УДК 510.644.4:511.75

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ[1]

Молодцов Д.А, Ковков Д.В.
Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр
им. А.А. Дородницына РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 29.06.2011, после переработки 03.10.2011.

В работе представлено введение в теорию приближенных чисел. Сформулированы основные определения, введены операции над приближенными числами и основные представления, рассмотрено понятие предела интервальной функции.

In this paper we present the introduction into a theory of approximate numbers. We define approximate numbers, main operations for them, provide different representations. The limit of interval finction is considered.

Ключевые слова: приближенные числа, интервальные функции, аппроксимация.
Keywords: approximate numbers, interval functions, approximation.

Введение

Как известно, любые физические измерения дают приближенный результат и поэтому исходным материалом для физических моделей должны быть приближенные числа. Несмотря на это классическая механика оперирует с координатами и временем, описываемыми действительными числами. Естественно возникает вопрос: насколько адекватно такое описание и насколько отличную картину дают эти два описания.

Кроме чисто теоретического интереса об условиях применимости классического описания движения аппарат приближенного описания движения может использоваться и для сугубо практических целей, например, описания движения плохо известных объектов.

В качестве модели приближенного числа будет использоваться интервал. Интервальная математика развивается уже достаточно давно и имеет широкие применения [2, 3, 4, 5]. Однако наш подход будет несколько отличаться от классической интервальной математики. Интервальная математика, во всяком случае, на стадии своего возникновения, рассматривала интервальные методы, как способ получения оценок для разнообразных «точных» задач. Таким образом «точные» задачи были первичными, а интервальные задачи имели вторичный характер.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 09-01-00592).

Вместе с тем любые практические задачи, как уже отмечалось, основаны на измерениях, которые носят приближенный характер, и в первом приближении эти измерения могут считаться интервалами. Поэтому практически исходными являются именно интервальные постановки задач, а «точные» задачи являются абстракцией, созданной для упрощенного описания и для возможности применения различных аналитических методов. Отличие нашего подхода и будет заключаться в том, что мы будем рассматривать интервальные задачи, как исходные, первичные.

Таким образом, данная работа, хотя и использует интервалы, но никакого отношения к традиционной проблематике интервального анализа не имеет. Интервальные задачи и модели в работе строятся только из соображений адекватности реальным расчетам с приближенными числами и их решения не обязаны содержать решения никаких «точных» задач или моделей. Особенно отчетливо различие подходов будет видно на примере интервальной арифметики, используемой в работе. Она будет отличаться от принятой в интервальном анализе. В частности операция умножения интервалов будет не такой, как в классической интервальной математике.

Еще одной важной особенностью будет отказ от использования классических предельных переходов. Классический предел предполагает стремление приращений координат или времени к нулю. На практике такие предельные переходы невозможны. Вместо классического анализа будет использоваться подход, развиваемый в рамках теории мягких множеств [1], который не использует классический предел, а оперирует только с конечными приращениями.

1. Интервальные числа

Базовым элементом предлагаемого подхода является модель приближенных чисел. Понятие приближенного числа можно строить разными способами. Его можно описывать функцией распределения, можно использовать нечеткие числа Заде и т. п. По-видимому, наиболее простой моделью приближенного числа является интервал. Именно эта модель и будет здесь использоваться. Однако под интервалом мы будем понимать не множество чисел между двумя заданными числами, а просто пару чисел. Первое число будет интерпретироваться как центр интервала, а второе, как точность. Такие конструкции будем называть интервальными числами. Сам набор интервалов, по сути, совпадает с набором интервалов в арифметике Каухера [6], но операция умножения интервалов будет другой.

В классической интервальной арифметике операции между интервалами определяются через операции над числами, содержащимися в этих интервалах. Такие определения вводятся для того, чтобы интервальные операции давали гарантированную оценку для операций над числами, которые содержатся в интервалах. Такой подход идет от основной задачи интервального анализа, которая формулируется, как получение гарантированных оценок для «точных» задач при решении «приближенных» задач, построенных на интервальной математике.

В настоящей работе ситуация прямо противоположная. Исходной задачей, наиболее точно описывающей реальность, будет интервальная модель, основанная на описании координат и времени с помощью интервалов. Именно эту интервальную модель мы будем изучать и разрабатывать методы решения возникающих здесь задач. При такой постановке мы можем конструировать любые нужные и удобные для нас операции с интервалами и другие функции. Таким образом, никаких ограничений на операции с интервалами у нас нет.

Итак, хотя здесь будут использоваться интервалы, но не следует впадать в заблуждение, что данная работа относится к интервальному анализу. Понимание исходной или первичной задачи используемое в настоящей работе принципиально отличается от постановки основной задачи в интервальном анализе. Поэтому настоящая работа не относится к интервальному анализу и не призвана решать проблемы этой области науки. Основной целью работы является построение математического аппарата, основанного на интервальных числах и служащего для описания движения.

Перейдем к формальному описанию интервальных чисел. Множество действительных чисел будем обозначать символом D.

Множество интервальных чисел обозначим через $\Im = D \times D$. Если $x = (a, b) \in \Im$, то a обычно называют центром интервального числа и обозначают $a = \operatorname{mid} x$, а b называют радиусом интервального числа и обозначают $b = \operatorname{rad} x$. Обратим внимание, что мы понимаем интервальное число просто, как пару чисел, а не как множество действительных чисел, расположенных между двумя данными. Для нас интерпретация интервального числа это результат измерения, которое определяется действительным числом и точностью.

Запись интервального числа в виде пары чисел в скобках может быть не совсем удобна, т.к. таким образом записываются и другие объекты (например числовые интервалы как множества, векторы и т.п.). Поэтому введем новую запись интервального числа, используя аналогию с комплексными числами. Интервальное число $x = (a, b) \in \Im$ будем записывать в виде $x = a + b\theta$, где θ это специальный символ, а не действительное число. Для интервального нуля введем специальное обозначение $\mathbf{0} = 0 + 0\theta$.

2. Отношения для интервальных чисел

Введем два естественных отношения для интервальных чисел. Необходимость определения объясняется тем, что интервальные числа не рассматриваются, как множества и поэтому отношения включения для них не могут пониматься в теоретико-множественном смысле.

- Отношение уже (шире) $x \subseteq y \quad (y \supseteq x)$ означает, что $|\operatorname{mid} x - \operatorname{mid} y| + \operatorname{rad} x \leqslant \operatorname{rad} y$.

- Отношение строго уже (строго шире) $x \subset y \quad (y \supset x)$ означает, что $|\operatorname{mid} x - \operatorname{mid} y| + \operatorname{rad} x < \operatorname{rad} y$.

- Отношение больше (меньше) $x \geqslant y \quad (y \leqslant x)$ означает, что $\operatorname{mid} x - \operatorname{mid} y \geqslant |\operatorname{rad} x - \operatorname{rad} y|$.

- Отношение строго больше (строго меньше) $x > y \quad (y < x)$ означает, что $\operatorname{mid} x - \operatorname{mid} y > |\operatorname{rad} x - \operatorname{rad} y|$.

Легко устанавливается рефлексивность, транзитивность и антисимметричность отношений больше и шире. Для строгих отношений имеет место транзитивность.

Запись $a \in x$ (включение), где $a \in D$, а $x \in \Im$ будем понимать, как выполнение неравенства $(a - \operatorname{mid} x)^2 \leqslant (\operatorname{rad} x)^2$. Если интервал имеет неотрицательный размах $\operatorname{rad} x \geqslant 0$, то это означает, что $\operatorname{mid} x - \operatorname{rad} x \leqslant a \leqslant \operatorname{mid} x + \operatorname{rad} x$.

Нетрудно видеть, что для любых двух интервальных чисел $x, y \in \Im$ всегда справедливо, по крайней мере, одно из высказываний $x \subseteq y, \quad x \supseteq y, \quad x \geqslant y, \quad x \leqslant y$. Поэтому удобно ввести четыре множества интервальных чисел

$$\Im^+(x) = \{y \in \Im \mid y \geqslant x\}, \qquad \Im^-(x) = \{y \in \Im \mid y \leqslant x\},$$
$$\Im^\cup(x) = \{y \in \Im \mid y \supseteq x\}, \qquad \Im^\cap(x) = \{y \in \Im \mid y \subseteq x\},$$

и соответствующие четыре строгих множества

$$\Im_+(x) = \{y \in \Im \mid y > x\}, \qquad \Im_-(x) = \{y \in \Im \mid y < x\},$$
$$\Im_\cup(x) = \{y \in \Im \mid y \supset x\}, \qquad \Im_\cap(x) = \{y \in \Im \mid y \subset x\}.$$

Модулем интервального числа $x \in \Im$ будем называть величину

$$\operatorname{mod}(x) = (\operatorname{mid} x)^2 - (\operatorname{rad} x)^2 .$$

Нулевые интервальные числа и ненулевые интервальные числа определим следующим образом

$$\Im_0 = \{x \in \Im \mid \operatorname{mod}(x) = 0\},$$
$$\Im_\# = \{ x \in \Im \mid \operatorname{mod}(x) \neq 0\} = \Im_+(\mathbf{0}) \cup \Im_-(\mathbf{0}) \cup \Im_\cap(\mathbf{0}) \cup \Im_\cup(\mathbf{0}).$$

Среди интервальных чисел выделим реальные интервальные числа с неотрицательным радиусом не меньшим величины $h \geqslant 0$

$$\Re_h = \{ x \in \Im \mid \operatorname{rad} x \geqslant h\}.$$

Введем также множество положительных и неотрицательных реальных интервальных чисел

$$\Re_h^+ = \{x \in \Re_h : \operatorname{mid} x > \operatorname{rad} x\}, \qquad \Re_h^\oplus = \{x \in \Re_h : \operatorname{mid} x \geqslant \operatorname{rad} x\}.$$

3. Интервальные сегменты

Если интервальные числа связаны соотношением $x \leqslant y$, то естественно рассматривать и интервальные числа $u \in \Im$, расположенные между ними, т.е. $[x, y] = \{u \in \Im \mid x \leqslant u \leqslant y\}$. Множество таких интервальных чисел $u \in \Im$ будем называть интервальным сегментом.

Интервальный сегмент можно записать и через отношение включения

$$[x, y] = \{u \in \Im \mid a \subseteq u \subseteq b\},$$

где

$$a = \left(\frac{\operatorname{mid} x + \operatorname{mid} y}{2} + \frac{\operatorname{rad} x - \operatorname{rad} y}{2}\right) + \left(\frac{\operatorname{mid} x - \operatorname{mid} y}{2} + \frac{\operatorname{rad} x + \operatorname{rad} y}{2}\right)\theta,$$

$$b = \left(\frac{\operatorname{mid} x + \operatorname{mid} y}{2} + \frac{\operatorname{rad} y - \operatorname{rad} x}{2}\right) + \left(\frac{\operatorname{mid} y - \operatorname{mid} x}{2} + \frac{\operatorname{rad} x + \operatorname{rad} y}{2}\right)\theta.$$

Внутренностью сегмента будем называть множество $]x, y[\; = \{u \in \Im \,|x < u < y\}$. Сегмент $[x, y]$ можно представить и в более симметричном виде через его «центральное» интервальное число $[x, y] = \langle p, \alpha\rangle$, где

$$\langle p, \alpha\rangle = \Big\{u \in \Im \Big| \, |\operatorname{mid} u + \operatorname{rad} u - \operatorname{mid} p - \operatorname{rad} p| \leqslant \operatorname{mid} \alpha \,, \quad |\operatorname{mid} u - \operatorname{rad} u - \operatorname{mid} p + \operatorname{rad} p| \leqslant \operatorname{rad} \alpha \Big\},$$

$$\operatorname{mid} p = \frac{1}{2}\cdot(\operatorname{mid} x + \operatorname{mid} y)\,, \qquad \operatorname{rad} p = \frac{1}{2}\cdot(\operatorname{rad} x + \operatorname{rad} y)\,,$$

$$\operatorname{mid} \alpha = \frac{-\operatorname{mid} x + \operatorname{mid} y - \operatorname{rad} x + \operatorname{rad} y}{2} \geqslant 0,$$

$$\operatorname{rad} \alpha = \frac{-\operatorname{mid} x + \operatorname{mid} y + \operatorname{rad} x - \operatorname{rad} y}{2} \geqslant 0.$$

Сегмент $\langle p, \alpha\rangle$ можно использовать как окрестность интервального числа p.

Наряду с сегментом в качестве окрестности интервального числа p будем использовать и следующее множество

$$O\,(p, \alpha) = \Big\{x \in \Im \Big| \, |\operatorname{mid} x - \operatorname{mid} p| \leqslant \operatorname{mid} \alpha, \; |\operatorname{rad} x - \operatorname{rad} p| \leqslant \operatorname{rad} \alpha \Big\}.$$

4. Операции с интервальными числами

4.1 Сложение

Сложение интервальных чисел определим, как и в арифметике Каухера, формулой

$$(a + b\theta) + (c + d\theta) = (a + c) + (b + d)\theta.$$

Нетрудно видеть, что сложение коммутативно и ассоциативно, а интервальный ноль является нейтральным элементом для сложения.

Для любого интервального числа $x = a + b\theta$ существует обратное интервальное число $-x = (-a) + (-b)\theta = -a - b\theta$, так что вычитание приближенных чисел также определено

$$(a + b\theta) - (c + d\theta) = (a - c) + (b - d)\theta.$$

Для любого интервального числа $x = a + b\theta$ введем два интервальных числа: противоположное интервальное число $\overline{x} = -a + b\theta$, и сопряженное интервальное число $\underline{x} = a - b\theta$. Очевидно справедливы равенства $-\overline{x} = \underline{x}$, $-\underline{x} = \overline{x}$.

4.2 Умножение интервальных чисел

Операция умножения интервального числа на действительное число или интервальное число особенно важна для наших планов построения понятия аналогичного классической производной. Дело в том, что понятие производной строится на аппроксимации приращения функции произведением производной и приращения аргумента. Поэтому определение произведения играет важную роль в построении понятия производной для функции интервальных чисел. Естественно требовать от определения произведения интервальных чисел сохранения произведения действительных чисел. Под этим подразумевается следующее. Если обозначить символом $*$ произведение интервальных чисел, то сохранением произведения действительных чисел будем называть выполнение двух тождеств

$$\mathrm{mid}\big((a+0\theta)*(b+0\theta)\big)=ab, \qquad \mathrm{rad}\big((a+0\theta)*(b+0\theta)\big)=0.$$

Определим умножение интервальных чисел формулой

$$x\times y=(\mathrm{mid}\,x\cdot\mathrm{mid}\,y+\mathrm{rad}\,x\cdot\mathrm{rad}\,y)+(\mathrm{mid}\,x\cdot\mathrm{rad}\,y+\mathrm{mid}\,y\cdot\mathrm{rad}\,x)\theta.$$

Нетрудно видеть, что это произведение сохраняет произведение действительных чисел. Можно заметить, что можно получить произведение интервальных чисел, формально произведя умножение и раскрытие скобок с заменой $\theta^2=1$. Здесь усматриваются некоторые аналогии с комплексными числами. Свойства интервального произведения, $x,y,z\in\Im$.

1. Коммутативность $x\times y=y\times x$.
2. Ассоциативность $(x\times y)\times z=x\times(y\times z)$.
3. Дистрибутивность относительно сложения $(x+y)\times z=(x\times z)+(y\times z)$.
4. Единица $x\times(1+0\theta)=x$.
5. Обратный элемент. Если $\mathrm{mod}(x)\neq 0$, то существует интервальное число $x^{-1}\in\Im$ такое, что $x\times x^{-1}=1+0\theta$, причем $x^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{mod}(x)}\cdot\underline{x}$.

Таким образом, множество интервальных чисел с операциями сложения и умножения образуют коммутативное кольцо, но не являются полем.

Под умножением интервального числа $x\in\Im$ на действительное число $k\in D$ будем понимать следующее интервальное число $k\cdot x=(k+0\theta)\times x=k\,\mathrm{mid}\,x+k\,\mathrm{rad}\,x\theta$.

Приведенное определение умножения отличается от умножения Каухера [6]. Основным положительным свойством классического определения произведения интервалов является то, что оно дает точную оценку для определения «представителей», то есть действительных чисел, содержащихся в этих интервалах. Это свойство полезно для решения основной задачи интервальной математики – получение гарантированных оценок решения «точных» задач.

Алгебраические свойства классического определения произведения интервалов весьма скромны. Так дистрибутивности относительно сложения нет. Кроме этого сами формулы весьма громоздки и неудобны для исследований. Хотя Лакеевым [7, 8] и были предложены несколько более простые формулы, но проблемы остались.

В нашем же случае основная задача, как уже отмечалось, совершенно другая – создание удобного аппарата для описания движения, когда время и координаты описываются интервальными числами. Поэтому удобство работы с произведением интервалов для нас выходит на первый план. Следует отметить, что для неотрицательных реальных интервалов наше произведение совпадает с классическим произведением.

Свойства произведения интервальных чисел не так привычны, как свойства действительных чисел. Например, рассмотрим уравнение $x \times x = a$. Оно сводится к системе

$$\begin{cases} (\operatorname{mid} x)^2 + (\operatorname{rad} x)^2 = \operatorname{mid} a, \\ 2 \operatorname{mid} x \operatorname{rad} x = \operatorname{rad} a. \end{cases}$$

Если $\operatorname{mid} a > |\operatorname{rad} a|$, то уравнение имеет четыре решения

$$\begin{gathered}
\frac{\sqrt{\operatorname{mid} a + \operatorname{rad} a} + \sqrt{\operatorname{mid} a - \operatorname{rad} a}}{2} + \theta \frac{\sqrt{\operatorname{mid} a + \operatorname{rad} a} - \sqrt{\operatorname{mid} a - \operatorname{rad} a}}{2}, \\
\frac{\sqrt{\operatorname{mid} a + \operatorname{rad} a} - \sqrt{\operatorname{mid} a - \operatorname{rad} a}}{2} + \theta \frac{\sqrt{\operatorname{mid} a + \operatorname{rad} a} + \sqrt{\operatorname{mid} a - \operatorname{rad} a}}{2}, \\
\frac{-\sqrt{\operatorname{mid} a + \operatorname{rad} a} + \sqrt{\operatorname{mid} a - \operatorname{rad} a}}{2} + \theta \frac{-\sqrt{\operatorname{mid} a + \operatorname{rad} a} - \sqrt{\operatorname{mid} a - \operatorname{rad} a}}{2}, \\
\frac{-\sqrt{\operatorname{mid} a + \operatorname{rad} a} - \sqrt{\operatorname{mid} a - \operatorname{rad} a}}{2} + \theta \frac{-\sqrt{\operatorname{mid} a + \operatorname{rad} a} + \sqrt{\operatorname{mid} a - \operatorname{rad} a}}{2}.
\end{gathered}$$

В частности уравнение $x \times x = 1 + 0\theta$ имеет корни $\pm 1 + 0\theta$, $0 \pm 1\theta$.

4.3 Гиперболическое представление интервальных чисел

Рассмотрим сначала положительные интервальные числа $x \in \Im_+(\mathbf{0})$, т.е. интервальные числа, для которых справедливо неравенство $\operatorname{mid} x > |\operatorname{rad} x|$. Представим интервальное число в следующем виде

$$x = \rho \cdot (\operatorname{ch} \varphi + \theta \operatorname{sh} \varphi),$$

где $\rho, \varphi \in D$, а $\operatorname{ch} \varphi$, $\theta \operatorname{sh} \varphi$ - гиперболические функции. Элементарные преобразования показывают, что для положительных интервальных чисел такое представление существует, единственно и дается следующими формулами

$$\rho = \sqrt{\operatorname{mod}(x)}, \qquad \varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{mid} x + \operatorname{rad} x}{\operatorname{mid} x - \operatorname{rad} x}.$$

Для отрицательных интервальных чисел $x \in \Im_-(\mathbf{0})$, т.е. когда $-\operatorname{mid} x > |\operatorname{rad} x|$, имеем аналогичное представление

$$x = \rho \cdot (\operatorname{ch} \varphi + \theta \operatorname{sh} \varphi),$$

но

$$\rho = -\sqrt{\operatorname{mod}(x)}, \quad \varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{mid} x + \operatorname{rad} x}{\operatorname{mid} x - \operatorname{rad} x}.$$

Рассмотрим теперь интервальные числа строго шире нуля $x \in \Im_{\cup}(\mathbf{0})$, т.е. $\operatorname{rad} x > |\operatorname{mid} x|$. Понятно, что представление в виде $x = \rho \cdot (\operatorname{ch}\varphi + \theta \operatorname{sh}\varphi)$, где $\rho, \varphi \in D$, невозможно, так как из него следует равенство $\rho^2 = \operatorname{mod}(x) < 0$. Поэтому рассмотрим представление

$$x = \rho \cdot (\operatorname{sh}\varphi + \theta \operatorname{ch}\varphi),$$

где $\rho, \varphi \in D$. Такое представление возможно единственным образом

$$\rho = \sqrt{-\operatorname{mod}(x)}, \quad \varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{mid} x + \operatorname{rad} x}{-\operatorname{mid} x + \operatorname{rad} x}.$$

Рассмотрим теперь интервальные числа строго уже нуля $x \in \Im_{\cap}(\mathbf{0})$, т.е. $-\operatorname{rad} x > |\operatorname{mid} x|$. Для таких чисел возможно представление

$$x = \rho \cdot (\operatorname{sh}\varphi + \theta \operatorname{ch}\varphi),$$

где $\rho, \varphi \in D$, причем единственным способом, который дается формулами

$$\rho = -\sqrt{-\operatorname{mod}(x)}, \varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{mid} x + \operatorname{rad} x}{-\operatorname{mid} x + \operatorname{rad} x}.$$

Осталось рассмотреть случай нулевых интервальных чисел, т.е. $|\operatorname{mid} x| = |\operatorname{rad} x|$. Если $x \neq \mathbf{0}$, то ни одно из рассмотренных выше представлений невозможно. Для $x = \mathbf{0}$ имеем $\rho = 0$, а φ – любое действительное число.

Полученные представления интервальных чисел будем называть гиперболической формой интервального числа. Параметр ρ будем называть гипермодулем, а φ – аргументом интервального числа.

Гиперболическая форма удобна для операций умножения интервальных чисел. При умножении гипермодули перемножаются, а аргументы складываются, но форма представления зависит от формы представления сомножителей. Различные варианты произведения дают следующие формулы.

$$\begin{aligned}
\rho \cdot (\operatorname{ch}\varphi + \theta \operatorname{sh}\varphi) \times \sigma \cdot (\operatorname{ch}\psi + \theta \operatorname{sh}\psi) &= \rho\sigma \cdot (\operatorname{ch}(\varphi + \psi) + \theta \operatorname{sh}(\varphi + \psi)),\\
\rho \cdot (\operatorname{ch}\varphi + \theta \operatorname{sh}\varphi) \times \sigma \cdot (\operatorname{sh}\psi + \theta \operatorname{ch}\psi) &= \rho\sigma \cdot (\operatorname{sh}(\varphi + \psi) + \theta \operatorname{ch}(\varphi + \psi)),\\
\rho \cdot (\operatorname{sh}\varphi + \theta \operatorname{ch}\varphi) \times \sigma \cdot (\operatorname{sh}\psi + \theta \operatorname{ch}\psi) &= \rho\sigma \cdot (\operatorname{ch}(\varphi + \psi) + \theta \operatorname{sh}(\varphi + \psi)).
\end{aligned}$$

Для сопряженного к положительному или отрицательному интервальному числу имеем

$$\underline{\rho \cdot (\operatorname{ch}\varphi + \theta \operatorname{sh}\varphi)} = \rho(\operatorname{ch}(-\varphi) + \theta \operatorname{sh}(-\varphi)),$$

т.е. сопряжение означает смену знака у аргумента.

Для сопряженного числа к числу строго шире или уже нуля имеем

$$\underline{\rho \cdot (\operatorname{sh}\varphi + \theta \operatorname{ch}\varphi)} = -\rho(\operatorname{sh}(-\varphi) + \theta \operatorname{ch}(-\varphi)),$$

т.е. переход к сопряженному числу означает смену знака у гипермодуля и аргумента.

Для противоположного числа к положительному или отрицательному числу имеем

$$\overline{\rho \cdot (\operatorname{ch}\varphi + \theta \operatorname{sh}\varphi)} = -\rho(\operatorname{ch}(-\varphi) + \theta \operatorname{sh}(-\varphi)),$$

т.е. переход к противоположному числу достигается сменой знаков у гипермодуля и аргумента.

Для противоположного числа к числу строго шире или уже нуля имеем

$$\overline{\rho \cdot (\operatorname{sh}\varphi + \theta \operatorname{ch}\varphi)} = \rho(\operatorname{sh}(-\varphi) + \theta \operatorname{ch}(-\varphi)),$$

т.е. переход к противоположному числу означает смену знака у аргумента.

Так же легко выражается и обратный элемент. Для положительных и отрицательных интервальных чисел имеем

$$(\rho \cdot (\operatorname{ch}\varphi + \theta \operatorname{sh}\varphi))^{-1} = \frac{1}{\rho}(\operatorname{ch}(-\varphi) + \theta \operatorname{sh}(-\varphi)).$$

Для интервальных чисел строго шире или уже нуля имеем

$$(\rho \cdot (\operatorname{sh}\varphi + \theta \operatorname{ch}\varphi))^{-1} = \frac{1}{\rho}(\operatorname{sh}(-\varphi) + \theta \operatorname{ch}(-\varphi)).$$

По индукции легко доказать формулы для возведения интервального числа в натуральную степень n

$$\begin{aligned}
[\rho \cdot (\operatorname{ch}\varphi + \theta \operatorname{sh}\varphi)]^n &= \rho^n \cdot (\operatorname{ch} n\varphi + \theta \operatorname{sh} n\varphi), \\
[\rho \cdot (\operatorname{sh}\varphi + \theta \operatorname{ch}\varphi)]^{2n} &= \rho^{2n} \cdot (\operatorname{ch} 2n\varphi + \theta \operatorname{sh} 2n\varphi)\,, \\
[\rho \cdot (\operatorname{sh}\varphi + \theta \operatorname{ch}\varphi)]^{2n+1} &= \rho^{2n+1} \cdot (\operatorname{sh}(2n+1)\varphi + \theta \operatorname{ch}(2n+1)\varphi)\,.
\end{aligned}$$

Эти формулы можно рассматривать как аналог формул Муавра для комплексных чисел.

4.4 Интервальное объединение и пересечение интервальных чисел

Введем операции интервального объединения и пересечения интервальных чисел. Отметим еще раз, что наши интервальные числа – это пары чисел, а не множества чисел между двумя действительными числами, и поэтому понимать объединение и пересечение в теоретико-множественном стиле здесь нельзя. Сначала определим интервальное объединение и пересечение для конечного набора интервальных чисел $x_i,\ i = 1, \ldots, n$. Под интервальным объединением будем понимать интервальное число, определяемое формулой

$$\bigcup_{i=1}^{n} x_i = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\theta,$$

где $A = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\operatorname{mid} x_i + \operatorname{rad} x_i)$, $B = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\operatorname{mid} x_i - \operatorname{rad} x_i)$.

Мы использовали привычный знак теоретико-множественного объединения для интервального объединения интервальных чисел. Надеемся, что это не приведет к путанице.

Под интервальным пересечением будем понимать интервальное число, определяемое формулой

$$\bigcap_{i=1}^{n} x_i = \frac{U+V}{2} + \frac{U-V}{2}\theta,$$

где $U = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\operatorname{mid} x_i + \operatorname{rad} x_i)$, $V = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\operatorname{mid} x_i - \operatorname{rad} x_i)$.

Если исходный набор интервальных чисел бесконечен, то интервальные объединение и пересечение определяется по тем же формулам с заменой максимумов и минимумов на верхнюю и нижнюю грани. Однако теперь интервальные объединение и пересечение могут не существовать из-за возможности появления бесконечных значений.

5. Интервальные функции интервального аргумента

Ограничимся рассмотрением «одномерного» случая, т.е. когда имеется только одна координата и рассматривается ее изменение во времени. Для описания таких зависимостей будем использовать класс отображений $\Omega = \{f : \Im \to \Im\}$. Отображения из этого класса будем называть интервальными функциями. Нам потребуются также отображения из множества интервальных чисел в множество действительных чисел. Обозначим этот класс $\Psi = \{f : \Im \to D\}$. Если $f \in \Omega$ или $f \in \Psi$, то множество интервальных чисел, на которых эта функция определена, будем называть областью определения и обозначать $\operatorname{dom}(f) \subset \Im$. Для описания реальных движений будет использоваться подкласс интервальных функций $\Phi_{kh} = \{f : \Re_k \to \Re_h\}$.

Первый вопрос, который естественно возникает, это вопрос о способе задания интервальных функций. Как и для действительных функций здесь возможно аналитическое задание и задание функции с помощью таблицы значений с последующим продолжением функции. Рассмотрим сначала пример аналитического задания.

5.1 Пример - классическая интервальная функция

Пусть на числовом отрезке $[a, b]$ определены две ограниченные функции $\xi, \eta : [a, b] \to D$, причем $\xi(t) \leqslant \eta(t),\ t \in [a, b]$. Тогда классическое приближенное измерение $\varphi \in \Omega$ определим формулой

$$\varphi(x) = \frac{\sup\limits_{t \in x} \eta(t) + \inf\limits_{t \in x} \xi(t)}{2} + \frac{\sup\limits_{t \in x} \eta(t) - \inf\limits_{t \in x} \xi(t)}{2} \theta.$$

Очевидно

$$\operatorname{dom}(\varphi) = \left\{ x \in \Im \,\middle|\, \operatorname{mid} x + |\operatorname{rad} x| \, \theta \subseteq \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \theta \right\}.$$

Если $\xi(t) = \eta(t),\ t \in [a, b]$, то интервальную функцию $\varphi \in \Omega$ можно рассматривать, как продолжение вещественной функции $\xi : [a, b] \to D$ на множество интервальных чисел.

5.2 Монотонные аппроксимации

Функция $f \in \Omega$ ***называется монотонной по включению, если для любых интервальных чисел*** $x, y \in \operatorname{dom}(f)$ ***таких, что*** $x \subseteq y$***, выполнено*** $f(x) \subseteq f(y)$.

Для приближенного измерения $f \in \Omega$ определим два отображения.

Отображение $f^+ \in \Omega$, определяемое формулой

$$f^+(x) = \bigcap_{\substack{y \supseteq x \\ y \in \mathrm{dom}(f)}} f(y),$$

будем называть внешней монотонной аппроксимацией отображения $f \in \Omega$.

Отображение $f^- \in \Omega$, определяемое формулой

$$f^-(x) = \bigcup_{\substack{y \subseteq x \\ y \in \mathrm{dom}(f)}} f(y),$$

будем называть внутренней монотонной аппроксимацией отображения $f \in \Omega$.

Для гарантии конечности объединений и пересечений интервальных чисел, используемых при определении монотонных аппроксимаций, введем определение ограниченности приближенного измерения.

Функция $f \in \Omega$ называется ограниченной, если существуют интервальные числа $c, d \in \Im$, такие, что для любых интервальных чисел $x \in \mathrm{dom}(f)$ выполнено $d \subseteq f(x) \subseteq c$.

Нетрудно видеть, что если $f \in \Omega$ является ограниченной, то

$$dom(f^+) = \{x \in \Im \,|\, \exists\, y \in dom(f) :\ x \subseteq y\} \supseteq \mathrm{dom}(f),$$
$$dom(f^-) = \{x \in \Im \,|\, \exists\, y \in dom(f) :\ x \supseteq y\} \supseteq \mathrm{dom}(f).$$

Для произвольной функции $f \in \Omega$ выполнены включения

$$f^+(x) \subseteq f(x) \subseteq f^-(x), \quad x \in \mathrm{dom}(f).$$

Для монотонной по включению функции $f \in \Omega$ выполнены равенства

$$f(x) = f^+(x) = f^-(x), \quad x \in \mathrm{dom}(f).$$

Очевидно, внешняя и внутренняя монотонная аппроксимации являются монотонными по включению отображениями.

Отметим, что если $f \in \Phi_{kh}$, то значения отображения $f^+(x)$, вообще говоря, не обязаны принадлежать множеству $\Re_h$, но значения отображения $f^-(x)$ всегда принадлежат $\Re_h$.

Приведем условия, гарантирующие принадлежность значений $f^+(x)$ к множеству $\Re_h$.

Определение 1. *Функция $f \in \Phi_{kh}$ называется непротиворечивой, если для любых интервальных чисел $x, y \in \mathrm{dom}(f)$, таких, что $x \cap y \in \Re_k$, выполнено $f(x) \cap f(y) \in \Re_h$.*

Предложение 1. *Если функция $f \in \Phi_{kh}$ является ограниченной и непротиворечивой, тогда для любых $x \in dom(f^+) \cap \Re_k$ выполнено $f^+(x) \in \Re_h$.*

Доказательство. Пусть $x \in dom(f^+) \cap \Re_k$. По определению функции внешней аппроксимации имеем

$$\operatorname{mid} f^+(x) + \operatorname{rad} f^+(x) = \inf_{\substack{y \supseteq x \\ y \in \operatorname{dom}(f)}} \left(\operatorname{mid} f^+(y) + \operatorname{rad} f^+(y) \right),$$
$$\operatorname{mid} f^+(x) - \operatorname{rad} f^+(x) = \sup_{\substack{z \supseteq x \\ z \in \operatorname{dom}(f)}} \left(\operatorname{mid} f^+(z) - \operatorname{rad} f^+(z) \right).$$

Конечность значений верхней и нижней граней обеспечивает условие ограниченности. Теперь по определению верхней и нижней грани для любого положительного числа ε существуют интервальные числа $y, z \in \operatorname{dom}(f)$ такие, что $y \supseteq x$, $z \supseteq x$,

$$\operatorname{mid} f^+(y) + \operatorname{rad} f^+(y) < \operatorname{mid} f^+(x) + \operatorname{rad} f^+(x) + \varepsilon,$$
$$\operatorname{mid} f^+(z) - \operatorname{rad} f^+(z) > \operatorname{mid} f^+(x) - \operatorname{rad} f^+(x) - \varepsilon.$$

Из условий $y \supseteq x$, $z \supseteq x$, следует, что $(y \cap z) \supseteq x$, и поэтому $y \cap z \in \Re_k$. Теперь из условия непротиворечивости следует, что $f(y) \cap f(z) \in \Re_h$. Из последнего условия следует справедливость неравенств

$$\begin{aligned}
\operatorname{mid} f^+(x) + \operatorname{rad} f^+(x) + \varepsilon > \operatorname{mid} f^+(y) + \operatorname{rad} f^+(y) \geqslant \\
\geqslant \min\left\{\operatorname{mid} f^+(y) + \operatorname{rad} f^+(y),\ \operatorname{mid} f^+(z) + \operatorname{rad} f^+(z)\right\} \geqslant \\
\geqslant \max\left\{\operatorname{mid} f^+(y) - \operatorname{rad} f^+(y),\ \operatorname{mid} f^+(z) - \operatorname{rad} f^+(z)\right\} + h \geqslant \\
\geqslant \operatorname{mid} f^+(z) - \operatorname{rad} f^+(z) + h > \operatorname{mid} f^+(x) - \operatorname{rad} f^+(x) - \varepsilon + h.
\end{aligned}$$

Учитывая произвольность положительного числа ε, получаем

$$\operatorname{mid} f^+(x) + \operatorname{rad} f^+(x) \geqslant \operatorname{mid} f^+(x) - \operatorname{rad} f^+(x) + h,$$

что и требовалось доказать. □

Внешнюю и внутреннюю монотонные аппроксимации можно использовать для продолжения интервальных функций.

5.3 Пример. Конечное приближенное измерение

Пусть задан конечный набор пар интервальных чисел $\{x_i, y_i\}$, $x_i \in \Re_k$, $y_i \in \Re_h$, $i = 1, \ldots, n$. Будем интерпретировать эти пары, как результаты измерений, т.е. интервалу $x_i \in \Re_k$ соответствует измерение $y_i \in \Re_h$. Таким образом можно считать, что задана интервальная функция $\mu \in \Phi_{kh}$, где $\mu(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, n$, $\operatorname{dom}(\mu) = \{x_i,\ i = 1, \ldots, n\}$.

Относительно интервальных чисел $x_i \in \Re_k$ будем предполагать наличие упорядоченности $x_i + (k + 0\theta) \leqslant x_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Если интерпретировать интервальные числа $x_i \in \Re_k$, как моменты времени, в которые производятся измерения, то такое предположение выглядит вполне естественно. Из условия упорядоченности и положительности числа k следует, что для любой пары интервальных чисел $x_i, x_j \in \Re_k$ не может быть выполнено соотношение $x_i \supseteq x_j$.

Рассмотрим внешнюю и внутреннюю монотонные аппроксимации μ^+, μ^-. Как отмечалось, $\mathrm{dom}(\mu) \subseteq \mathrm{dom}(\mu^+) \cap \mathrm{dom}(\mu^-)$. (Отметим, что здесь знак пересечения подразумевается в теоретико-множественном смысле.) Возьмем $x \in \mathrm{dom}(\mu^+) \cap \mathrm{dom}(\mu^-)$. Тогда существуют интервальные числа $y, z \in \mathrm{dom}(\mu)$, такие, что $y \subseteq x \subseteq z$. Отсюда $y \subseteq z$, а следовательно, $y = x = z$. Это доказывает равенство $\mathrm{dom}(\mu) = \mathrm{dom}(\mu^+) \cap \mathrm{dom}(\mu^-)$. Нетрудно также видеть, что $\mu^+(x) = \mu^-(x) = \mu(x)$ для $x \in \mathrm{dom}(\mu)$.

Теперь можно построить продолжение приближенного измерения $\mu \in \Phi_{kh}$ по формуле

$$\tilde{\mu}(x) = \begin{cases} \mu^+(x), & x \in dom(\mu^+), \\ \mu^-(x), & x \in dom(\mu^-). \end{cases}$$

Возьмем два соседних интервальных числа $x_i, x_{i+1} \in \Re_k$ и интервальное число из внутренности сегмента $y \in]x_i, x_{i+1}[$. Нетрудно видеть, что $y \notin \mathrm{dom}(\tilde{\mu})$. Таким образом построенное продолжение не распространяется на внутренности сегментов между соседними интервальными числами. Для построения продолжения на сегмент рассмотрим другие методы.

5.4 Линейный метод продолжения

Рассмотрим два интервальных числа $a, b \in \Re_k$, удовлетворяющих условию $a < b$. Пусть приближенное измерение f задано на этих интервальных числах и принимает следующие значения $f(a) = A$, $f(b) = B$. Нашей задачей является продолжить функцию f на сегмент $[a, b]$ «линейным» образом.

Сначала рассмотрим линейное представление произвольного интервального числа x из сегмента $[a, b]$. Из определения сегмента следует справедливость неравенств

$$\begin{aligned} \mathrm{mid}\, a + \mathrm{rad}\, a \leqslant \mathrm{mid}\, x + \mathrm{rad}\, x \leqslant \mathrm{mid}\, b + \mathrm{rad}\, b, \\ \mathrm{mid}\, a - \mathrm{rad}\, a \leqslant \mathrm{mid}\, x - \mathrm{rad}\, x \leqslant \mathrm{mid}\, b - \mathrm{rad}\, b. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что x можно представить в следующем виде

$$\begin{gathered} \mathrm{mid}\, x + \mathrm{rad}\, x = \mathrm{mid}\, a + \mathrm{rad}\, a + \xi(\mathrm{mid}\, b + \mathrm{rad}\, b - \mathrm{mid}\, a - \mathrm{rad}\, a), \\ \mathrm{mid}\, x - \mathrm{rad}\, x = \mathrm{mid}\, a - \mathrm{rad}\, a + \eta(\mathrm{mid}\, b - \mathrm{rad}\, b - \mathrm{mid}\, a + \mathrm{rad}\, a), \\ 0 \leqslant \xi, \eta \leqslant 1, \end{gathered}$$

или

$$\begin{aligned} \mathrm{mid}\, x &= \mathrm{mid}\, a + \frac{\xi}{2}(\mathrm{mid}\, b + \mathrm{rad}\, b - \mathrm{mid}\, a - \mathrm{rad}\, a) + \frac{\eta}{2}(\mathrm{mid}\, b - \mathrm{rad}\, b - \mathrm{mid}\, a + \mathrm{rad}\, a), \\ \mathrm{rad}\, x &= \mathrm{rad}\, a + \frac{\xi}{2}(\mathrm{mid}\, b + \mathrm{rad}\, b - \mathrm{mid}\, a - \mathrm{rad}\, a) - \frac{\eta}{2}(\mathrm{mid}\, b - \mathrm{rad}\, b - \mathrm{mid}\, a + \mathrm{rad}\, a), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\mathrm{mid}\, x + \mathrm{rad}\, x - \mathrm{mid}\, a - \mathrm{rad}\, a}{\mathrm{mid}\, b + \mathrm{rad}\, b - \mathrm{mid}\, a - \mathrm{rad}\, a}, \\ \eta &= \frac{\mathrm{mid}\, x - \mathrm{rad}\, x - \mathrm{mid}\, a + \mathrm{rad}\, a}{\mathrm{mid}\, b - \mathrm{rad}\, b - \mathrm{mid}\, a + \mathrm{rad}\, a}. \end{aligned}$$

Эти же формулы мы используем для продолжения функции с заменой a, b на A, B, а коэффициенты ξ, η оставим без изменения

$$\operatorname{mid} f(x) = \operatorname{mid} A + \frac{\xi}{2}(\operatorname{mid} B + \operatorname{rad} B - \operatorname{mid} A - \operatorname{rad} A) + \\ + \frac{\eta}{2}(\operatorname{mid} B - \operatorname{rad} B - \operatorname{mid} A + \operatorname{rad} A),$$

$$\operatorname{rad} f(x) = \operatorname{rad} A + \frac{\xi}{2}(\operatorname{mid} B + \operatorname{rad} B - \operatorname{mid} A - \operatorname{rad} A) - \\ - \frac{\eta}{2}(\operatorname{mid} B - \operatorname{rad} B - \operatorname{mid} A + \operatorname{rad} A).$$

После преобразований получаем $f(x) = A + (B - A) \times (x - a) \times (b - a)^{-1}$. Как видим, получилась формула вполне аналогичная соответствующей формуле для действительной функции действительного аргумента. Это дает основания называть *линейной интервальной функцией* $l \in \Omega$ функцию следующего вида $l(x) = a + b \times x$, где $a, b, x \in \Im$. С другой стороны удобный вид формулы линейного продолжения может служить аргументом в пользу принятого здесь определения произведения интервальных чисел.

6. Предел интервальной функции

Понятие предела моделирует локальную аппроксимацию функции с помощью одного интервального числа. Символом L обозначим некоторое подмножество ненулевых интервальных чисел $L \subset \Im_{\#}$, которое будем называть малыми интервальными числами и использовать для задания возмущений интервальных чисел. Другими словами множество L и будет задавать модель «локальности» аппроксимации.

Рассмотрим некоторое подмножество интервальных чисел $U \subseteq \Im$.

Определение 2. *Интервальное число $x \in \Im$ называется L–внутренним для множества U, если для любого интервального числа $\tau \in L$ выполнено $x + \tau \in U$.*

Множество L–внутренних чисел для подмножества U обозначим $\operatorname{Int}(U, L)$.

Пусть $\alpha \in \Im^{+}(\mathbf{0})$.

Определение 3. *Интервальное число $A \in \Im$ будем называть (L, α)–пределом функции $f \in \Omega$ в точке $x \in \operatorname{Int}(\operatorname{dom}(f), L)$, если для любого интервального числа $\tau \in L$ выполнено*

$$f(x + \tau) \in O(A, \alpha).$$

Обозначать предел будем следующим образом $\operatorname{Lim}(f, x, L, \alpha)$.

В этом определении использовалась окрестность $O(p, \alpha)$. Можно сформулировать аналогичное определение, но с использованием вместо $O(p, \alpha)$ окрестности в виде сегмента $\langle p, \alpha \rangle$. Такой предел будем называть сегментным (L, α)–пределом и обозначим $\operatorname{sLim}(f, x, L, \alpha)$.

Введенные понятия предела являются параметризованными семействами множеств и естественно могут рассматриваться, как мягкие отображения [1].

Рассмотрим условия существования интервального предела.

Определение 4. *Назовем L–вариацией функции $f \in \Omega$ интервальную функцию* $\operatorname{var} f(x, L)$*, где* $x \in \operatorname{Int}(\operatorname{dom}(f), L)$ *и*

$$\operatorname{mid} \operatorname{var} f(x, L) = \frac{1}{2} \sup_{\tau, \lambda \in L} \left[\operatorname{mid} f(x+\tau) - \operatorname{mid} f(x+\lambda)\right],$$
$$\operatorname{rad} \operatorname{var} f(x, L) = \frac{1}{2} \sup_{\tau, \lambda \in L} \left[\operatorname{rad} f(x+\tau) - \operatorname{rad} f(x+\lambda)\right].$$

Предложение 2. *(L, α)–предел функции $f \in \Omega$ в точке $x \in \operatorname{Int}(\operatorname{dom}(f), L)$ существует тогда и только тогда, когда* $\operatorname{mid} \operatorname{var} f(x, L) \leqslant \operatorname{mid} \alpha$, $\operatorname{rad} \operatorname{var} f(x, L) \leqslant \operatorname{rad} \alpha$.

Условие $A \in \operatorname{Lim}(f, x, L, \alpha)$ эквивалентно системе неравенств

$$\sup_{\tau \in L} \operatorname{mid} f(x+\tau) - \operatorname{mid} \alpha \leqslant \operatorname{mid} A \leqslant \inf_{\tau \in L} \operatorname{mid} f(x+\tau) + \operatorname{mid} \alpha,$$
$$\sup_{\tau \in L} \operatorname{rad} f(x+\tau) - \operatorname{rad} \alpha \leqslant \operatorname{rad} A \leqslant \inf_{\tau \in L} \operatorname{rad} f(x+\tau) + \operatorname{rad} \alpha.$$

Можно выразить предел и в виде окрестности. Для этого введем интервальную функцию $\operatorname{centr}(f, x, L)$, где $x \in \operatorname{Int}(\operatorname{dom}(f), L)$ и

$$\operatorname{mid} \operatorname{centr}(f, x, L) = \frac{1}{2} \left[\sup_{\tau \in L} \operatorname{mid} f(x+\tau) + \inf_{\tau \in L} \operatorname{mid} f(x+\tau)\right],$$
$$\operatorname{rad} \operatorname{centr}(f, x, L) = \frac{1}{2} \left[\sup_{\tau \in L} \operatorname{rad} f(x+\tau) + \inf_{\tau \in L} \operatorname{rad} f(x+\tau)\right].$$

Тогда в случае существования предела он выражается формулой

$$\operatorname{Lim}(f, x, L, \alpha) = O(\operatorname{centr}(f, x, L), \alpha - \operatorname{var} f(x, L)).$$

Совершенно аналогично получаются условия существования сегментного предела.

Определение 5. *Назовем сегментной L–вариацией функции $f \in \Omega$ интервальную функцию* $\operatorname{svar} f(x, L)$*, где* $x \in \operatorname{Int}(\operatorname{dom}(f), L)$ *и*

$$\operatorname{mid} \operatorname{svar} f(x, L) = \frac{1}{2} \sup_{\tau, \lambda \in L} \left[\operatorname{mid} f(x+\tau) + \operatorname{rad} f(x+\tau) - \operatorname{mid} f(x+\lambda) - \operatorname{rad} f(x+\lambda)\right],$$
$$\operatorname{rad} \operatorname{svar} f(x, L) = \frac{1}{2} \sup_{\tau, \lambda \in L} \left[\operatorname{mid} f(x+\tau) - \operatorname{rad} f(x+\tau) - \operatorname{mid} f(x+\lambda) + \operatorname{rad} f(x+\lambda)\right].$$

Предложение 3. *Сегментный (L, α)–предел функции $f \in \Omega$ в точке $x \in \operatorname{Int}(\operatorname{dom}(f), L)$ существует тогда и только тогда, когда* , $\operatorname{mid} \operatorname{svar} f(x, L) \leqslant \operatorname{mid} \alpha$, $\operatorname{rad} \operatorname{svar} f(x, L) \leqslant \operatorname{rad} \alpha$.

Условие $A \in sLim(f, x, L, \alpha)$ эквивалентно системе неравенств

$$\sup_{\tau \in L} \left[\operatorname{mid} f(x+\tau) + \operatorname{rad} f(x+\tau)\right] - \operatorname{mid} \alpha \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{mid} A + \operatorname{rad} A \leqslant \inf_{\tau \in L} \left[\operatorname{mid} f(x+\tau) + \operatorname{rad} f(x+\tau)\right] + \operatorname{mid} \alpha,$$

$$\sup_{\tau\in L}[\operatorname{mid} f(x+\tau)-\operatorname{rad} f(x+\tau)]-\operatorname{rad}\alpha\leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{mid} A-\operatorname{rad} A\leqslant \inf_{\tau\in L}[\operatorname{mid} f(x+\tau)-\operatorname{rad} f(x+\tau)]+\operatorname{rad}\alpha.$$

Введем интервальную функцию $\operatorname{scentr}(f,x,L)$, где

$$\operatorname{mid}\operatorname{scentr}(f,x,L)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\sup_{\tau\in L}[\operatorname{mid} f(x+\tau)+\operatorname{rad} f(x+\tau)]+\inf_{\tau\in L}[\operatorname{mid} f(x+\tau)+\operatorname{rad} f(x+\tau)]\right)+$$
$$+\frac{1}{4}\left(\sup_{\tau\in L}[\operatorname{mid} f(x+\tau)-\operatorname{rad} f(x+\tau)]+\inf_{\tau\in L}[\operatorname{mid} f(x+\tau)-\operatorname{rad} f(x+\tau)]\right),$$

$$\operatorname{rad}\operatorname{scentr}(f,x,L)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\sup_{\tau\in L}[\operatorname{mid} f(x+\tau)+\operatorname{rad} f(x+\tau)]+\inf_{\tau\in L}[\operatorname{mid} f(x+\tau)+\operatorname{rad} f(x+\tau)]\right)-$$
$$-\frac{1}{4}\left(\sup_{\tau\in L}[\operatorname{mid} f(x+\tau)-\operatorname{rad} f(x+\tau)]+\inf_{\tau\in L}[\operatorname{mid} f(x+\tau)-\operatorname{rad} f(x+\tau)]\right).$$

Тогда в случае существования сегментного предела он выражается формулой

$$\operatorname{sLim}(f,x,L,\alpha)=\langle\operatorname{scentr}(f,x,L),\alpha-\operatorname{svar} f(x,L)\rangle.$$

Заключение

В работе приведено введение в теорию приближенных чисел, для которых использовано представление в виде интервальных чисел. Дальнейшим развитием подхода могут являться интервальные производные, которые могут использоваться для приближенного описания движения различных объектов.

Список литературы

[1] Молодцов Д.А. Теория мягких множеств. М.: Едиториал УРСС, 2004.

[2] Херцбергер Ю., Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления. Москва: Мир, 1987.

[3] Добронец Б.С. Интервальная математика. Красноярск: Издательство КГУ, 2004.

[4] Moore R.E. Methods and applications of interval analysis. In Philadelphia: SIAM, 1979.

[5] Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J. Introduction to interval analysis. In Philadelphia: SIAM, 2009.

[6] Kaucher E. Interval analysis in the extended interval space ir. Computing Supplementa, 2:33—49, 1980.

[7] Lakeyev A.V. Linear algebraic equations in kaucher arithmetic. In Reliable Computing, Supplement (Extended Abstracts of AOIC"95: International Workshop on Applications of Interval Computations, El Paso, TX, Febr. 23-25, pages 130–133, 1995.

[8] Lakeyev A.V. On existence and uniqueness of solutions of linear algebraic equations in kaucher's interval arithmetic. In Csendes T., editor, Developments in Reliable Computing, pages 53–65. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.