сборник задач по математической физике / Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов — М.: Наука, 1972. — 668 с.

[7] Худавердиев К.И. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью / К. И. Худавердиев, А. А. Велиев.— Баку: Чашыоглы, 2010. — 168 с.