УДК 512.643

СОВМЕСТНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ НАД РЕШЕТКАМИ

Жуклина А.В.
Кафедра алгебры и методики преподавания математики,
Красноярский государственный педагогический университет
им. В.П. Астафьева, г. Красноярск

Поступила в редакцию 02.06.2010, после переработки 21.12.2011.

Устанавливаются критерии совместности матричных уравнений $AX = B$ над решетками, если матрицы A, B обладают специальными свойствами. Приводятся формулы для нахождения наибольших и наименьших решений.

We obtain criteria of solvability of matrix equations $AX = B$ over a lattice in case matrices A, B are possessed of some special properties. The formulas for calculation of the greatest and least solutions are obtained.

Ключевые слова: решеточные матрицы, решетки.
Keywords: matrices over lattices, lattices.

1. Введение

Пусть $(L, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Будем обозначать через 0 и 1, соответственно, наименьший и наибольший элементы в $(L, \leqslant)$ (если они существуют). Если $(L, \leqslant)$ — решетка, то будем обозначать операции объединения и пересечения символами $\vee$ и $\wedge$ соответственно.

Пусть $(L, \leqslant)$ — решетка. Решеточными называются матрицы, элементы которых принадлежат множеству L. Пусть $L^{m\times n}$ — множество всех решеточных матриц размера $m \times n$ $(m, n \geqslant 1)$ с элементами из L. Элементы матриц будем обозначать соответствующими малыми буквами: $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$, $B = \|b_{ij}\|_{m\times n}$ и т.д. На множестве $L^{m\times n}$ определим частичный порядок: для любых матриц $A, B \in L^{m\times n}$ отношение $A \leqslant B$ равносильно тому, что $a_{ij} \leqslant b_{ij}$ для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Матрицу, полученную из A траспонированием, будем обозначать A^T.

Пусть $(L, \leqslant)$ — решетка с 0 и 1. Единичной матрицей будем называть матрицу $E = E_{n\times n} \in L^{n\times n}$, такую что

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Договоримся называть объединение сложением, а пересечение умножением, после чего введем операции сложения и умножения матриц обычным образом.

Подмножество носителя решетки с нулем называется ортогональной системой, если пересечение двух любых его различных элементов равно нулю.

Пусть $(L, \leqslant)$ — решетка с 0 и 1. Элемент b называется дополнением элемента a в решетке $(L, \leqslant)$, если $a \wedge b = 0$ и $a \vee b = 1$. Если элемент b является дополнением элемента a, то будем обозначать его $\bar{a}$. Решетка $(L, \leqslant)$, любой элемент которой имеет дополнение, называется решеткой с дополнениями.

Решетка $(L, \leqslant)$ называется дистрибутивной, если для любых $a, b, c \in L$ выполняется равенство:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Дистрибутивная решетка с дополнениями называется булевой решеткой.

Пентагоном называется решетка $(\{0, 1, a, b, c\}, \leqslant)$, для которой $0 < a < 1$, $0 < c < b < 1$, $c \vee a = b \vee a = 1$, $c \wedge a = b \wedge a = 0$.

Диамантом называется решетка $(\{0, 1, a, b, c\}, \leqslant)$, для которой $a \vee b = b \vee c = c \vee a = 1$, $a \wedge b = b \wedge c = c \wedge a = 0$.

Пусть $(L, \leqslant)$ — решетка, $a, b, c \in L$ и $a \in [b, c]$ (т.е. $b \leqslant a \leqslant c$). Элемент d называется относительным дополнением элемента a в интервале $[b, c]$, если $a \vee d = c$ и $a \wedge d = b$. В дальнейшем нас будет интересовать относительное дополнение элемента a в интервале $[0, b]$, где $a, b \in L$, 0 — ноль решетки $(L, \leqslant)$, т.е. элемент, удовлетворяющий системе

$$\begin{cases} a \vee x = b, \\ a \wedge x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Отметим, что если $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с 0, то для всех $a, b \in L$ $(a \leqslant b)$ из совместности системы (1) следует единственность ее решения. В самом деле, если допустить, что система (1) имеет два решения, то решетка $(L, \leqslant)$ будет содержать пентагон или диамант, что противоречит следующему утверждению.

Решетка $(L, \leqslant)$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда она не содержит ни пентагонов, ни диамантов [1, теорема II.1.1].

Условимся в дистрибутивной решетке с 0 обозначать относительное дополнение элемента a в интервале $[0, b]$ символом d_a^b.

Заметим, что изучению матриц над решетками посвящено несколько работ. Так, Р.Д. Люк и Д.Е. Ратерфорд исследовали обратимые матрицы над решеткой $(\{0, 1\}, \leqslant)$. В 1986 году Л.А. Скорняков дал полное описание обратимых матриц над дистрибутивными решетками с 0 и 1. Было показано, что такие матрицы образуют полную линейную группу относительно умножения. Свойства этой группы были исследованы Л.А. Скорняковым и Д.П. Егоровой.

В связи с выделением матриц над решетками как самостоятельных математических объектов возникает задача изучения уравнений, элементами которых являются указанные матрицы. В настоящей работе рассматриваются матричные уравнения вида $AX = B$; устанавливаются критерии совместности таких уравнений при некоторых условиях, накладываемых на матрицы A, B.

2. Доказательство основных результатов

Теорема 1. Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с 0 и 1, и пусть матричное уравнение $AX = B$ $(A \in L^{m \times n}, B \in L^{m \times 1})$ таково, что для любых $i \in \{1, \ldots, m\}$,

$j \in \{1, \ldots, n\}$ в решетке $(L, \leqslant)$ существуют $d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}$ и $\overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}}$. Тогда уравнение $AX = B$ совместно в том и только в том случае, если ему удовлетворяет матрица $R = \|r_j\|_{n \times 1}$, где $r_j = \bigwedge\limits_{i=1}^{m} \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}}$.

Доказательство. Пусть уравнение $AX = B$ совместно. Покажем, что указанная в формулировке теоремы матрица R является наибольшим решением этого уравнения. Сначала установим, что наибольшим решением неравенства $a_{ij} \wedge x_{ij} \leqslant b_i$ $(i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\})$ является элемент $\overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}}$.

В самом деле,

$$
\begin{aligned}
a_{ij} \wedge \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}} &= \left((a_{ij} \wedge b_i) \vee d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}\right) \wedge \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}} = \\
&= \left((a_{ij} \wedge b_i) \wedge \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}}\right) \vee \left(d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i} \wedge \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}}\right) = \\
&= a_{ij} \wedge b_i \wedge \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}} \leqslant b_i.
\end{aligned}
$$

Пусть теперь $g \in L$ и g удовлетворяет рассматриваемому неравенству $a_{ij} \wedge x_{ij} \leqslant b_i$. Тогда имеют место следующие рассуждения.

Поскольку $d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i} \leqslant a_{ij}$, то $d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i} \wedge a_{ij} = d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}$ и

$$
d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i} \wedge b_i = d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i} \wedge a_{ij} \wedge b_i = 0. \tag{2}
$$

Далее,

$$
a_{ij} \wedge g = \left((a_{ij} \wedge b_i) \vee d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}\right) \wedge g = ((a_{ij} \wedge b_i) \wedge g) \vee \left(d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i} \wedge g\right),
$$

но $a_{ij} \wedge g \leqslant b_i$, следовательно, $((a_{ij} \wedge b_i) \wedge g) \vee \left(d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i} \wedge g\right) \leqslant b_i$, а потому

$$
d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i} \wedge g \leqslant b_i. \tag{3}
$$

Теперь, учитывая, что $d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i} \wedge g \leqslant d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}$, и используя (3), а затем (2), получаем $d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i} \wedge g \leqslant d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i} \wedge b_i = 0$, откуда

$$
d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i} \wedge g = 0. \tag{4}
$$

Далее,

$$
g = g \wedge \left(d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i} \vee \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}}\right) = \left(g \wedge d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}\right) \vee \left(g \wedge \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}}\right),
$$

последнее же выражение, с учетом (4), равно $g \wedge \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}}$.

Итак, $g = g \wedge \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}}$, откуда получаем, что $g \leqslant \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}}$.

Теперь, элемент $\bigwedge\limits_{i=1}^{m} \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}}$ является наибольшим решением системы неравенств

$$
\begin{cases}
a_{1j} \wedge x_j \leqslant b_1, \\
a_{2j} \wedge x_j \leqslant b_2, \\
\qquad \vdots \\
a_{mj} \wedge x_j \leqslant b_m,
\end{cases}
$$

а потому матрица $R = \|r_j\|_{n\times 1}$, где $r_j = \bigwedge\limits_{i=1}^{m} \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_i}}$, является наибольшим решением неравенства $AX \leqslant B$, но поскольку уравнение $AX = B$ совместно, то матрица R является и наибольшим решением уравнения $AX = B$. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $(L, \leqslant)$ — булева решетка, $A \in L^{m\times n}$, $B \in L^{m\times 1}$. Матричное уравнение $AX = B$ совместно тогда и только тогда, когда ему удовлетворяет матрица $R = \|r_j\|_{n\times 1}$, где $r_j = \bigwedge\limits_{i=1}^{m} \overline{(a_{ij} \wedge \overline{b_i})}$.

В случае совместности уравнения матрица R является его наибольшим решением.

Доказательство. Если $(L, \leqslant)$ — булева решетка, $a, b \in L$, то непосредственной проверкой можно убедиться, что $d^a_{a\wedge b} = a \wedge \overline{b}$. Применяя теорему 1, получаем справедливость нужного утверждения. Следствие доказано.

Частным случаем данного следствия является критерий совместности матричного уравнения $AX = B$ над $\{0,1\}$-решетками. Этот критерий представлен в [2]. Совместность матричных уравнений над $\{0,1\}$-решетками исследовалась также в [3].

Поскольку матричное уравнение $AX = B$ ($XA = B$), где $A, B \in L^{n\times n}$, равносильно системе линейных уравнений

$$\bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge x_{kj}) = b_{ij}, i, j \in \{1, \ldots, n\} \left(\bigvee_{k=1}^{n} (x_{ik} \wedge a_{kj}) = b_{ij}, i, j \in \{1, \ldots, n\} \right),$$

то из теоремы 1 и следствия 1 вытекают утверждения.

Следствие 2. а) Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с 0 и 1, и пусть матричное уравнение $AX = B$ ($A, B \in L^{n\times n}$) таково, что для любых $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ в решетке $(L, \leqslant)$ существуют $d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_{ik}}$ и $\overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_{ik}}}$. Уравнение $AX = B$ совместно тогда и только тогда, когда ему удовлетворяет матрица $R = \|r_{jk}\|_{n\times n}$, где $r_{jk} = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_{ik}}}$.

В случае совместности уравнения матрица R является его наибольшим решением.

б) Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с 0 и 1, и пусть матричное уравнение $XA = B$ ($A, B \in L^{n\times n}$) таково, что для любых $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ в решетке $(L, \leqslant)$ существуют $d^{a_{ki}}_{a_{ki}\wedge b_{ji}}$ и $\overline{d^{a_{ki}}_{a_{ki}\wedge b_{ji}}}$. Уравнение $XA = B$ совместно тогда и только тогда, когда ему удовлетворяет матрица $R = \|r_{jk}\|_{n\times n}$, где $r_{jk} = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \overline{d^{a_{ki}}_{a_{ki}\wedge b_{ji}}}$.

В случае совместности уравнения матрица R является его наибольшим решением.

Следствие 3. Пусть $(L, \leqslant)$ — булева решетка, $A, B \in L^{n\times n}$. Матричное уравнение $AX = B$ ($XA = B$) совместно тогда и только тогда, когда ему удовлетворяет матрица $R = \|r_{jk}\|_{n\times n}$, где

$$r_{jk} = \bigwedge_{i=1}^{n} \overline{(a_{ij} \wedge \overline{b_{ik}})} \left(r_{jk} = \bigwedge_{i=1}^{n} \overline{(a_{ki} \wedge \overline{b_{ji}})} \right).$$

В случае совместности уравнения матрица R является его наибольшим решением.

Следующая теорема принадлежит Л.А.Скорнякову [4].

Теорема 2. Пусть $(L,\leqslant)$ — дистрибутивная решетка с 0 и 1, $A\in L^{n\times n}$. Матрица A обратима над $(L,\leqslant)$ тогда и только тогда, когда она является ортогональной матрицей, т.е. $A\cdot A^T=A^T\cdot A=E$.

Отметим, что ортогональная матрица $A\in L^{n\times n}$ обладает свойствами:
1) $a_{ik}\wedge a_{jk}=0$ для всех $i\neq j$, $k\in\{1,\dots,n\}$;
2) $a_{i1}\vee\ldots\vee a_{in}=1$ для всех $i\in\{1,\dots,n\}$;
3) $a_{ki}\wedge a_{kj}=0$ для всех $i\neq j$, $k\in\{1,\dots,n\}$;
4) $a_{1i}\vee\ldots\vee a_{ni}=1$ для всех $i\in\{1,\dots,n\}$.

Пусть $(L,\leqslant)$ — дистрибутивная решетка с 0 и 1, $A,B\in L^{n\times n}$, A — ортогональная матрица. Тогда из теоремы Скорнякова следует, что уравнение вида $AX=B$ совместно и решением является матрица $X=A^T\cdot B$.

Рассмотрим теперь вопрос о совместности уравнений вида $AX=B$, где матрица A обладает некоторыми свойствами ортогональной матрицы.

Теорема 3. Пусть $(L,\leqslant)$ — дистрибутивная решетка с 0, $B\in L^{m\times 1}$, $A\in L^{m\times n}$ и пусть элементы каждой строки матрицы A образуют ортогональную систему. Уравнение $AX=B$ совместно тогда и только тогда, когда ему удовлетворяет матрица $R=\|r_j\|_{n\times 1}$, где $r_j=\bigvee\limits_{i=1}^{m}(a_{ij}\wedge b_i)$.

В случае совместности уравнения указанная матрица R является его наименьшим решением.

Доказательство. Пусть уравнение $AX=B$ совместно. Покажем, что указанная матрица R является его наименьшим решением.

Имеет место следующее равенство: $(a_{i1}\wedge b_i)\vee(a_{i2}\wedge b_i)\vee\ldots\vee(a_{in}\wedge b_i)=b_i$, $i\in\{1,\dots,m\}$. Если $b_i=(a_{i1}\wedge f_1)\vee(a_{i2}\wedge f_2)\vee\ldots\vee(a_{in}\wedge f_n)$, где $f_1,f_2,\dots,f_n\in L$, то в силу того, что при $j\neq k$ $a_{ij}\wedge a_{ik}=0$, получаем:

$$a_{i1}\wedge b_i=a_{i1}\wedge f_1,\ a_{i2}\wedge b_i=a_{i2}\wedge f_2,\ \dots,\ a_{in}\wedge b_i=a_{in}\wedge f_n,$$

откуда следует справедливость равенств:

$$a_{i1}\wedge b_i=a_{i1}\wedge b_i\wedge f_1,\ a_{i2}\wedge b_i=a_{i2}\wedge b_i\wedge f_2,\ \dots,\ a_{in}\wedge b_i=a_{in}\wedge b_i\wedge f_n,$$

значит,

$$a_{i1}\wedge b_i\leqslant f_1,\ a_{i2}\wedge b_i\leqslant f_2,\ \dots,\ a_{in}\wedge b_i\leqslant f_n.$$

Таким образом, вектор $(a_{i1}\wedge b_i,\ a_{i2}\wedge b_i,\ \dots,\ a_{in}\wedge b_i)$ является наименьшим решением уравнения $(a_{i1}\wedge x_1)\vee(a_{i2}\wedge x_2)\vee\ldots\vee(a_{in}\wedge x_n)=b_i$.

Далее, пусть матрица $F=\|f_j\|_{n\times 1}$ — некоторое решение уравнения $AX=B$. В силу установленного выше, для произвольного фиксированного индекса $j\in\{1,\dots,n\}$ $f_j\geqslant a_{ij}\wedge b_i$ для всех $i\in\{1,\dots,m\}$, поэтому $f_j\geqslant\bigvee\limits_{i=1}^{m}(a_{ij}\wedge b_i)$, следовательно, $F>R$.

Далее, для любого $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$\begin{aligned} b_i = (a_{i1} \wedge b_i) \vee (a_{i2} \wedge b_i) \vee \ldots \vee (a_{in} \wedge b_i) \leqslant \\ \leqslant (a_{i1} \wedge [(a_{11} \wedge b_1) \vee \ldots \vee (a_{i1} \wedge b_i) \vee \ldots \vee (a_{m1} \wedge b_m)]) \vee \\ \vee (a_{i2} \wedge [(a_{12} \wedge b_1) \vee \ldots \vee (a_{i2} \wedge b_i) \vee \ldots \vee (a_{m2} \wedge b_m)]) \vee \ldots \vee \\ \vee (a_{in} \wedge [(a_{1n} \wedge b_1) \vee \ldots \vee (a_{in} \wedge b_i) \vee \ldots \vee (a_{mn} \wedge b_m)]) \leqslant \\ \leqslant (a_{i1} \wedge f_1) \vee (a_{i2} \wedge f_2) \vee \ldots \vee (a_{in} \wedge f_n) = b_i, \end{aligned}$$

откуда следует, что для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$ $(a_{i1} \wedge r_1) \vee (a_{i2} \wedge r_2) \vee \ldots \vee (a_{in} \wedge r_n) = b_i$, т.е. R — решение уравнения $AX = B$. Теорема доказана.

Следствие 4. Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с 0, $A, B \in L^{n \times n}$ и пусть элементы каждой строки матрицы A образуют ортогональную систему. Уравнение $AX = B$ совместно тогда и только тогда, когда ему удовлетворяет матрица $R = \|r_{jk}\|_{n \times n}$, где $r_{jk} = \bigvee\limits_{i=1}^{n} (a_{ij} \wedge b_{ik})$.

В случае совместности уравнения матрица R является его наименьшим решением.

Теорема 4. Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с 0, $B \in L^{m \times 1}$, $A \in L^{m \times n}$ и пусть элементы каждого столбца матрицы A образуют ортогональную систему. Тогда следующие утверждения равносильны.

1) Уравнение $AX = B$ совместно.

2) Каждое уравнение системы, соответствующей матричному уравнению $AX = B$, имеет решение.

3) Уравнению $AX = B$ удовлетворяет матрица $R = \|r_j\|_{n \times 1}$, где $r_j = \bigvee\limits_{i=1}^{m} (a_{ij} \wedge b_i)$.

Доказательство. Покажем справедливость импликации $2 \Rightarrow 3$. Уравнение $(a_{k1} \wedge x_1) \vee (a_{k2} \wedge x_2) \vee \ldots \vee (a_{kn} \wedge x_n) = b_k$, где $k \in \{1, \ldots, m\}$, имеет решение, поэтому справедливо равенство

$$(a_{k1} \wedge b_k) \vee (a_{k2} \wedge b_k) \vee \ldots \vee (a_{kn} \wedge b_k) = b_k. \tag{5}$$

Теперь,

$$\begin{aligned} (a_{k1} \wedge r_1) \vee (a_{k2} \wedge r_2) \vee \ldots \vee (a_{kn} \wedge r_n) = \\ = \left(a_{k1} \wedge \left[\bigvee_{i=1}^{m} (a_{i1} \wedge b_i)\right]\right) \vee \left(a_{k2} \wedge \left[\bigvee_{i=1}^{m} (a_{i2} \wedge b_i)\right]\right) \vee \ldots \vee \left(a_{kn} \wedge \left[\bigvee_{i=1}^{m} (a_{in} \wedge b_i)\right]\right) = \\ = ([a_{k1} \wedge (a_{11} \wedge b_1)] \vee \ldots \vee [a_{k1} \wedge (a_{k1} \wedge b_k)] \vee \ldots \vee [a_{k1} \wedge (a_{m1} \wedge b_m)]) \vee \\ \vee ([a_{k2} \wedge (a_{12} \wedge b_1)] \vee \ldots \vee [a_{k2} \wedge (a_{k2} \wedge b_k)] \vee \ldots \vee [a_{k2} \wedge (a_{m2} \wedge b_m)]) \vee \ldots \vee \\ \vee ([a_{kn} \wedge (a_{1n} \wedge b_1)] \vee \ldots \vee [a_{kn} \wedge (a_{kn} \wedge b_k)] \vee \ldots \vee [a_{kn} \wedge (a_{mn} \wedge b_m)]). \end{aligned} \tag{6}$$

Но поскольку при $k \neq t$ $a_{kj} \wedge a_{tj} = 0$, то (6) равно $(a_{k1} \wedge b_k) \vee (a_{k2} \wedge b_k) \vee \ldots \vee (a_{kn} \wedge b_k)$, последнее же выражение, согласно (5), равно b_k. Таким образом, указанная матрица R является решением уравнения $AX = B$. Теорема доказана.

Следствие 5. Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с 0, $A, B \in L^{n\times n}$ и пусть элементы каждого столбца матрицы A образуют ортогональную систему. Тогда уравнение $AX = B$ совместно тогда и только тогда, когда ему удовлетворяет матрица $R = \|r_{jk}\|_{n\times n}$, где $r_{jk} = \bigvee\limits_{i=1}^{n}(a_{ij} \wedge b_{ik})$.

Теорема 5. Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с 0 и 1, $B \in L^{m\times 1}$, $A \in L^{m\times n}$ и пусть элементы каждого столбца матрицы A образуют ортогональную систему, при этом объединение всех элементов любого столбца матрицы A равно 1. Тогда если уравнение $AX = B$ совместно, то матрица $R = \|r_j\|_{n\times 1}$, где $r_j = \bigvee\limits_{i=1}^{m}(a_{ij} \wedge b_i)$, является наибольшим решением указанного уравнения.

Доказательство. Если уравнение $AX = B$ совместно, то согласно теореме 4, матрица $R = A^T \cdot B$ является решением этого уравнения. Пусть $F = \|f_j\|_{n\times 1}$ — некоторое решение уравнения $AX = B$. Покажем, что $F \leqslant R$.

В самом деле, для любых $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ $a_{ij} \wedge f_j \leqslant b_i$ и $a_{ij} \wedge f_j \leqslant a_{ij}$, поэтому $a_{ij} \wedge f_j \leqslant a_{ij} \wedge b_i$.

Следовательно,

$$(a_{1j} \wedge f_j) \vee (a_{2j} \wedge f_j) \vee \ldots \vee (a_{mj} \wedge f_j) \leqslant (a_{1j} \wedge b_1) \vee (a_{2j} \wedge b_2) \vee \ldots \vee (a_{mj} \wedge b_m),$$

или

$$f_j \wedge (a_{1j} \vee a_{2j} \vee \ldots \vee a_{mj}) \leqslant \bigvee_{i=1}^{m}(a_{ij} \wedge b_i),$$

но поскольку объединение всех элементов любого столбца матрицы A равно 1, то $f_j \leqslant \bigvee\limits_{i=1}^{m}(a_{ij} \wedge b_i)$. Теорема доказана.

Следствие 6. Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с 0 и 1, $A, B \in L^{n\times n}$, и пусть элементы каждого столбца матрицы A образуют ортогональную систему, при этом объединение всех элементов любого столбца матрицы A равно 1. Тогда если уравнение $AX = B$ совместно, то матрица $R = \|r_{jk}\|_{n\times n}$, где $r_{jk} = \bigvee\limits_{i=1}^{n}(a_{ij} \wedge b_{ik})$, является наибольшим решением уравнения.

Список литературы

[1] Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.

[2] Duca I., Duca M. La resolution des equations matricielles boolennes. Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys., vol. 61, №1–2, 1999, pp. 81–90.

[3] Kim K.H. Boolean Matrix Theory and its Applications. New York: Marcel Dekker, 1982.

[4] Скорняков Л.А. Обратимые матрицы над дистрибутивными структурами. Сиб. мат. журн., том 27, №2, 1986, стр. 182–185.