УДК 519.61

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ В ЗАДАЧАХ МИНИМАКСНОЙ КОРРЕКЦИИ НЕСОВМЕСТНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С МАТРИЦАМИ БЛОЧНОЙ СТРУКТУРЫ

Горелик В.А.*, Ле Н.З.**

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, г. Москва

**Московский педагогический государственный университет, г. Москва

Поступила в редакцию 01.11.2011, после переработки 11.11.2011.

Рассматриваются задачи минимальной коррекции (аппроксимации) несовместных систем линейных алгебраических уравнений с матрицами блочной структуры по минимаксному критерию как в случае вариации параметров только левой части системы, так и обеих частей системы уравнений. Предлагается подход декомпозиции для решения рассматриваемых задач.

Problems of the minimal correction (approximation) of inconsistent systems of the linear algebraic equations with matrixes of block structure by minimax criterion as in case of a variation of parameters only the left part of system, and both parts of system of the equations are considered. The approach of decomposition for the decision of considered problems is offered.

Ключевые слова: несовместная система линейных алгебраических уравнений, матричная коррекция, матрица с блочной структурой, минимаксный критерий, метод декомпозиции.

Keywords: inconsistent system of the linear algebraic equations, matrix correction, matrix with block structure, minimax criterion, a method of decomposition.

Введение

Исследование математической задачи начинается с вопроса существования решения. Этот вопрос весьма актуален и нетривиален, например, в задачах решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и неравенств, в задачах математического программирования, в задачах оптимального управления, в игровых и многокритериальных задачах, в задачах аппроксимации и в других.

Задачи, не имеющие решения, будем называть противоречивыми или несобственными задачами. Такие задачи могут возникать при математическом моделировании сложных технико-экономических систем со многими показателями при условиях, когда имеющаяся информация о системе неточна, не хватает ресурсов, производственных мощностей. Как показывает практика, погрешности в экспериментальных данных, ошибки округления, а также противоречивость и нечеткость информации могут приводить к противоречивым (несобственным) моделям (например, при обработке результатов физического эксперимента). В связи с этим возникла необходимость развития теории таких моделей. Изучение методов коррекции (аппроксимации) несобственных моделей, алгоритмического и программного обеспечения является относительно новым направлением развития теоретической информатики. Систематические исследования в данной области были начаты в 80-х годах И.И. Ереминым и его учениками ([6], [7], [1]). Основная задача заключалась в оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования (ЗЛП) и выпуклого программирования, строится и исследуется теория двойственности, предлагаются различные постановки и методы решения задач полной или частичной (правая часть системы уравнений или неравенств) параметрической коррекции. В конце 90-х годов исследования в области коррекции несобственных систем линейных алгебраических уравнений и неравенств и несобственных задач линейного программирования стали развиваться в ВЦ им. А.А. Дородницына РАН и МПГУ ([2]–[5]). В перечисленных работах рассматривается, в частности, коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений с условием неотрицательности решения, что позволяет применить методы коррекции к системам линейных неравенств и к задачам матричной коррекции несобственных задач линейного программирования. Научные исследования в области коррекции данных СЛАУ и несобственных ЗЛП велись и зарубежными исследователями. В работах Дж.Б. Розена [12], С. Ван Хаффель [13] была поставлена и решена задача структурой коррекции переопределенной системы и предложен подход к решению задач структурой коррекции. В большинстве исследований исходная задача матричной коррекции данных сводится к некоторой задаче математического программирования. В работах В.А. Горелика, В.И. Ерохина, Р.В. Печенкина, И.А. Золтоевой были предложены подходы к разработке соответствующих численных методов и алгоритмов матричной коррекции данных для задач с разреженной и любой заданной структурой ([3], [4]).

В данной работе рассматриваются задачи коррекции СЛАУ с матрицами блочной структуры по минимаксному критерию и предлагается использовать подход декомпозиции для решения рассматриваемых задач.

В работах [2, 3] был предложен метод решения подобных задач, однако в данной работе использован принципиально новый подход (о чем будет сказано далее).

В качестве критерия величины изменения параметров будем рассматривать векторные нормы:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

1. Постановки задач блочной коррекции

Рассмотрим задачу матричной коррекции несовместной системы линейных алгебраических уравнений с условием неотрицательности решения

$$Ax = b, \quad x \geqslant 0, \tag{1}$$

где $A \in R^{M \times N}$ – матрица коэффициентов, обладающая следующей блочной структурой:

$$A = \begin{bmatrix} & & A_0 & \\ A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_K \end{bmatrix},$$

$$A_0 \in R^{m_0 \times N},\ A_k \in R^{m_k \times n_k},\ k = 1, \dots, K,\ \sum_{k=0}^{K} m_k = M,\ \sum_{j=1}^{K} n_j = N,$$
$$x = (x_1, \dots, x_K)^T \in R^N,\ b = (b_0, b_1, \dots, b_K)^T \in R^M,$$
$$x_k \in R^{n_k},\ k = 1, 2, \dots, K,\ b_k \in R^{m_k},\ k = 0, 1, \dots, K.$$

Введем в задачу дополнительное требование совместности подсистемы

$$A_0 x = b_0, \quad x \geqslant 0 \tag{2}$$

и неизменимости матрицы A_0, т.е. первые m_0 строк матрицы A должны оставаться фиксированными (эта часть ограничений, накладываемых на вектор x, должна выполняться строго).
Определим матрицы $H_k \in R^{m_k \times n_k}$ и векторы $h_k \in R^{m_k}$, такие, что системы

$$\begin{bmatrix} & & A_0 & \\ A_1 + H_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 + H_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_K + H_K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_K \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} & & A_0 & \\ A_1 + H_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 + H_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_K + H_K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 + h_1 \\ \vdots \\ b_K + h_K \end{bmatrix}, \tag{4}$$

совместны (точнее имеют неотрицательное решение) и рассмотрим следующие задачи:

Задача 1.1.

$$\max_{k=1,\dots,K} \sum_{i,j} |h_{ij}^k| \to \min,$$

при условии (3), где h_{ij}^k — элемент матрицы коррекции H_k.

Задача 1.2.

$$\max_{k=1,\dots,K} \sum_{i,j} |\overline{h}_{ij}^k| \to \min,$$

при условии (4), где $\overline{h}_{ij}^k$ — элемент расширенной матрицы коррекции $[H_k \quad -h_k]$.

Квадратными скобками $[H_k \quad -h_k]$ обозначены матрицы размерности $m_k \times (n_k+1)$, получаемые приписыванием справа к матрице $H_k \in R^{m_k \times n_k}$ вектор-столбца $h_k \in R^{m_k}$ (со знаком минус). Матрицы H_k называются матрицами коррекции, а h_k – векторами коррекции. Матрицы H_k^* и векторы h_k^*, являющиеся решениями задач 1.1, 1.2, будем называть оптимальными матрицами и векторами коррекции.

Структура корректируемых матриц может быть интерпретирована следующим образом. Имеется система, состоящая из K подсистем (например, корпорация из K предприятий). Система в целом должна удовлетворять некоторым условиям координации функционирования подсистем. Эти условия, связывающие все переменные, записываются в виде (2) и являются жесткими. Коэффициенты подсистем могут корректироваться.

Заметим, что $b \neq 0$, так как в противном случае исходная система (1) имеет, по крайней мере, одно решение – нулевое, т.е. исходная система (1) не является несовместной.

2. Сведение задач коррекции к задачам математического программирования

В данном разделе покажем, что задачи 1.1, 1.2 эквивалентны некоторым задачам условной оптимизации. Приведем сначала фундаментальные определения и соотношения, на которых будут основаны выкладки настоящей статьи.

Определение 2.1. [10] φ, ψ – нормой для матрицы $A \in R^{m\times n}$ будем называть величину:

$$\|A\|_{\varphi,\psi} = \max_{x\neq 0} \frac{\psi(Ax)}{\varphi(x)},$$

где $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ – некоторые векторные нормы.

Функцию $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ можно рассматривать как определенное расширение понятия подчиненной (индуцированной) матричной нормы, которая задается некоторой векторной нормой $\varphi(x)$ и определяется для вещественной квадратичной матрицы A как

$$\|A\|_{\varphi,\varphi} = \max_{x\neq 0} \frac{\varphi(Ax)}{\varphi(x)}.$$

Определение 2.2. [10] *Гельдеровой нормой* с показателем $p \geqslant 1$ для матрицы $A \in R^{m\times n}$ будем называть величину

$$\|A\|_{l_p} = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пример 2.1. [3] Пусть $\varphi(\cdot) = \|\cdot\|_\infty$, $\psi(\cdot) = \|\cdot\|_1$, $rankA = 1$. Тогда

$$\|A\|_{\varphi,\psi} = \|A\|_{\infty,1} = \|A\|_{l_1} = \sum_{i,j} |a_{ij}|.$$

Пример 2.2. [3] Пусть $\varphi(\cdot) = \|\cdot\|_1$, $\psi(\cdot) = \|\cdot\|_\infty$. Тогда

$$\|A\|_{\varphi,\psi} = \|A\|_{1,\infty} = \|A\|_{l_\infty} = \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Определение 2.3. [3] Функция

$$\varphi^*(y) = \max_{x \neq 0} \frac{|y^T x|}{\varphi(x)},$$

где $x, y \in R^n$ – некоторые векторы, $\varphi(\cdot)$ – некоторая векторная норма, называется векторной нормой, двойственной к норме $\varphi(\cdot)$ относительно скалярного произведения.

Определение 2.4. [3] Вектор $y \in R^n$, удовлетворяющий условию

$$y^T x = \varphi^*(y) \cdot \varphi(x) = 1$$

для некоторого вектора $x \neq 0$, $x \in R^n$, называется двойственным к вектору x относительно нормы $\varphi(\cdot)$.

Определим функцию $sign(\alpha)$ как

$$sign(\alpha) = \begin{cases} -1, & \text{если } \alpha < 0; \\ 0, & \text{если } \alpha = 0; \\ 1, & \text{если } \alpha > 0. \end{cases}$$

Лемма 2.1. [3] Вектор $y \in R^n$, двойственный к некоторому вектору $x \neq 0$, $x \in R^n$ относительно нормы $\|\cdot\|_1$ определяется формулой

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{если } |x_i| < \|x\|_\infty, \\ \frac{sign(x_i)}{t\|x\|_\infty}, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{5}$$

где t – число компонент вектора x, для которых выполняется условие $|x_i| = \|x\|_\infty$.

Теорема 2.1. [3] Пусть $z \in R^n$ и $u \in R^m$ – произвольные векторы, $z \neq 0$. Тогда система уравнений $Az = u$ относительно A разрешима. При этом существует решение $\widehat{A}$ из класса одноранговых матриц размера $m \times n$, минимальное по норме $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ (где $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ – произвольные нормы), которое дается формулой

$$\widehat{A} = uy^T,$$

где $y \in R^n$ – вектор, двойственный к вектору z относительно нормы $\varphi(\cdot)$.
При этом

$$\|\widehat{A}\|_{\varphi,\psi} = \frac{\psi(u)}{\varphi(z)}.$$

Рассмотрим задачу коррекции 1.1. Систему (3) при фиксированном x можно переписать как совокупность K систем линейных алгебраических уравнений с неизвестной матрицей H_k:

$$(A_k + H_k)x_k = b_k,$$

$$H_k x_k = b_k - A_k x_k. \tag{6}$$

По теореме 2.1 при фиксированном векторе $x_k \in R^{n_k}$ решение уравнения (6) относительно неизвестной матрицы H_k, обладающее минимальной нормой $\|H\|_{l_1} = \sum\limits_{i,j} |h_{ij}|$, существует при любом $x_k \neq 0$ и задается формулой

$$H_k^* = (b_k - A_k x_k) s_k^T, \tag{7}$$

где s_k – вектор, двойственный к вектору x_k относительно нормы $\|\cdot\|_1$.
В силу $x \geqslant 0$, для величины $\|H_k^*\|_{\infty,1}$ справедлива формула

$$\|H_k^*\|_{\infty,1} = \frac{\|b_k - A_k x_k\|_1}{\|x_k\|_\infty} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m_k} |b_k^j - (A_k x_k)_j|}{\max\limits_{i=1,\dots,n_k} |x_k^i|} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m_k} |b_k^j - (A_k x_k)_j|}{\max\limits_{i=1,\dots,n_k} x_k^i}, \tag{8}$$

где b_k^j, $(A_k x_k)_j$, x_k^i – компоненты векторов b_k, $A_k x_k$, x_k, $k = 1, ..., K$.
Пусть $r^k = \frac{1}{\max\limits_{i=1,\dots,n_k} x_k^i}$, $r^k > 0$. Формулу (8) перепишем в виде

$$\|H_k^*\|_{\infty,1} = \sum_{j=1}^{m_k} |b_k^j r^k - (A_k r^k x_k)_j| = \sum_{j=1}^{m_k} |b_k^j r^k - (A_k y_k)_j|,$$

где $y_k = r^k x_k$, $y_k \geqslant 0$, $\max\limits_{i=1,\dots,n_k} y_k^i = 1$.

Таким образом, задача 1.1 эквивалентна следующей задаче:

$$d = \max_{k=1,\dots,K} \sum_{j=1}^{m_k} |b_k^j r^k - (A_k y_k)_j| \to \min_{\substack{r^k, y_k \geqslant 0 \\ y_k \leq 1; \max\limits_j y_k^j = 1}}, \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{K} (r^k)^{-1} \cdot A_{0k} y_k = b_0,$$

где $A_0 = [A_{01}, ..., A_{0K}]$, $A_{0k} \in R^{m_0 \times n_k}$, $k = 1, ..., K$.
Задача (9) сводится к задаче математического программирования:

$$d \to \min_{d, r^k, y_k} \tag{10}$$

при ограничениях

$$v_k \geqslant b_k r^k - A_k y_k,$$
$$v_k \geqslant -b_k r^k + A_k y_k,$$
$$\sum_{k=1}^{K} (r^k)^{-1} \cdot A_{0k} y_k = b_0,$$
$$v_k \geqslant 0, \quad 0 \leq y_k \leq 1, \quad y_k^l = 1,$$
$$1_{m_k}^T \cdot v_k \leq d,$$
$$l = 1, ..., n_k, \quad k = 1, ..., K.$$

Здесь 1_{m_k} – вектор-столбец размерности m_k, состоящий из единиц.
Таким образом доказана следующая теорема.
Теорема 2.2. Задача коррекции 1.1 эквивалентна задаче математического программирования (10), а именно, если (d^*, r^{k^*}, y_k^*) – решение задачи (10), то $x_k^* = y_k^* / r^{k^*}$ и матрицы коррекции H_k^* вычисляются по формуле (7).

Выполнив аналогичные преобразования для задачи 1.2, систему (4) представим в виде совокупности K систем уравнений

$$(A_k + H_k)x_k = b_k + h_k,$$
$$[H_k \quad -h_k]z_k = -\tilde{A}_k z_k, \quad k = 1, ..., K, \tag{11}$$

где

$$\tilde{A}_k = [A_k \quad -b_k] \in R^{m_k \times (n_k+1)}, \quad z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ 1 \end{bmatrix} \in R_+^{n_k+1}.$$

При фиксированном векторе z_k решение уравнения (11) относительно неизвестной матрицы $[H_k \quad -h_k]$, обладающее минимальной нормы $\|[H_k \quad -h_k]\|_{l_1} = \sum\limits_{i,j} |\overline{h}_{ij}|$, существует при любом z_k и задается формулой

$$[H_k^* \quad -h_k^*] = -\tilde{A}_k z_k w_k^T, \tag{12}$$

где w_k – вектор, двойственный к вектору z_k относительно нормы $\|\cdot\|_1$.
Для величины $\|[H_k^* \quad -h_k^*]\|_{\infty,1}$ справедлива формула

$$\|[H_k^* \quad -h_k^*]\|_{\infty,1} = \frac{\|\tilde{A}_k z_k\|_1}{\|z_k\|_\infty} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m_k} |(\tilde{A}_k z_k)_j|}{\max\limits_i z_k^i}, \tag{13}$$

где $(\tilde{A}_k z_k)_j$, z_k^i – компоненты векторов $\tilde{A}_k z_k$, z_k, $k = 1, ..., K$.
Пусть $q^k = \frac{1}{\max\limits_{i=1,...,n_k+1} z_k^i}$, $q^k > 0$. Формулу (13) перепишем в виде

$$\|[H_k^* \quad -h_k^*]\|_{\infty,1} = \sum_{j=1}^{m_k} |(\tilde{A}_k p_k)_j|,$$

где $p_k = z_k q^k$, $p_k \geqslant 0$, $\max\limits_{i=1,...,n_k+1} p_k^i = 1$.
Таким образом, задача 1.2 равносильна следующей задаче:

$$u = \max_{k=1,...,K} \sum_{j=1}^{m_k} |(\tilde{A}_k p_k)_j| \to \min_{p_k \geqslant 0; \max\limits_i p_k^i = 1}, \tag{14}$$

$$\sum_{k=1}^{K} (q^k)^{-1} \cdot \tilde{A}_{0k} p_k = \tilde{b}_0,$$

где $\tilde{A}_{0k} = [A_{0k} \quad 1_{m_0}] \in R^{m_0 \times (n_k+1)}$, $1_{m_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in R^{m_0}$, $\tilde{b}_0 = b_0 + K \cdot 1_{m_0} \in R^{m_0}$.

Задача (14) сводится к задаче математического программирования:

$$u \to \min_{u, q^k, p_k}, \tag{15}$$

при ограничениях

$$\sigma_k \geqslant \tilde{A}_k p_k,$$
$$\sigma_k \geqslant -\tilde{A}_k p_k,$$
$$\sum_{k=1}^{K} (q^k)^{-1} \cdot \tilde{A}_{0k} p_k = \tilde{b}_0,$$
$$\sigma_k \geqslant 0, \quad 0 \le p_k \le 1, \quad p_k^l = 1,$$
$$1_{m_k}^T \cdot \sigma_k \le u,$$
$$l = 1, ..., n_k + 1, \quad k = 1, ..., K.$$

Теорема 2.3. Задача коррекции 1.2 эквивалентна задаче математического программирования (15), а именно, если (u^*, q^{k^*}, p_k^*) – решение задачи (15), то $z_k^* = p_k^* \big/ q^{k^*}$ и расширенные матрицы коррекции $[H_k^* \quad -h_k^*]$ вычисляются по формуле (12).

Таким образом, исходные задачи 1.1, 1.2 сводятся к вспомогательным задачам математического программирования (10), (15) соответственно.

3. Применение метода декомпозиции для решения задач математического программирования (10), (15)

Задачи (10) и (15) имеют общий вид, поэтому в настоящем разделе рассмотрим подход к решению (15), а для задачи (10) – аналогично.

Применим декомпозицию на основе метода распределения ресурсов [9, 11] для решения задачи (15). Кратко схему метода декомпозиции можно описать следующим образом. Представим ограничение $\sum\limits_{k=1}^{K} (q^k)^{-1} \cdot \tilde{A}_{0k} p_k = \tilde{b}_0$ в виде неравенства:

$$\sum_{k=1}^{K} (q^k)^{-1} \cdot C_{0k} p_k \le c_0,$$

где

$$C_{0k} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{0k} \\ -\tilde{A}_{0k} \end{bmatrix}, \quad c_0 = \begin{bmatrix} \tilde{b}_0 \\ -\tilde{b}_0 \end{bmatrix}.$$

Введем в рассмотрение K новых векторов t_k, $t_k \in R^{2m_0}$, $k = 1, ..., K$.

$$C_{0k} p_k \le t_k q^k, \quad k = 1, ..., K,$$
$$\sum_{k=1}^{K} t_k \le c_0. \tag{16}$$

При фиксированных значениях векторов t_k, процесс декомпозиции на каждом шаге приводит к решению K локальных задач:

$$u_k \to \min, \tag{17}$$

$$\sigma_k \geqslant \tilde{A}_k p_k,$$
$$\sigma_k \geqslant -\tilde{A}_k p_k,$$
$$C_{0k} p_k \leq t_k q^k,$$
$$1^T_{m_k} \cdot \sigma_k \leq u_k,$$
$$\sigma_k \geqslant 0, \quad 0 \leq p_k \leq 1, \quad p^l_k = 1,$$
$$l = 1, ..., n_k + 1.$$

Здесь вводятся новые переменные u_k соответствующие t_k.
Задача (17) при фиксированном l является задачей линейного программирования, т.е. ее решение сводится к нахождению минимума из минимумов ЗЛП при $l = 1, ..., n_k + 1$.

Итеративный метод осуществляет на каждом шаге перераспределение общего ресурса c_0. При этом все оптимальные значения имеют тенденцию выравниваться и стремиться к минимальному значению задачи (15) в процессе итераций. В данном случае задача координации соответствует определенным правилам перераспределения ресурсов. Кратко итеративный процесс можно описать следующим образом.

Начальная итерация ($i = 1$). Выбирается начальное значение $t_k[1]$, удовлетворяющее ограничению (16). Находится оптимальное значение $(u^*_k[1], p^*_k[1], q^{k^*}[1])$ задачи ЛП (17).

Итерация номера i, $i \geqslant 2$. Определяется новое распределение ресурсов $t_k[i]$, которое эквивалентно решению задачи выбора направления [9]. Находим решение $(u^*_k[i], p^*_k[i], q^{k^*}[i])$ задачи (17).

Процесс повторяется до тех пор, пока не выполняется неравенство

$$\max_{k=1,\ldots,K} u_k[i] - \min_{k=1,\ldots,K} u_k[i] \leq \epsilon,$$

где i – номер итерации, а ϵ – заданная точность.

После того как найден (u^*_k, p^*_k, q^{k^*}) – решение задачи (15), необходимо восстановить векторы $z^*_k = p^*_k \big/ q^{k^*}$, после чего расширенные матрицы коррекции $[H^*_k \quad -h^*_k]$ вычисляются по формуле (12).

Заключение

В [2, 3] подход к решению задач типа 1.1, 1.2 состоял в следующем: для совместной системы (2) строилось общее параметрическое семейство решений x с использованием понятия двойственности, оно подставлялось в подсистемы и минимизировался общий критерий (будем называть такой подход «сверху–снизу»). В данной работе использован подход «снизу–вверх», т.е. матрицы коррекции для подсистем выражаются через x_k и минимизируется суммальный критерий с общим ограничением (2).

При «малой» размерности подход из работы [2] лучше, чем рассмотренный выше, так как трудоемкость вычислений невелика. В случае «большой» размерности подход декомпозиции особенно эффективнен, так как исходные задачи можно декомпозировать на подсистемы, которые имеют меньшие размерности. Заметим, что данный подход можно применить также к критерию вида $\max_k \max_{i,j} |h_{ij}^k|$ (см. [8]).

Список литературы

[1] Ватолин А.А. Апроксимация несобственных задач линейного программирования по критерию евклидовой нормы. Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 12. С. 1907–1908.

[2] Горелик В.А., Ерохин В.И., Печенкин Р.В. Минимаксная матричная коррекция несовместимых систем линейных алгебраических уравнений с блочными матрицами коэффициентов. Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 5. С.52–62.

[3] Горелик В.А., Ерохин В.И., Печенкин Р.В. Численные методы коррекции несобственных задач линейного программирования и структурных систем уравнений. М.: ВЦ РАН, 2006.

[4] Горелик В.А., Золтоева И.А., Печенкин Р.В. Методы коррекции несобственных линейных систем с разреженными матрицами. Дискретный анализ и исследование операций. 2007. Сер 2. Т. 14. № 2. С 62–75.

[5] Горелик В.А., Кондратьева В.А. Параметрическое программирование и несобственные задачи линейной оптимизации. Сб. «Моделирование, декомпозиция и оптимизация». М.: Изд. ВЦ РАН, 1999. С. 57–82.

[6] Еремин И.И. Противоретивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988.

[7] Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука. 1983.

[8] Ле Ньят Зюи. Метод декомпозиции в задачах коррекции несовместных систем линейных неравенств с матрицами блочной структурой. Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 10. С. 1796–1805.

[9] Лэсдон Л.С. Оптимизация больших систем. М.: Наука, 1975.

[10] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

[11] Цурков В.И. Декомпозиция в задачах большой размерности. М.: Наука, 1981.

[12] Rosen J.B., Park H., Glick J. Total least norm formulation and solution for structured problems. SIAM Journal on Matrix Anal. Appl. 1996. Vol. 17. № 1. P. 110–128.

[13] Van Huffel S., Vandewalle J. Analysis and solution of the nongeneric total least squares problem. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 1988. Vol. 9. № 2. P. 360–372.