МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УДК 519.9

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ БЕЗ ПРИМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Катулев А.Н., Кузнецов А.Ю.
Кафедра математического моделирования

Поступила в редакцию 16.09.2011, после переработки 19.11.2011.

Доказаны теоремы, обосновывающие необходимые и достаточные условия устойчивости нелинейных динамических систем, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений, системами интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, сводящихся к нелинейным автономным дифференциальным уравнениям с обыкновенными производными. Функция Ляпунова не вводится.

Theorems proved necessary and sufficient conditions of stability nonlinear dynamic systems, which provided by differential equations, systems of equations with partial derivatives, integral and integral- differential equations, which reduces to ordinary differential equations, are developed. The Lapunov's functions aren't built.

Ключевые слова: устойчивость, нелинейность, динамическая система.
Keywords: stability, nonlinear, dynamic system.

Введение

Результаты основополагающих работ [1, 2, 3, 4] по исследованию сложных динамических систем, описываемых нелинейными системами дифференциальных уравнений, получены на основе введения и анализа функций Ляпунова – качественными методами. Однако общего алгоритма её построения не имеется [5, гл.II, §2], эвристические приёмы реализуются в частных случаях. Исследование устойчивости посредством построения фазовых портретов на практике возможно, как правило, для систем второго порядка. Поэтому существует актуальная необходимость исследования устойчивости нелинейных динамических систем без применения функции Ляпунова. В [6, гл.2, §8] функция Ляпунова в явном виде не используется, но правая часть исследуемой системы представляется в виде самосопряжённой матрицы. Такое допущение, очевидно, справедливо в частном случае.

В [7] раскрывается важность результатов об устойчивости гамильтоновых систем, а в [8] исследуется устойчивость гамильтоновых систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными и периодическими коэффициентами.

Цель статьи – получение необходимых и достаточных условий устойчивости решений нелинейных автономных систем без применения функции Ляпунова.

В основу формирования необходимых и достаточных условий устойчивости автономных нелинейных динамических систем в работе принимается известный факт: для основной и сопряжённой систем гамильтоновых уравнений одновременно невозможны асимптотически устойчивые положения равновесия и асимптотически устойчивые предельные циклы в фазовом пространстве.

1. Необходимые и достаточные условия устойчивости нелинейных автономных динамических систем

Теорема 1. Необходимыми и достаточными условиями асимптотической устойчивости нелинейной динамической системы, описываемой автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений n - го порядка

$$\dot{x}(t) = X(x(t)), \tag{1}$$

где $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ — вектор фазовых координат, $X(x(t)) =$ $= (X_1(x(t)), \ldots, X_n(x(t)))$ — в общем случае нелинейная, дважды дифференцируемая вектор- функция, являются условия положительности действительных частей собственных значений линейной сопряжённой системы

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial\,(X(x),\ p(t))}{\partial x_i}, i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

где $p(t) = (p_1(t), \ldots, p_n(t))$ — вектор сопряжённых фазовых координат, $(X(x),\ p(t))$ — скалярное произведение.

Доказательство. Сопряжённая система непосредственно исходит из канонической гамильтоновой системы [9, гл.IV, п.4.4] и имеет вид (2).

Это линейная автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений, кручение её решения противоположно по знаку кручению решения основной системы. Действительно, воспользовавшись формулой Серре-Френе [10, гл.3, §50], для системы (1) имеем выражение кручения

$$K_1 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x}_1 & \ldots & \dot{x}_n \\ . & . & . \\ x_1^{(n)} & \ldots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}}{(\dot{x}_1^2 + \cdots + \dot{x}_n^2)^{\frac{3}{2}}},$$

а для сопряжённой системы (2) - с противоположным знаком

$$K_2 = -\frac{\begin{vmatrix} \dot{p}_1 & \ldots & \dot{p}_n \\ . & . & . \\ p_1^{(n)} & \ldots & p_n^{(n)} \end{vmatrix}}{(\dot{p}_1^2 + \cdots + \dot{p}_n^2)^{\frac{3}{2}}}$$

в силу того, что структура формулы Сере-Френе одна и та же для систем (1) и (2), и она непосредственно основана на применении одного и того же линейного оператора дифференцирования [11, гл.4, §5] к правым частям систем. Противоположность знаков кручений означает, что движения по фазовым траекториям происходят в противоположных направлениях, а значит – для устойчивости решения основной системы необходимо и достаточно неустойчивости решения сопряжённой системы.

В связи с линейностью сопряжённой системы (2) составим для неё характеристическое уравнение

$$(-\lambda)^n + S_1(-\lambda)^{n-1} + S_2(-\lambda)^{n-2} + \cdots + S_{n-1}(-\lambda) + S_n = 0,$$

где S_ρ, $\rho = \overline{1,n}$, сумма главных миноров ρ - го порядка функциональной матрицы - матрицы правой части системы (2) с непрерывными частными производными во всем пространстве $-\infty < x_i < \infty$, обращающимися в нуль в точке $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. При этом необходимые и достаточные условия устойчивости решения исходной нелинейной автономной системы формируются по критерию Рауса-Гурвица или Льенара-Шипара непосредственно по определителям сопряжённой системы и записываются в виде

$$\Delta_1 = (-1)^{2n-1}S_1 < 0, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} (-1)^{2n-1}S_1 \ldots 0 & & \\ . & . & . \\ 0 & & \ldots S_n \end{vmatrix} < 0. \tag{3}$$

Покажем также, что полученные условия (3) однозначно выводят на условия теоремы 1 [1, с.611] об асимптотической устойчивости решения системы (1), записанной в [1] выражением (38) [1, с.611].

С этой целью построим функциональную матрицу сопряжённой, относительно (1), системы (2)

$$\left(-\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\right)_{k=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n} \tag{4}$$

и её транспонированную

$$\left(-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)_{k=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n}.$$

Затем построим матрицу

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} + \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)_{k=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n} \tag{5}$$

и выпишем матрицу (39) из [1, с.611]

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} + \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)_{k=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n}.$$

Непосредственно видно, что собственные значения этих матриц равны по модулю и противоположны по знаку и что собственные значения матрицы (5) вычисляются как решение уравнения

$$\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\right)_{k=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n}\eta + \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)_{k=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n}\eta = -2\lambda\eta;$$

последнее эквивалентно двум уравнениям

$$\left(-\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\right)_{k=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n}\eta=\lambda\eta,\quad \left(-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)_{k=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n}\eta=\lambda\eta$$

в силу того, что матрицы

$$\left(-\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\right)_{k=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n},\quad \left(-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)_{k=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n}$$

имеют одни и те же собственные значения. Отсюда следует, что знаки собственных значений матрицы (5) и матрицы (4) одни и те же, а значит — для асимптотической устойчивости решения системы (38) из [1] необходимо, чтобы вещественные части собственных значений матрицы (4) были положительны при $-\infty < x_i < \infty$, $i=\overline{1,n}$, а для матрицы (39) из [1, с.611] они отрицательны при $-\infty < x_i < \infty$. Однозначность соответствия результатов теоремы 1 авторов и теоремы 1 из [1, с. 611] установлена.

Доказательство завершено.

Теорема 2. Необходимыми и достаточными условиями устойчивости нелинейной системы с распределёнными параметрами, описываемой нелинейным дифференциальным уравнением с частными производными

$$\frac{\partial^{m_0}u(x(t),\ t)}{\partial t^{(m_0)}}+\frac{\partial^{m_1}u(x(t),\ t)}{\partial x_1^{(m_1)}}+\ldots$$
$$\cdots+\frac{\partial^{m_n}u(x(t),\ t)}{\partial x_n^{(n_0)}}+f(u(x(t),\ t))=0, \tag{6}$$

где t — временная координата, $x(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))$ — вектор фазовых координат, $u(x(t),\ t)$ — подлежащая вычислению неизвестная функция, $f(u(x(t),\ t))$ — заданная нелинейная функция, m_i — порядок частной производной по i - ой координате, являются необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости решения нелинейного дифференциального уравнения с обыкновенными производными

$$U^{(m_0)}(w,\ t)+(iw_1)^{m_1}U(w,\ t)+(iw_2)^{m_2}U(w,\ t)+\ldots$$
$$\cdots+(iw_n)^{m_n}U(w,\ t)+F(U(w,\ t))=0, \tag{7}$$

где $w=(w_1,\ldots,w_n)$ — вектор фазовых координат в частотной области, i — мнимая единица, $F(U(w,\ t))$ — образ Фурье функции $f(u(x,\ t))$, $U(w,\ t)$ — образ Фурье функции $u(x,\ t)$.

Доказательство. Выполнив преобразование Фурье уравнения (6)

$$\int\limits_{D_n}\left(\cdots\int\limits_{D_1}\left(\frac{\partial^{m_0}u(x(t),\ t)}{\partial t^{(m_0)}}+\frac{\partial^{m_1}u(x(t),\ t)}{\partial x_1^{(m_1)}}+\ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdots+\frac{\partial^{m_n}u(x(t),\ t)}{\partial x_n^{(n_0)}}+f(u(x(t),\ t))\right)e^{x_1w_1}dx_1\ldots\right)e^{x_nw_n}dx_n=0,$$

получим автономное нелинейное дифференциальное уравнение с обыкновенными производными (7)

$$U^{(m_0)}(w,\ t) + (iw_1)^{m_1}U(w,\ t) + (iw_2)^{m_2}U(w,\ t) + \dots$$

$$\dots + (iw_n)^{m_n}U(w,\ t) + F(U(w,\ t)) = 0$$

n – го порядка; приведем его к системе уравнений

$$\dot{U} = U_1,\ \dot{U}_1 = U_2, \dots$$

$$\dots,\ \dot{U}_{n-2} = U_{n-1},\ \dot{U}_{n-1} = -(iw_1)^{m_1}U - \dots - (iw_n)^{m_n}U - F(U).$$

Теперь применим теорему 1 к этой системе, то есть построим для неё сопряжённую систему

$$\dot{p}_1 = ((iw_1)^{m_1} + \dots + (iw_n)^{m_n} + \frac{\partial F(U)}{\partial U})p_n,\ \dot{p}_2 = -p_1, \dots,\ \dot{p}_n = -p_{n-1}$$

и сформируем по теореме 1 необходимые и достаточные условия устойчивости исследуемой нелинейной системы.

В силу того, что преобразование Фурье линейно и взаимно однозначно отображает пространство $L_2(-\infty,\ \infty)$ на себя, а также того, что в соответствии с теоремой Планшереля [11, гл.8, п.5] норма $\|u(x(t),\ t)\|_2$ функции- оригинала в пространстве фазовых координат уравнения (6) равна норме $\|U(w(t),\ t)\|$ изображения в пространстве координат $w_1, \dots, w_n$, необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости решения $u(x(t),\ t)$ исходного дифференциального уравнения (6) представляются необходимыми и достаточными условиями асимптотической устойчивости решения $U(w,\ t)$ обыкновенного дифференциального уравнения (7).

Доказательство завершено.

Теорема 3. Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости динамической системы, описываемой нелинейным векторным интегральным уравнением Вольтерра 2 рода

$$x(t) = \int\limits_0^t X(x(\tau))d\tau,\ a \le x \le b, \tag{8}$$

формируются как необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости решения векторного нелинейного дифференциального уравнения с обыкновенными производными

$$\dot{x}(t) = X(x(t)), \tag{9}$$

полученного из (8) дифференцированием.

Доказательство. Дифференцируя по верхнему пределу, в общем случае последовательно, заданное интегральное уравнение (8), получаем нелинейное однородное дифференциальное уравнение (9).

Так как оператор дифференцирования является линейным оператором [9, гл.4, п.5], то решение обыкновенного дифференциального уравнения однозначно является решением исходного нелинейного уравнения Вольтерра 2 рода с точностью до константы, а значит – оно асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда асимптотически устойчиво решение уравнения (9). Необходимые и достаточные условия устойчивости последнего устанавливаются по теореме 1.

Доказательство завершено.

2. Формирование необходимых и достаточных условий устойчивости конкретных динамических систем

2.1 Исследование устойчивости потока воды в канале

Проведем исследование устойчивости потока воды в канале, описываемое нелинейным дифференциальным уравнением с частными производными

$$\sigma^{-1} + \frac{\partial Q}{\partial t} - Q\sigma^{-2}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + Q\sigma^{-1}(\sigma^{-1}\frac{\partial Q}{\partial x} - Q\sigma^{-2}[\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}])+$$

$$+(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} + r) + E = 0, \tag{10}$$

где $Q(x,\ t)$ — поток воды в точке x в момент времени t, r — сила трения о ложе канала как изменяющийся параметр, $\sigma = \sigma(x)$ — эффективное сечение канала, $x = x(t)$ — криволинейная координата относительно русла, $y = y(t)$ — уровень канала, $z = z(t)$ — глубина воды, измеренная от уровня y и E — величина притоков и оттоков. Примем σ, E, z, y, r за константы.

В соответствии с теоремой 2 переведем уравнение (10) из временной области в частотную с помощью преобразования Фурье

$$\sigma^{-1} + \dot{U} + \sigma^{-2}iw(U * U) + r + E = 0, \tag{11}$$

где U - образ функции Q, w - новая частотная координата; в соответствии с теоремой 1 построим сопряжённую к (11) систему

$$\dot{p} = \frac{\partial \sigma^{-2}iw(U * U)}{\partial U}p.$$

В соответствии с критерием Рауса- Гурвица выпишем необходимые и достаточные условия устойчивости системы (11):

$$\frac{\partial \sigma^{-2}iw(U * U)}{\partial U} < 0.$$

Тогда необходимые и достаточные условия устойчивости системы (10) имеют вид:

$$\sigma^{-2}\frac{\partial Q}{\partial x}Q < 0.$$

Области фазового пространства, в которых выполняются такие условия, могут быть получены на ПЭВМ.

Таким образом, получены условия устойчивости нелинейной системы (10) с распределёнными параметрами без использования функции Ляпунова.

2.2 Исследование устойчивости динамики популяции клеток с ограниченным временем их жизни

Математическая модель динамики популяции клеток с ограниченным временем их жизни описывается нелинейным интегро-дифференциальным уравнением Форстера

$$\dot{N}(t) = -ln2N(t) + \int_0^t n(N(t),\ \tau)d\tau, \tag{12}$$

где $N(t)$ — число клеток, $n(N(t),\ \tau)$ — функция убыли клеток из возрастов τ при их делении на дочерние.

Согласно теореме 3, приведем это уравнение к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{N}(t) = Y(t), \quad \dot{Y}(t) = Y(t)ln2 + n(N(t),\ t). \tag{13}$$

В соответствии с теоремой 1 построим сопряжённую для (13) систему

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial n(N,\ t)}{\partial N}p_2, \quad \dot{p}_2 = -p_1 - p_2 ln2,$$

тогда необходимые и достаточные условия устойчивости системы (12) в соответствии с критерием Рауса- Гурвица запишется в виде

$$\Delta_1 = ln2 < 0, \quad \Delta_2 = -\frac{\partial n(N,\ t)}{\partial N}ln2 < 0.$$

Такие условия невыполнимы, то есть динамика популяции делящихся клеток неустойчива во всем пространстве фазовых координат.

Заключение

Согласно теоремам авторов можно устанавливать необходимые и достаточные условия устойчивости весьма широкого класса нелинейных динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, уравнениями с частными производными и интегральными уравнениями Вольтерра 2 рода, сводящимися к системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теоремы представляют развитие методов исследования устойчивости динамических систем без использования функции Ляпунова.

Список литературы

[1] Еругин Н.П. Качественные методы в теории устойчивости. ПММ, том XIX, 1955, стр.599-615.

[2] Красовский Н.Н. Об одной задаче устойчивости движения в целом. ДАН СССР, том 88, выпуск 3, 1953.

[3] Первозванский А.А. Квазилогические системы и их устойчивость. АиТ, выпуск 5, 1999, стр.135-144.

[4] Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.

[5] Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Наука, 2001.

[6] Бойков И.В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений. Пенза: издательство пензенского государственного университета, 2008.

[7] Пилюгин С.Ю. Пространства динамических систем. Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2008.

[8] Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2009.

[9] Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Физматлит, 2001.

[10] Сокольников И.С. Тензорный анализ. М.: Наука, 1971.

[11] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

[12] Арманд Н.А., Крапивин В.Ф., Мкртчян Ф.А. Методы обработки данных радиофизического исследования окружающей среды. М.:Наука, 1987.