УДК 519.214.4

СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ САМОНОРМИРОВАННЫХ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН К НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ

Жданов И.И.
Кафедра математической статистики, факультет ВМиК,
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 05.09.2011, после переработки 17.10.2011.

В статье доказано, что для слабой сходимости самонормированных сумм независимых случайных величин к нормальному распределению достаточно, чтобы распределения слагаемых принадлежали одному типу из области притяжения нормального закона. Это условие является необходимым, если случайные величины симметричны.

In the paper it is proved that selfnormalized sums of independent random variables weakly converge to the normal law provided that distributions of the random variables belong to a type from the domain of attraction of the normal law. This condition is necessary if random variables are symmetric.

Ключевые слова: самонормированные суммы, область притяжения нормального закона, слабая сходимость.
Keywords: selfnormalized sums, domain of attraction of the normal law, weak convergence.

1. Введение

Исследованию асимптотических свойств самонормированных сумм независимых случайных величин посвящено большое число публикаций, см., например, [1], [2] и указанную там литературу. В указанных статьях найдены критерии для слабой сходимости самонормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. В настоящей стратье мы обобщаем этот результат из статьи [1].

Пусть независимые одинаково распределенные случайные величины $Y_n, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Пусть даны положительные числа $a_n, n \in \mathbb{N}$, такие, что $0 < a = \inf_{n \geqslant 1} a_n < \sup_{n \geqslant 1} a_n = c < \infty$. Построим последовательность $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ случайных величин $X_n = a_n Y_n$. Обозначим $S_n = X_1 + \dots + X_n, V_n^2 = X_1^2 + \dots + V_n^2$. Мы будем иметь дело с самонормированными суммами S_n/V_n. Условимся считать, что отношение $S_n/V_n = 0$, если $X_1 + \dots + X_n = 0$.

2. Доказательство основного результата

Следующая теорема обобщает теорему из статьи [1] .

Теорема. *Для того чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} P\Big\{\frac{S_n}{V_n} < x\Big\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du, x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty), \tag{1}$$

достаточно, чтобы функция распределения $F(x) = P\{Y_1 < x\}, x \in \mathbb{R}$, *принадлежала области притяжения нормального распределения* Φ *и* $EY_1 = 0$. *Это условие является необходимым, если* F *– симметричная функция распределения.*

Доказательство. Предположим, что функция распределения F принадлежит области притяжения нормального распределения Φ и $EY_1 = 0$. Ниже мы докажем два утверждения: существуют положительные числа $B_n, n \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\lim_{n\to\infty} P\Big\{\frac{S_n}{B_n} < x\Big\} = \Phi(x), x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n^2}{B_n^2} = 1 \text{ по вероятности }. \tag{3}$$

Из этих утверждений в силу известной теоремы (см. [5], стр. 281) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{S_n}{V_n} < x\} = \lim_{n\to\infty} P\{\frac{S_n}{B_n}\frac{B_n}{V_n} < x\} = \Phi(x), x \in \mathbb{R}.$$

Докажем утверждение (2). Обозначим $F_n(x) = P\{X_n < x\}$ функцию распределения случайной величины X_n. Если $EY_1^2 < \infty$, то можно положить $B_n^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 EY_1^2$. Действительно, в этом случае применима центральная предельная теорема, так как выполнено условие Линдеберга:

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x) = \frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \int_{|x|>\varepsilon B_n/|a_k|} x^2 dF(x)$$
$$\le \frac{c^2}{a^2 n} n \int_{|x|>\varepsilon B_n/c} x^2 dF(x) = \frac{c^2}{a^2}\int_{|x|>\varepsilon B_n/c} x^2 dF(x) \to 0, n\to\infty, \varepsilon > 0.$$

Далее предполагается, что $EY_1^2 = \infty$. Так как функция распределения F принадлежит области притяжения нормальной функции распределения Φ, то

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{D_n} - A_n < x\} = \Phi(x), x \in \mathbb{R},$$

при некотором выборе вещественных чисел A_n и $D_n > 0, n \in \mathbb{N}$. По известной теореме (см. [4], стр. 36) можно положить $D_n = n^{1/2}h(n)$, где $h(x), x \in (0, \infty)$, – некоторая положительная функция, медленно меняющаяся в смысле Карамата. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = \infty$. По известной теореме (см. [3], стр. 136) выполняются условия, для любого $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} nP\{|Y_1| > \varepsilon D_n\} = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{D_n^2}\Big(\int_{|x|\le\varepsilon D_n} x^2 dF(x) - \Big(\int_{|x|\le\varepsilon D_n} x dF(x)\Big)^2\Big) = 1. \tag{5}$$

Можно выбрать последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$ положительных чисел со следующими свойствами: $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n D_n = \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\varepsilon_n^2 D_n^2}\Big(\int_{|x|\leq\varepsilon_n D_n} x^2 dF(x) - \Big(\int_{|x|\leq\varepsilon_n D_n} x dF(x)\Big)^2\Big) = \infty. \tag{6}$$

Обозначим $C_n = \varepsilon_n D_n$ и докажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} P\{|X_k| > C_n\} = 0, \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{C_n^2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\int_{|x|\leq C_n} x^2 dF_k(x) - \Big(\int_{|x|\leq C_n} x dF_k(x)\Big)^2\Big) = \infty. \tag{8}$$

Условие (7) является следствием неравенства $P\{|X_k| > C_n\} \leq P\{|Y_1| > \varepsilon D_n/c\}$ и условия (4). Далее, в силу известной теоремы (см. стр. [3], 192) принадлежность функции распределения F области притяжения нормального распределения Φ влечет конечность асолютного момента $E|Y_1|^\alpha$ для любого $\alpha \in (0,2)$. Заметим, что

$$\Big|\int_{|x|<C_n} x dF_k(x)\Big| \leq \int_{-\infty}^{\infty}|x| dF_k(x) = E|X_k| \leq cE|Y_1|.$$

Так как $EY_1^2 = \infty$, то $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_{|x|<\lambda} x^2 dF(x) = \infty$. В силу этого мы получим

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\int_{|x|\leq C_n} x dF_k(x)\Big)^2\Big/\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\leq C_n} x^2 dF_k(x)$$
$$\leq c^2 n\Big/\sum_{k=1}^{n} a_k^2\int_{|x|\leq C_n/c} x^2 dF(x) \leq c^2\Big/\Big(a^2\int_{|x|\leq C_n/c} x^2 dF(x)\Big) \to 0 \tag{9}$$

при $n\to\infty$. Поэтому условие (8) эквивалентно следующему условию

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{C_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\leq C_n} x^2 dF_k(x) = \infty.$$

Обозначим I_A индикаторную функцию множества A. Из неравенства $E(X_k^2 I_{\{|X_k|\leq C_n\}}) \geqslant a^2 E(Y_1^2 I_{\{|Y_1|\leq C_n/c\}})$ и из условия (6) следует, что

$$\frac{1}{C_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\leq C_n} x^2 dF_k(x) = \frac{1}{C_n^2}\sum_{k=1}^{n} E(X_k^2 I_{\{|X_k|\leq C_n\}}) \geqslant \frac{a^2 n}{C_n^2}\int_{|x|<C_n/c} x^2 dF(x) \to \infty.$$

при $n\to\infty$. Условие (8) доказано.
Обозначим

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n}\Big(\int_{|x|\leq C_n} x^2 dF_k(x) - \Big(\int_{|x|\leq C_n} x dF_k(x)\Big)^2\Big).$$

Из условия (8) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} C_n/B_n = 0$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $C_n < \varepsilon B_n$ для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Для таких

n выполняется неравенство $P\{|X_k| > \varepsilon B_n\} \le P\{|X_n| > C_n\}$. Отсюда и из (7) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P\{|X_k| > \varepsilon B_n\} = 0. \tag{10}$$

С помощью известных рассуждений, см. [3], стр. 140-141, можно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \Big(\int_{|x|\le \varepsilon B_n} x^2 dF_k(x) - \Big(\int_{|x|\le \varepsilon B_n} x dF_k(x)\Big)^2 \Big) = 1, \varepsilon > 0. \tag{11}$$

Утверждение (9) останется справедливым, если C_n заменить на εB_n. Поэтому (10) эквивалентно следующему условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|\le \varepsilon B_n} x^2 dF_k(x) = 1, \varepsilon > 0. \tag{12}$$

По уже упоминавшейся теореме (см. [3], стр. 136) условия (10) и (11) достаточны для существования вещественных чисел $A_n, n \in \mathbb{N}$, таких, что

$$\lim_{n\to\infty} P\Big\{ \frac{S_n}{B_n} - A_n < x \Big\} = \Phi(x), x \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Числа $A_n, n \in \mathbb{N}$, можно выбрать (см. [3], стр. 132) по следующему правилу

$$A_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<B_n} x dF_k(x).$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$. Так как $EX_k = a_k EY_1 = 0$, то

$$\int_{|x|<B_n} x dF_k(x) = -\int_{|x|\geqslant B_n} x dF_k(x).$$

Используя интегрирование по частям, мы получим следующую оценку для $|A_n|$:

$$\begin{aligned} |A_n| &= \Big| \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<B_n} x dF_k(x) \Big| \\ &\le \sum_{k=1}^{n} (1 - F_k(B_n) + F_k(-B_n)) + \frac{n}{B_n} \int_{B_n}^{\infty} (1 - F(x/c) + F(-x/c)) dx. \end{aligned}$$

По известным теоремам (см. [4], стр. 97, стр. 501) справедливо представление:

$$1 - F(x) + F(-x) = \frac{c(x) \exp\Big\{ \int_\alpha^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \Big\}}{x^2}, x \in (0, \infty).$$

где α – положительное число, функции $c(x)$ и $\varepsilon(x), x \in (0,\infty)$, удовлетворяют условиям $\lim\limits_{x\to\infty} c(x) = c_\infty > 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{z(x)}{2} \le c(x) \exp\Big\{ \int_\alpha^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \Big\} \le 2z(x), z(x) = c_\infty \exp\Big\{ \int_\alpha^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \Big\}$$

для любого $x \geqslant x_0$, больше или равного некоторого числа $x_0 > 0$. Поэтому найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geqslant n_0$ будет выполняться неравенство

$$|A_n| \leq \sum_{k=1}^{n}(1 - F_k(B_n) + F_k(-B_n)) + \frac{n}{B_n}\int_{B_n}^{\infty}\frac{z(x)}{x^2}dx. \tag{14}$$

С помощью правила Лопиталя мы получим

$$\lim_{y\to\infty}\int_y^{\infty}\frac{z(x)}{x^2}dx\Big/(z(x)/x) = \lim_{y\to\infty}\frac{1}{1-\varepsilon(y)} = 1.$$

Отсюда следует существование числа $y_0 > B_{n_0}$ такого, что для всех $y \geqslant y_0$ выполняется неравенство

$$\int_y^{\infty}\frac{z(x)}{x^2}dx \leq \frac{2z(y)}{y} \leq 4y\frac{h(y)}{y^2} = 4y(1 - F(y) + F(-y)).$$

Отсюда и из (14) следует, что

$$|A_n| \leq \sum_{k=1}^{n}(1 - F_k(B_n) + F_k(-B_n)) + 4\sum_{k=1}^{n}(1 - F_k(aB_n) + F_k(-aB_n)).$$

Здесь мы воспользовались соотношениями $1 - F(B_n) + F(-B_n) = P\{|Y_1| \geqslant B_n\} = P\{|X_k| \geqslant a_k B_n\} \leq P\{|X_k| \geqslant aB_n\}$. Выше отмечалось, что $\lim\limits_{n\to\infty} C_n/B_n = 0$. Поэтому выполняется неравенство $(1+a)C_n < B_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого n_0'. Если $n > n_0'$, то $P\{|X_k| \geqslant B_n\} \leq P\{|X_k| > C_n\}$ и $P\{|X_k| \geqslant aB_n\} \leq P\{|X_k| > C_n\}$. Отсюда и из (7) следует требуемое утверждение

$$\lim_{n\to\infty}|A_n| \leq 5\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}P\{|X_k| > C_n\} = 0.$$

Утверждение (13) и условие $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$ влекут (2).

Докажем утверждение (3). Если $EY_1^2 < \infty$, то утверждение (3) выполняется по теореме Райкова (см. [3], стр. 152). Далее предполагается, что $EY_1^2 = \infty$. Для любых положительных чисел ε и δ мы имеем, что

$$\begin{aligned} P\Big\{\Big|\frac{V_n^2}{B_n^2} - 1\Big| > \delta\Big\} \leq P\Big\{\Big|\frac{V^2}{B_n^2} - 1\Big| > \delta, \max_{1\leq k\leq n}|X_k| > \varepsilon B_n\Big\} \\ + P\Big\{\Big|\frac{V_n^2}{B_n^2} - 1\Big| > \delta, \max_{1\leq k\leq n}|X_k| \leq \varepsilon B_n\Big\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Первое слагаемое справа в силу условия (10) стремится к нулю при $n \to \infty$, так как

$$P\Big\{\Big|\frac{V_n^2}{B_n^2} - 1\Big| > \delta, \max_{1\leq k\leq n}|X_k| > \varepsilon B_n\Big\} \leq P\{\max_{1\leq k\leq n}|X_k| > \varepsilon B_n\} \leq \sum_{k=1}^{n}P\{|X_k| > \varepsilon B_n\}.$$

Оценим второе слагаемое в (15). Заметим, что $E(X_k^2 I_{\{|X_k|\le\varepsilon B_n\}}) = \int_{|x|\le\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x)$. В силу (12) выполняется неравенво

$$\Big|\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^n E(X_k^2 I_{\{|X_k|\le\varepsilon B_n\}} - 1\Big| < \delta/2$$

для всех n, начиная с некоторого n_0. Для $n \geqslant n_0$ справедливо:

$$P\Big\{\Big|\frac{V_n^2}{B_n^2} - 1\Big| > \delta, \max_{1\le k\le n} |X_k| \le \varepsilon B_n\Big\}$$
$$\le P\Big\{\Big|\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^n (X_k^2 I_{\{|X_k|\le\varepsilon B_n\}} - E(X_k^2 I_{\{|X_k|\le\varepsilon B_n\}}))\Big| > \frac{\delta}{2}\Big\}.$$

Правую часть можно оценить помощью неравенства Чебышева:

$$P\Big\{\Big|\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^n (X_k^2 I_{\{|X_k|\le\varepsilon B_n\}} - E(X_k^2 I_{\{|X_k|\le\varepsilon B_n\}})\Big| > \frac{\delta}{2}\Big\}$$
$$\le \frac{4\varepsilon^2}{\delta^2 B_n^2}\sum_{k=1}^n E(X_k^2 I_{\{|X_k|\le\varepsilon B_n\}}) \le \frac{4\varepsilon^2}{\delta^2}(1+\frac{\delta}{2}).$$

В результате мы получили следующую оценку вероятности слева в (15):

$$\limsup_{n\to\infty} P\Big\{\Big|\frac{V_n^2}{B_n^2} - 1\Big| > \delta\Big\} \le \frac{4\varepsilon^2}{\delta^2}\Big(1+\frac{\delta}{2}\Big).$$

Так как число $\varepsilon > 0$ можно выбрать произвольно малымб то

$$\lim_{n\to\infty} P\Big\{\Big|\frac{V_n^2}{B_n^2} - 1\Big| > \delta\Big\} = 0.$$

Тем самым утверждение (3) доказано.

Докажем необходимость условия при предположении, что случайные величины $Y_n, n \in \mathbb{N}$, симметричны. Из (16) и леммы 3 следует, что

$$\lim_{n\to\infty} E\Big(\frac{S_n}{V_n}\Big)^4 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 d\Phi(x) = 3. \tag{16}$$

Математическое ожидание под знаком предела можно записать в следующем виде

$$E\Big(\frac{S_n}{V_n}\Big)^4 = \sum_{k=1}^n E\Big(\frac{X_k^4}{V_n^4}\Big) + 6\sum_{1\le i<j\le n} E\Big(\frac{X_i^2 X_j^2}{V_n^4}\Big) + 8\sum_{1\le i<j\le n} E\Big(\frac{X_i X_j^3}{V_n^4}\Big)$$
$$+36\sum_{1\le i<j<r\le n} E\Big(\frac{X_i X_j X_r^2}{V_n^4}\Big) + 24\sum_{1\le i<j<r<k\le n} E\Big(\frac{X_i X_j X_r X_k}{V_n^4}\Big).$$

По лемме 4 все суммы, кроме первых двух, стремятся к нулю при $n\to\infty$. Поэтому (17) равносильно следующему утверждению

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^n E\Big(\frac{X_k^4}{V_n^4}\Big) + 6\sum_{1\le i<j\le n} E\Big(\frac{X_i^2 X_j^2}{V_n^4}\Big)\Big) = 3.$$

Выражая второе слагаемое через первое, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} E\Big(\frac{X_k^4}{V_n^4}\Big)=0.$$

Обозначим $W_n^2=Y_1^2+\cdots+Y_n^2$. Привлекая неравенство

$$\frac{X_k^4}{V_n^4}=\frac{X_k^4}{W_n^4}\frac{W_n^4}{V_n^4}\geqslant\frac{a^4}{c^4}\frac{Y_k^4}{W_n^4}, k=1,\dots,n,$$

мы получим

$$E\Big(\frac{\max_{1\le k\le n}Y_k^4}{W_n^4}\Big)\le\sum_{k=1}^{n}E\Big(\frac{Y_k^4}{W_n^4}\Big)\le\frac{c^4}{a^4}\sum_{k=1}^{n}E\Big(\frac{X_k^4}{V_n^4}\Big)\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Известно (см. [6]), что условие

$$\lim_{n\to\infty}E\Big(\frac{\max_{1\le k\le n}|Y_k|}{W_n}\Big)=0$$

является необходимым и достаточным для принадлежности фнкции распределения $F(x)=P\{Y_1<x\}, x\in\mathbb{R}$, области притяжения нормальной функции распределения Φ. Теорема доказана.

3. Вспомогательные утверждения

Далее мы докажем утверждения, которыми воспользовались выше. Все необходимые утверждения мы сформулируем в виде лемм.

Лемма 1. *Для любого $n\in\mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$E\Big(\frac{S_n}{V_n}\Big)^2\le 2\Big(c^2+\frac{c^4}{a^4}\Big)\max\Big\{1,\max_{1\le j\le n}|\Big(E\Big|\frac{S_j}{V_j}\Big|\Big)^2\Big\}. \tag{17}$$

Доказательство. Докажем сначала, что $E(Y_iY_j/W_n^2)\geqslant 0$ для $i\ne j, 1\le i,j\le n$. Привлекая равенство

$$\int_0^\infty \lambda^{m-1}e^{-\lambda a}d\lambda=\frac{(m-1)!}{a^m}, \tag{18}$$

справедливое для любых чисел $m\in\mathbb{N}$ и $a>0$, мы получим

$$E\Big(\frac{Y_iY_j}{W_n^2}\Big)=E\int_0^\infty Y_iY_je^{-\lambda W_n^2}d\lambda=\int_0^\infty E(Y_ie^{-\lambda Y_i^2})^2Ee^{-\lambda(W_n^2-Y_i^2-Y_j^2)}d\lambda\geqslant 0.$$

Здесь мы воспользовались теоремой Фубини и тем, что случайные величины $Y_1,\dots,Y_n$ независимы и одинаково распределены. Далее нам понадобится легко проверяемое равенство $E(Y_iY_j/V_n^2)=E(Y_1Y_2/V_n^2)$ для любых $i\ne j, 1\le i,j\le n$. Обозначим $[n/2]$ целую часть числа $n/2$,

$$S(1)=\sum_{k=1}^{[n/2]}X_k, S(2)=\sum_{m=[n/2]+1}^{n}a_{m-[n/2]}Y_m,$$

$$W^2(i)=\sum_{j=1}^{[n/2]} Y^2_{(i-1)[n/2]+j}, i=1,2.$$

Заметим, что $S(1)=S_{[n/2]}, W^2(1)=W^2_{[n/2]}$. Привлекая неравенства $W^2(i)\leq W_n^2, i=1,2,$ и равенство

$$E\Big(\frac{S(1)S(2)}{W_n^2}\Big)=\sum_{i=1}^{[n/2]}\sum_{j=[n/2]+1}^{n} E\Big(\frac{X_i a_{j-[n/2]}Y_j}{W_n^2}\Big)=\sum_{i=1}^{[n/2]}\sum_{j=[n/2]+1}^{n} a_i a_{j-[n/2]}E\Big(\frac{Y_iY_j}{W_n^2}\Big)$$

мы получим

$$\Big(E\Big|\frac{S_{[n/2]}}{W_{[n//2]}}\Big|\Big)^2=\Big(E\Big|\frac{S(1)}{W(1)}\Big|\Big)^2\geqslant E\Big(\frac{S(1)S(2)}{W_n^2}\Big)=a^2n(n-1)E\Big(\frac{Y_1Y_2}{W_n^2}\Big).$$

Было использовано то, что сл.в. $S(1)/W(1)$ и $S(2)/W(2)$ одинаково распределены и независимы. С помощью предыдущего неравенства мы получим

$$E\Big(\frac{S_n}{W_n}\Big)^2=1+2\sum_{1\leq i<j\leq n}E\Big(\frac{X_iX_j}{W_n^2}\Big)\leq 1+c^2n(n-1)E\Big(\frac{Y_1Y_2}{W_n^2}\Big)$$
$$\leq 2\max\Big\{1,c^2n(n-1)E\Big(\frac{Y_1Y_2}{V_n^2}\Big)\Big\}\leq 2\max\Big\{1,\frac{c^2}{a^2}\Big(E\Big|\frac{S_{[n/2]}}{W_{[n/2]}}\Big|\Big)^2\Big\}.$$

Так как

$$E\Big(\frac{S_n}{W_n}\Big)^2=E\Big(\frac{S_n}{V_n}\frac{V_n}{W_n}\Big)^2\geqslant\frac{1}{c^2}E\Big(\frac{S_n}{V_n}\Big)^2, E\Big|\frac{S_{[n/2]}}{W_{[n/2]}}\Big|=E\Big|\frac{S_{[n/2]}}{V_{[n/2]}}\frac{V_{[n/2]}}{W_{[n/2]}}\Big|\leq\frac{1}{a}E\Big|\frac{S_{[n/2]}}{V_{[n/2]}}\Big|,$$

то

$$E\Big(\frac{T_n}{V_n}\Big)^2\leq 2c^2\max\Big\{1,\frac{c^2}{a^4}\Big(E\Big|\frac{S_{n/2]}}{V_{[n/2]}}\Big|\Big)^2\Big\}\leq 2\Big(c^2+\frac{c^4}{a^4}\Big)\max\Big\{1,\Big(E\Big|\frac{S_{n/2]}}{V_{[n/2]}}\Big|\Big)^2\Big\}.$$

Отсюда следует (18). Лемма доказана.

Напомним, что последовательность $\{S_n/V_n\}_{n\geqslant1}$ называется *стохастически ограниченной*, если $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sup_{n\geqslant1}P\{|S_n/V_n|>\lambda\}=0$.

Лемма 2. *Если последовательность* $\{S_n/V_n\}_{n\geqslant1}$ *стохастически ограничена, то*

$$M=\sup_{n\geqslant1}E\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big|<\infty, \tag{19}$$

$$\sup_{n\geqslant1}E\Big(\frac{T_n}{W_n}\Big)^2\leq 2\Big(\frac{c^4}{a^2}+\frac{c^6}{a^6}\Big)\max\{1,M^2\}, \tag{20}$$

где $T_n=Y_1+\cdots+Y_n$.

Доказательство. От противного: предположим, что $M=\infty$. Обозначим

$$n_l=\min\Big\{n\in\mathbb{N}:E\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big|>\sqrt{l}\Big\}, l\in\mathbb{N}.$$

Такие числа $n_l, l \in \mathbb{N}$, сушествуют, так как $\limsup\limits_{n\to\infty} E|S_n/V_n| = M$. Так построенные числа образуют неограниченную последовательность, т.е. $\lim\limits_{l\to\infty} n_l = \infty$. С помощью неравенства Коши-Буняковского мы получим, для любого $d > 0$,

$$E\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big| = E\Big(\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big| I_{\{|S_n|/V_n \le d\}}\Big) + E\Big(\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big| I_{\{|S_n|/V_n > d\}}\Big)$$
$$\le d + \Big(E\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big|^2\Big)^{1/2}\Big(P\Big\{\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big| > d\Big\}\Big)^{1/2}.$$

Положим здесь $n = n_l$ и $d_l = 2^{-1}E|S_{n_l}/(V_{n_l}|$. В результате мы получим, что

$$\Big(P\Big\{\Big|\frac{S_{n_l}}{V_{n_l}}\Big| > d_l\Big\}\Big)^{1/2} \geqslant \frac{E|S_{n_l}/V_{n_l}|}{2(E|S_{n_l}/V_{n_l}|^2)^{1/2}}.$$

Положив $n = n_l$ в (16), мы получим

$$E\Big|\frac{S_{n_l}}{V_{n_l}}\Big|^2 \le 2\Big(c^2 + \frac{c^4}{a^4}\Big)\Big(E\Big|\frac{S_{n_l}}{V_{n_l}}\Big|\Big)^2.$$

Из этой оценки и из предыдущего неравенства следует, что

$$\Big(P\Big\{\Big|\frac{S_{n_l}}{V_{n_l}}\Big| > d_l\Big\}\Big)^{1/2} \geqslant \frac{a^2}{2\sqrt{2(a^4c^2 + c^4)}} > 0, l \in \mathbb{N}.$$

Это означает, что последовательность $\{S_n/V_n\}_{n\geqslant 1}$ не обладает свойством стохастической ограниченности. Мы пришли к противоречию и, следовательно, утверждение (20) справедливо.
Докажем (21). Для любого $n \in \mathbb{N}$ мы получим

$$E\Big(\frac{T_n}{W_n}\Big)^2 \le \frac{c^2}{a^2} E\Big(\frac{S_n}{V_n}\Big)^2. \tag{21}$$

Отсюда с учетом (18) и (20) следует (21). Лемма доказана.
Лемма 3. *Если последовательность* $\{S_n/V_n\}_{n\geqslant 1}$ *стохастически ограничена, то*

$$\sup_{n\geqslant 1} E\Big(\frac{S_n}{V_n}\Big)^6 < \infty.$$

Доказательство. Воспользуемся оценкой

$$E\Big(\frac{S_n}{V_n}\Big)^6 = E\Big(\frac{S_n}{W_n}\frac{W_n}{V_n}\Big)^6 \le \frac{1}{a^6} E\Big(\frac{S_n}{W_n}\Big)^6.$$

Момент шестого порядка справа можно записать в следующем виде

$$E\Big(\frac{S_n}{W_n}\Big)^6 = \sum \frac{6!}{m_1! \cdots m_n!} E\Big(\frac{X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n}}{W_n^6}\Big),$$

где суммирование распространяется на все неотрицательные целые числа $m_1, \ldots, m_n$, удовлетворяющих условию $m_1 + \cdots + m_n = 6$. Воспользуемся известной оценкой (см. [1], лемма 2.1). Далее мы считаем, что $n > 6$. Пусть

$m_{i_1} \geqslant 1, \ldots, m_{i_r} \geqslant 1$ для некоторого $r \in \mathbb{N}, r \leq 6$. Обозначим s число чисел среди $m_{i_1}, \ldots, m_{i_r}$, которые равны единице. В силу упомянутой оценки мы получим

$$\left|E\Big(\frac{X_1^{m_1}\cdots X_n^{m_n}}{W_n^6}\Big)\right| \leq c^6\Big(E\Big|\frac{T_{[n/r]}}{W_{[n/r]}}\Big|\Big)^s\Big(\frac{6!}{m_{i_1}!\cdots m_{i_r}!})\Big)^{-1/2}[n/r]^{-r}.$$

Применяя последовательно неравенство Ляпунова и неравенство (21) мы получим следующую оценку

$$E\Big|\frac{T_{[n/r]}}{W_{[n/r]}}\Big| \leq \Big(E\Big(\frac{T_{[n/r]}}{W_{[n/r]}}\Big)^2\Big)^{1/2} \leq \Big(2\Big(\frac{c^4}{a^2}+\frac{c^6}{a^6}\Big)\max\{1, M^2\}\Big)^{1/2}.$$

Обозначим $D = c^6\Big(2\Big(\frac{c^4}{a^2}+\frac{c^6}{a^6}\Big)\max\{1, M^2\}\Big)^3$. Утверждение теперь следует из приведенных выше оценок

$$E\Big(\frac{S_n}{W_n}\Big)^6 \leq 6!D\sum_{r=1}^{6} n(n-1)\cdots(n-r+1)[n/r]^{-r} \leq 6!D\sum_{r=1}^{6} r^r. \tag{22}$$

Лемма доказана.

Распределение F называется *симметричным*, если $F(X) = 1 - F(-x+0)$.

Лемма 4. *Если выполняется (16) и Y - симметричная случайная величина, то*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\leq i<j<r<k\leq n} E\Big(\frac{X_iX_jX_rX_k}{V_n^4}\Big)+\sum_{1\leq i<j<r\leq n} E\Big(\frac{X_iX_jX_r^2}{V_n^4}\Big)+\sum_{1\leq i<j\leq n} E\Big(\frac{X_iX_j^3}{V_n^4}\Big) = 0, \tag{23}$$

Доказательство. Любая симметричная случайная величина X может быть представлена в виде произведения неотрицательной случайной величины J и дискретной случайной величины Z, которая принимает значения -1 и 1 с одинаковой вероятностью. Таким образом, имеет место представление для любого $i \in N, X_i = J_iZ_i$. Очевидно, что $EZ_i = 0$. Заметим также, что $X_i^2 = J_i^2$. Отсюда:

$$V_n^4 = (X_1^2+\cdots+X_n^2)^2 = (J_1^2+\cdots+J_n^2)^2 = H_n^4$$

лемма одинаково доказывается для всех слагаемых из (24). Например:

$$E\left(\frac{X_iX_jX_r^2}{V_n^4}\right) = E\left(\frac{J_iZ_iJ_jZ_jJ_r^2}{H_n^4}\right) = EZ_iE\left(\frac{J_iJ_jZ_jJ_r^2}{H_n^4}\right) = 0$$

Лемма доказана.

Заключение

Самонормированные суммы независимых случайных величин возникают естественным образхом в целом ряде задач математической статистики. Ограничимся упоминанием только одного примера — статистики Стьюдента, она играем важную роль при проверке статистических гипотез, при построении доверительных интервалов. В теории вероятностей распределение Стьюдента служит аппроксимацией целого ряда функций от независимых случайных величин. Статистика Стьюдента может быть записана через самонрмированные суммы независимых одинаково распределенных случайных величин.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору В.М. Круглову за постановку задачи и за полезные советы при ее решении.

Список литературы

[1] Gine E., Götze F., Mason D.M. When the Student t-Statistic asymptotically standard normal? Ann. Probab., 1997, Vol. 25, No. 3, pp. 1514-1531.

[2] Chistyakov G., Gotze F. Limit distributions of studentized means. Ann. Probab. 2004, V. 32, No. 1A, pp. 28–77.

[3] Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.; Л.: Гостехиздат, 1949.

[4] Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.

[5] Крамер Г. Математические методы статистики. 2-е издание. М.: Мир, 1975.

[6] O'Brien G.L. A limit theorem for sample maxima and heavy branches in Galton-Watson trees. J. Appl. Probab., 1980, v. 17, pp. 539–545.