

На правах рукописи

Михеев Сергей Александрович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И
СИМВОЛЬНО-ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
ГРАВИТИРУЮЩЕЙ БЫСТРОВРАЩАЮЩЕЙСЯ
СВЕРХПЛОТНОЙ КОНФИГУРАЦИИ В
ПОСТНЬЮТОНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Тверь – 2006

Работа выполнена на кафедре общей математики и математической физики Тверского государственного университета

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор В.П. Цветков

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор К.М. Зингерман

доктор физико-математических наук, профессор Л.А. Севастьянов

Ведущая организация: Лаборатория информационных технологий
Объединенного института ядерных исследований г. Дубна

Защита состоится " ____ " " _____ " 2006 г. в " " на заседании диссертационного совета Д 212.263.04 при Тверском государственном университете по адресу: Тверь, ул. Желябова, 33. Факс (0822) 32-12-74.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Тверского государственного университета.

Автореферат разослан " ____ " " _____ " 2006 г.

Ученый секретарь совета

доктор технических наук, профессор

В.Н. Михно

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Благодаря открытию наблюдательной астрономией таких космических объектов как пульсары, квазары, компактные рентгеновские источники, математическое моделирование фигур равновесия самогравитирующей быстровращающейся жидкой капли является в настоящее время одним из приоритетных направлений исследования в современной астрофизике. Данная проблема фигур равновесия долгое время, со времен Ньютона, рассматривалась как чисто математическая задача ньютоновской теории гравитации, решением которой занимались выдающиеся математики: Маклорен, Якоби, Ляпунов и многие другие.

Выдающееся открытие новых космических объектов перевело эту задачу в практическую плоскость. В ряду новых космических объектов особое место занимают пульсары - быстровращающиеся намагниченные нейтронные звезды, которые по праву рассматриваются как уникальные космические лаборатории для изучения свойств ядерного вещества, гравитационного взаимодействия и влияние внутреннего магнитного поля при очень высоких давлениях и температурах.

Математическое моделирование конфигураций пульсаров актуально в связи с проводимыми в настоящее время экспериментами по регистрации гравитационного излучения. По современным представлениям быстрые миллисекундные пульсары с периодом вращения ~ 1 мс являются перспективными источниками монохроматического гравитационного излучения, поскольку имеет место асимметрия распределения масс относительно оси их вращения. И кроме того интенсивность гравитационного излучения пропорциональна 6-ой степени частоты вращения конфигурации. Прием гравитационных волн от пульсаров может открыть канал получения новой информации из космоса наряду с электромагнитными и нейтринными каналами, которые действуют в настоящее время. Что, по сути, будет являться первым шагом к созданию гравитационно-волновой астрономии. Эта задача представляет интерес и для исследования эволюции периода пульсара.

Наиболее важно построить адекватную математическую модель, описывающую все основные свойства рассматриваемых объектов. Поэтому необходимо рассматривать уравнение, описывающее пульсары с учетом релятивистских поправок, которые имеют порядок 20% – 30% от ньютоновского приближения. Но и в ньютоновском приближении остаются далеко не изученными конфигурации с реалистическими уравнениями состояния и уравнениями состояния заданными в виде политроп. В частности не было исследовано аналитическое решение вблизи точек бифуркации их конфигураций.

Отмеченные обстоятельства обуславливают актуальность темы диссертации,

направленной на построение и исследование математических моделей пульсаров с использованием символьно-численных методов.

Цели диссертационной работы: построение и исследование математической модели быстро вращающейся гравитирующей сверхплотной несжимаемой конфигурации с учетом релятивистских поправок в первом постньютоновском приближении. Доказательство существования точек бифуркации уравнения гидростатического равновесия рассматриваемой конфигурации по параметрам $e = \frac{a_3}{a_1}$ или $\varepsilon = \frac{\omega^2}{4\pi G \rho_0}$ (a_1, a_3 - полуоси эллипсоида вращения, который аппроксимирует реальную поверхность конфигурации, ω - угловая скорость вращения конфигурации, G - гравитационная постоянная, ρ_0 - плотность несжимаемой конфигурации). Построение и исследование аналитического асимметричного решения вблизи точек бифуркации при отсутствии и наличии внутреннего магнитного поля. Построение и исследование математической модели быстро вращающейся гравитирующей сверхплотной несжимаемой конфигурации в ньютоновском приближении с реалистическими уравнениями состояния Бете-Джонсона и Рейда, уравнением состояния Оппенгеймер-Волкова и уравнениями состояния в виде политроп. Доказательство существования точек бифуркации уравнения гидростатического равновесия рассматриваемых конфигураций по параметрам $e = \frac{a_3}{a_1}$ или $\varepsilon = \frac{\omega^2}{4\pi G \rho_0}$ (здесь ρ_0 - центральная плотность конфигурации). Построение и исследование аналитического асимметричного решения вблизи точек бифуркации при отсутствии и наличии внутреннего магнитного поля.

Для достижения этих целей были реализованы в системе символьной математики MAPLE следующие построенные алгоритмы:

- алгоритмы представления постньютоновских гравитационных потенциалов на внутреннюю точку возмущенной эллипсоидальной конфигурации (поверхность которой аппроксимирует реальную поверхность конфигурации) в виде полиномов от декартовых координат на основе разложения аналитических функций в ряд Бурмана-Лагранжа по степеням других аналитических функций,
- алгоритм представления уравнения гидростатического равновесия гравитирующей быстро вращающейся сверхплотной жидкой капли в виде системы моментных уравнений для определения неизвестных параметров конфигурации,
- алгоритм решения системы алгебраических уравнений регуляризованным аналогом метода Ньютона,
- алгоритм нахождения неизвестных параметров Z_{ijk} , которые наряду с a_1, a_3 определяют возмущенную эллипсоидальную поверхность, аппроксимирующую реальную поверхность конфигурации,
- алгоритм оценки погрешности методов решения уравнения гидростатического равновесия.

Методы исследования: методы теорий функций действительного и комплексного переменного, методы теории ньютоновского гравитационного потенциала, численный метод, методы компьютерной алгебры.

Новые научные результаты, выносимые на защиту:

1. Аналитическое представление постньютоновских гравитационных потенциалов однородной возмущенной эллипсоидальной конфигурации на внутреннюю точку.

2. Решение уравнения гидростатического равновесия, описывающего гравитирующую быстровращающуюся сверхплотную намагниченную конфигурацию с учетом релятивистских поправок в первом постньютоновском приближении методом степенных рядов.

3. Доказательство существования точек бифуркации по параметрам e или ε решений уравнения гидростатического равновесия конфигурации в постньютоновском приближении, и исследование полученного кубического уравнения для параметра асимметрии вблизи этих точек.

4. Решение уравнения гидростатического равновесия, описывающего гравитирующую быстровращающуюся сверхплотную намагниченную конфигурацию в ньютоновском приближении с использованием полиномов наилучшего приближения в пространстве квадратично интегрируемых функций.

5. Доказательство существования точек бифуркации по параметрам e или ε решений уравнения гидростатического равновесия конфигурации в ньютоновском приближении, и исследование полученного кубического уравнения для параметра асимметрии вблизи этих точек.

6. Доказательство существования и оценка для политропных конфигураций с показателем n в ньютоновском приближении критического значения n_k такого, что при $n < n_k$ политропные конфигурации будут иметь точки бифуркации, а при $n > n_k$ не имеют их.

Теоретическая и практическая значимость. В диссертации развивается новый подход к математическому моделированию самогравитирующих конфигураций. Результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть непосредственно использованы для предсказания свойств монохроматического гравитационного излучения пульсаров, поиски которого в настоящее время интенсивно проводятся на многих гравитационно-волновых детекторах мира. Построенный комплекс программ символьно-численных вычислений и результаты диссертационной работы можно также применить и для исследования эволюции периода пульсара.

Достоверность и обоснованность полученных в диссертационной работе научных результатов основана на использовании апробированных методов ма-

тематической физики, положенных в основу построения и исследования математических моделей гравитирующих конфигураций; на применении физически обоснованных исходных данных при построении математических моделей; на исследовании точности результатов в зависимости от параметров решаемой задачи; на сравнении полученных результатов с частными и предельными случаями, которые надежно проверены ранее.

Личный вклад автора. Автор диссертации, работая в коллективе соавторов, объединяющем сотрудников кафедры ОМиМФ ТвГУ, ЛИТ ОИЯИ, самостоятельно разработал все алгоритмы и тесты, представленные в диссертации. Его вклад в разработку и проведение исследований математических моделей, а также вклад в компьютерное моделирование, рассматриваемых объектов является определяющим. Все результаты, представленные в диссертационной работе, получены самим автором.

Апробация результатов работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на QFTHEP 2004 XVIIIth International Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory (Санкт-Петербург, 2004); I Международном междисциплинарном научном семинаре памяти гл.-корр. РАН С. П. Курдюмова "Идеи синергетики в естественных науках" (Тверь, 2005); на научных семинарах Лаборатории Информационных Технологий, Лаборатории Теоретической Физики Объединенного Института Ядерных Исследований и Тверского государственного университета; II Международном междисциплинарном научном семинаре памяти гл.-корр. РАН С. П. Курдюмова "Идеи синергетики в естественных науках" (Тверь, 2006); XLII Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии (Москва, 2006); 10-th workshop on computer algebra (Дубна, 2006).

Публикации. Основное содержание диссертации отражено в 8 публикациях в виде статей в журналах, докладов в трудах международных и всероссийских конференций, сообщений ОИЯИ. Из них две в рекомендованных ВАК изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и трех приложений. Полный объем диссертации - 134 страницы машинописного текста, включая 24 рисунка, 13 таблиц и список литературы, содержащий 103 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность поставленной проблемы, формулируются ее цели и задачи. Дан краткий обзор некоторых уже известных результатов, касающихся существования точек бифуркации для политроп. Кратко определены некоторые основные понятия. Также изложены основные методы

вычислений и построения математических моделей вращающихся конфигураций. Обоснован выбор пакета символьной математики MAPLE для использования его в вычислениях при решении поставленной проблемы.

В первой главе, основываясь на работе¹, поясняется вывод уравнения гидростатического равновесия для гравитирующей быстровращающейся сверхплотной намагниченной конфигурации с учетом релятивистских поправок в первом постньютоновском приближении, которое в дальнейшем подробно исследуется для случая однородной конфигурации. Это уравнение, содержащее постньютоновский параметр $\gamma = \frac{P_0}{\rho_0 c^2}$ (P_0 - давление в центре конфигурации, c - скорость света), можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \nabla[\tilde{\Phi} + K_0 p - \varepsilon \mathbf{r}_\perp^2 + \gamma(5\tilde{\Psi}_3 - \frac{K_0}{2} p^2 + 4(1 - p + \\ & + \frac{\tilde{\Phi}_0}{K_0})\varepsilon \mathbf{r}_\perp^2 + 3\frac{\varepsilon^2}{K_0} \mathbf{r}_\perp^4 + 8\frac{\varepsilon}{K_0}(\mathbf{r}_\perp \tilde{\xi}_\perp))] + 8\gamma\varepsilon[\mathbf{e}_3 \mathbf{r}_\perp][(\mathbf{e}_3 \mathbf{r}_\perp) \nabla_\perp p] + \\ & + 8\gamma\frac{\varepsilon}{K_0}(\mathbf{r}_\perp(\nabla_\perp \tilde{\xi}_\perp) - \nabla_\perp(\mathbf{r}_\perp \tilde{\xi}_\perp)) + \mathbf{\Pi}_{(m)} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{\Pi}_{(m)} = \frac{1}{8\pi\rho_0}(\nabla\mathbf{B}^2 - 2(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B})$, \mathbf{B} - напряженность внутреннего магнитного поля, $x_1 = \frac{x}{a_1}$, $x_2 = \frac{y}{a_1}$, $x_3 = \frac{z}{a_3}$, $p = \frac{P}{P_0}$, P - распределение давления конфигурации, $\nabla = \nabla_\perp + \nabla_\parallel$, $\nabla_\perp = \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2$, $\nabla_\parallel = \frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3$, $e = \frac{a_3}{a_1}$, $\mathbf{r}_\perp = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$, $K_0 = \frac{P_0}{2\pi G \rho_0^2 a_1^2}$, $\tilde{\Phi}_0 = \tilde{\Phi}(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0)$,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} &= -\frac{1}{2\pi a_1^2} \int \frac{dV'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}, \quad \tilde{\xi}_\perp = -\frac{1}{2\pi a_1^2} \int \mathbf{r}_\perp \frac{dV'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}, \\ \tilde{\Psi}_3 &= -\frac{1}{2\pi a_1^2} \int (p + \frac{2\varepsilon}{5K_0} \mathbf{r}_\perp^2 - \frac{2}{5}(1 + \frac{1}{K_0} \tilde{\Phi}_0)) \frac{dV'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \end{aligned} \quad (1a)$$

Во второй главе построена математическая модель гравитирующей, быстровращающейся, сверхплотной, намагниченной, однородной конфигурации с учетом релятивистских поправок в первом постньютоновском приближении. С помощью символьных и численных вычислений для построенной модели доказано существование точек бифуркации (критических точек) по параметрам ε и e решений уравнения гидростатического равновесия стационарно вращающейся гравитирующей сверхплотной намагниченной несжимаемой конфигурации, в которых происходит ответвление асимметричных решений относительно оси вращения для распределения давления и проведено исследование этих решений. В этой главе уравнение (1), описывающее гравитирующую, быстровращающуюся, сверхплотную, намагниченную, однородную конфигурацию, было решено

¹Цветков В.П. Релятивистские эффекты в теории гравитирующих быстровращающихся сверхплотных конфигураций// Письма в ЭЧАЯ в печати, препринт P2-2006-132, 2006.

методом приближения всех членов уравнения (1) полиномами от координат x_k , $k = 1, 2, 3$ нужной степени, с последующим приравниванием коэффициентов полученного полинома при соответствующих степенях, т. е. было построено асимптотически точное в центре конфигурации решение, которое может быть аналитически продолжено до границы конфигурации.

Уравнение (1) явно зависит от формы границы $p(x, y, z) = 0$. Поскольку эта граница имеет сложный вид, затрудняющий аналитические вычисления, то мы заменим ее возмущенной эллипсоидальной поверхностью δD : $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \sum_{i,j,k}^L Z_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k = 1$, форма которой зависит от неизвестных параметров Z_{ijk} , L - максимальная степень многочлена по координатам x_k .

Условие близости точной поверхности и δD можно сформулировать введением функции Λ :

$$\Lambda = \frac{1}{4\pi p_0^2} \int_{\delta D} p^2 d\Omega \quad (2)$$

Очевидно, параметр $\eta_{\delta D} = \Lambda^{\frac{1}{2}}$ будет представлять меру погрешности в наших уравнениях при замене точной поверхности конфигурации на δD . Условие минимума Λ приводит к уравнениям:

$$\Psi_{ijk} = \frac{\partial \Lambda}{\partial Z_{ijk}} = 0, \Psi_1 = a_1 \frac{\partial \Lambda(Z_{ijk} = 0)}{\partial a_1} = 0, \Psi_2 = a_3 \frac{\partial \Lambda(Z_{ijk} = 0)}{\partial a_3} = 0. \quad (3)$$

Распределение давления конфигурации p будем аппроксимировать полиномом от координат степени P : $p = \sum_{a,b,c}^P p_{abc} x_1^a x_2^b x_3^c$.

При решении задачи наибольшую сложность для аналитических вычислений представляют в (1) вычисления ньютоновского $\tilde{\Phi}$ и постньютоновских $\tilde{\Psi}_3, \tilde{\xi}_\perp$ гравитационных потенциалов на внутреннюю точку.

В работе² с использованием рядов Бурмана-Лагранжа доказана теорема, согласно которой внутренний гравитационный потенциал Φ в общем случае неоднородной и в частности однородной конфигурации может быть представлен абсолютно и равномерно сходящимся рядом по коэффициентам Z_{ijk} при некоторых ограничениях на Z_{ijk} , коэффициенты разложения, при которых являются полиномами степени $P + s(L - 2) + 2$ координат x_k . Здесь s номер члена ряда Бурмана-Лагранжа. Таким образом

$$\tilde{\Phi} = \sum_{a,b,c}^{P+s(L-2)+2} \tilde{\Phi}_{abc} x_1^a x_2^b x_3^c \quad (4)$$

²Цветков В.П., Масюков В.В. Метод рядов Бурмана-Лагранжа в задаче об аналитическом представлении ньютоновского гравитационного потенциала возмущенных эллипсоидальных конфигураций // ДАН СССР, 1990, Т. 313, №5, с. 1099-1102.

Следуя указанной работе, переходя к "анизотропным обобщенным сферическим координатам" \tilde{R} , θ , φ со смещением центра координат в точку наблюдения x_k

$$x'_k = x_k + \alpha_k \tilde{R}, \alpha_1 = \frac{1}{\alpha} \frac{a_0}{a_1} \sin \theta \cos \varphi, \alpha_2 = \frac{1}{\alpha} \frac{a_0}{a_1} \sin \theta \sin \varphi, \alpha_3 = \frac{1}{\alpha} \frac{a_0}{a_3} \cos \theta,$$

$$\alpha = \left(\frac{a_0^2}{a_1^2} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \frac{a_0^2}{a_1^2} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \frac{a_0^2}{a_3^2} \cos^2 \theta \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

$$a_0 = (a_1, a_2, a_3)^{\frac{1}{3}}, 0 \leq \tilde{R} \leq R,$$

имеем аналитические представления постньютоновских гравитационных потенциалов, реализованные в системе символьной математики MAPLE в виде полиномов от координат x_k :

$$\tilde{\Psi}_3 = \sum_{a,b,c}^{P+s(L-2)+2} \tilde{\Psi}_{3abc} x_1^a x_2^b x_3^c \quad (6a)$$

$$\tilde{\xi}_{\perp_{\tilde{i}}} = \sum_{a,b,c}^{P+s(L-2)+2} \tilde{\xi}_{\perp_{\tilde{i}}abc} x_1^{a+\delta_{1\tilde{i}}} x_2^{b+\delta_{2\tilde{i}}} x_3^c, \quad \tilde{i} = 1, 2 \quad (6b)$$

Здесь $\delta_{\tilde{i}\tilde{j}}$ - дельта символ Кронекера.

Будем считать, что функцию $\Pi_{(m)}$ можно с достаточной степенью точности аппроксимировать градиентом от некоторой функции координат x_k , которую мы приближаем полиномом степени P $\Pi_{(m)} = k_m \nabla \sum_{a,b,c}^P \Pi_{(m)abc} x_1^a x_2^b x_3^c$, $k_m = \frac{B_0^2}{8\pi G \rho_0 a_1^2}$, B_0 - характерная напряженность магнитного поля в центре конфигурации. Учитывая последнее равенство, (4), (6a), (6b) мы можем все члены уравнения (1) представить в виде полиномов от декартовых координат x_k . На основе вышесказанного нами составлен комплекс программ который (1) представляет в виде

$$H_{\tilde{i}}^{(0,P)}(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad H_{\tilde{i}}^{(0,P)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{a,b,c}^P H_{\tilde{i}abc}^{(0,P)} x_1^a x_2^b x_3^c, \quad \tilde{i} = 1, 2, 3 \quad (7)$$

Таким образом система уравнений, определяющая все неизвестные параметры конфигурации, будет состоять из уравнений (3) и уравнений, получаемых приравниванием коэффициентов (7) к нулю. Отметим, что для фигур вращения $p = p(x_1^2 + x_2^2, x_3^2)$ члены (1) стоящие не под градиентом обращаются в ноль, за исключением $\Pi_{(m)}$, которым в наших допущениях для фигур вращения можно пренебречь. В этом случае (1) мы можем представить в виде одного скалярного уравнения.

Коэффициенты, определяющие структуру конфигурации, представим в виде разложения по степеням малого параметра асимметрии X до квадратичного включительно $p_{abc} = \frac{(\frac{a+b}{2})!}{(\frac{a}{2})!(\frac{b}{2})!} p_{a+b,c} + p_{1(ab)c} X^2 + p_{[ab]c} X$, $Z_{ijk} = \frac{(\frac{i+j}{2})!}{(\frac{i}{2})!(\frac{j}{2})!} Z_{i+j,k} + Z_{1(ij)k} X^2 + Z_{[ij]k} X$, где $p_{1(ab)c} = p_{1(ba)c}$, $p_{[ab]c} = -p_{[ba]c}$, $Z_{1(ij)k} = Z_{1(ji)k}$, $Z_{[ij]k} = -Z_{[ji]k}$, $p_{[20]0}=1$.

Тогда (3), (7) будет представлять собой систему уравнений, содержащую степени малого параметра X . Поэтому возможно использовать метод разложения по малому параметру X . При этом (3), (7) фактически распадается на две системы: симметричную, содержащую только четные степени X и асимметричную, содержащую только нечетные степени параметра асимметрии.

В первом приближении положим $X = 0$. Двумерные массивы неизвестных в системе (3), (7) p_{ac} , Z_{ik} , $K_0 = K_{00}$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ обозначим, как y_m , ($m = 1, 2 \dots N_1$), где $N_1 = \frac{1}{8}(P+2)(P+4) + \frac{1}{8}(L+2)(L+4)$. При $P = 4$ и $L = 4$ имеем $N_1 = 12$. В этом случае уравнения (3), (7) могут быть записаны в векторном виде системы 12 нелинейных алгебраических уравнений: $\mathbf{f}(\mathbf{y}, e) = 0$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{12})$. Вследствие плохой обусловленности матрицы Якоби $f'(\mathbf{y}, e) = 0$ для численного решения полученной системы мы использовали регуляризованный аналог метода Ньютона, итерационная схема которого имеет вид

$$\mathbf{y}^{(n+1)}(e) = \mathbf{y}^{(n)}(e) - \tau_n [\alpha f^2(\mathbf{y}^{(n)}(e), e) + \tilde{f}'(\mathbf{y}^{(n)}(e), e) f'(\mathbf{y}^{(n)}(e), e)]^{-1} \times \\ \times \tilde{f}'(\mathbf{y}^{(n)}(e), e) \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(n)}(e), e) \quad (8)$$

где n - номер итерации τ_n - итерационный параметр ($0.1 \ll \tau_n \ll 1$), $\tilde{f}'(\mathbf{y}^{(n)}(e), e)$ - транспонированная матрица Якоби. Величина $\sqrt{f^2(\mathbf{y}^{(n)}(e), e)}$ представляет собой невязку и определяет точность решения системы уравнений, которая в нашем случае составила 10^{-15} .

Графики найденных функций ε , K_0 от e представлены на рисунке 1.

Численные значения $y_m(e)$ мы подставляем в (3), (7), и далее решаем антисимметричную систему в линейном по X приближении, достаточно хорошо описывающим состояние конфигурации вдали от критических точек по параметру e_k . Трехмерный массив неизвестных мы также перевели в одномерный x_m , $m = 1, 2, \dots, N_2$ (в случае $P = 4$ и $L = 4$, $N_2 = 6$). В линейном по X приближении (3), (7) имеет вид: $A_i^p(y(e), e) x_p X = \eta_m \delta_{l1}$, $x_1 = p_{[20]0} = 1$, $\eta_m = -\frac{1}{2} k k_m \sin^2 \alpha$, α - угол наклона магнитной оси к оси вращения конфигурации. Здесь и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Влияние магнитных напряжений мы рассматриваем в самой простой модели, когда отличны от нуля два коэффициента $\Pi_{(m)[20]0} = -\Pi_{(m)[02]0} = \frac{k}{2}$, k - показатель скорости уменьшения магнитного поля при удалении от магнитной оси.

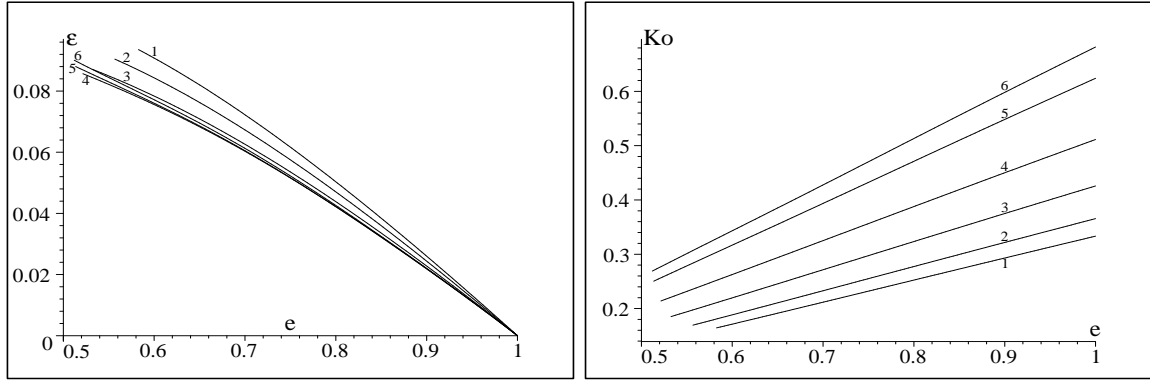


Рис. 1: На первом слева рисунке приводится зависимость функции ε от параметра e , на втором слева рисунке приводится зависимость функции K_0 от параметра e ; кривые 1 соответствуют значению $\gamma = 0$, 2 - $\gamma = 0.01$, 3 - $\gamma = 0.03$, 4 - $\gamma = 0.06$, 5 - $\gamma = 0.1$, 6 - $\gamma = 0.12$

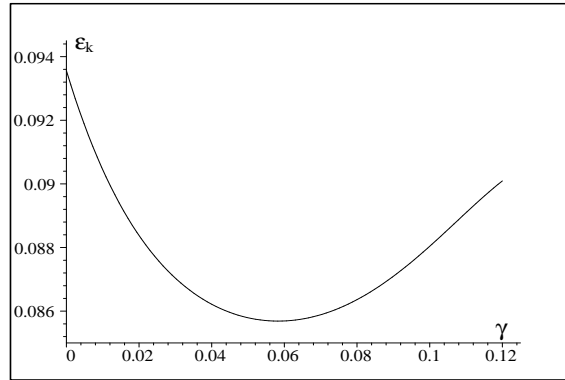


Рис. 2: Зависимость величины ε_k от параметра γ

Значения e_k для различных значений параметра γ находятся из условия $X(e \rightarrow e_k) \rightarrow \infty$ и приводятся в таблице 1.

Таблица 1: Значения параметров e и ε в точках бифуркации для различных значений параметра γ .

	$\gamma = 0$	$\gamma = 0.01$	$\gamma = 0.03$	$\gamma = 0.06$	$\gamma = 0.09$	$\gamma = 0.12$
e_k	$5.83 \cdot 10^{-1}$	$5.57 \cdot 10^{-1}$	$5.33 \cdot 10^{-1}$	$5.21 \cdot 10^{-1}$	$5.15 \cdot 10^{-1}$	$5.12 \cdot 10^{-1}$
ε_k	$9.36 \cdot 10^{-2}$	$9.04 \cdot 10^{-2}$	$8.70 \cdot 10^{-2}$	$8.57 \cdot 10^{-2}$	$8.72 \cdot 10^{-2}$	$9.01 \cdot 10^{-2}$

На рисунке 2 приведен график зависимости ε_k от γ .

Из графика рисунка 2 видно, что в критической точке угловая скорость конфигурации будет уменьшаться при увеличении центрального давления этой конфигурации для фиксированной центральной плотности, то есть при увеличении γ от нуля до $\gamma_{min} = 5.83 \cdot 10^{-2}$. Для $\gamma = \gamma_{min}$ ε_k принимает значение $\varepsilon_{k_{min}} = 8.57 \cdot 10^{-2}$. При $\gamma > \gamma_{min}$ происходит увеличение параметра ε в точке бифуркации несжимаемой конфигурации.

Линейное приближение не применимо в области $|e - e_k| \leq \eta_m^{\frac{2}{3}}$. В этой области систему (3), (7) необходимо решать с точностью до X^3 включительно. Тогда (3), (7) примет вид: $(A_l^p x_p)X + (B_l^{ptr} x_p x_t x_r)X^3 = \eta_m \delta_{l1}$, $l, p, t, r = 1, 2 \dots N_2$, $x_1 = p_{[20]0} = 1$.

При $l \neq 1$, находим решения $x_p = x_p(e)$. В области $|e - e_k| \gg \eta_m^{\frac{2}{3}}$ находим, при $l = 1$, $X = X(e, \eta_m) \simeq \eta_m$. В области $|e - e_k| \leq \eta_m^{\frac{2}{3}}$ для параметра асимметрии X получается кубическое уравнение

$$\alpha(e - e_k)X + \beta X^3 = \eta_m, \quad (9)$$

здесь α и β постоянные коэффициенты, значения которых приведены в таблице 2.

Таблица 2: Значения коэффициентов α и $-\beta$ для различных γ .

	$\gamma = 0$	$\gamma = 0.01$	$\gamma = 0.03$	$\gamma = 0.06$	$\gamma = 0.09$	$\gamma = 0.12$
α	$2.74 \cdot 10^{-1}$	$2.49 \cdot 10^{-1}$	$2.94 \cdot 10^{-1}$	$4.62 \cdot 10^{-1}$	$7.40 \cdot 10^{-1}$	1.14
$-\beta$	$1.52 \cdot 10^{-2}$	$2.22 \cdot 10^{-2}$	$2.53 \cdot 10^{-2}$	$2.44 \cdot 10^{-2}$	$2.33 \cdot 10^{-2}$	$2.30 \cdot 10^{-2}$

Из (9) и данных таблицы 2 следует, что при отсутствии магнитного поля в точке бифуркации возникает хорошо известное для нелинейных уравнений динамическое спонтанное нарушение аксиальной симметрии в распределении давления конфигурации.

При наличии магнитных напряжений в точках $e = e_k$ происходит ветвление асимметричных решений относительно оси вращения для распределения давления конфигурации. Необходимо отметить, что величина параметра асимметрии X в области $|e - e_k| \leq \eta_m^{\frac{2}{3}}$ будет на много порядков больше, нежели в области $|e - e_k| \gg \eta_m^{\frac{2}{3}}$.

В критических точках $e = e_k$ имеем $X_k = X(e_k) = \left(\frac{\eta_m}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}}$.

В этой главе также проведена оценка погрешности решений уравнений описывающих гравитрующую, быстровращающуюся, сверхплотную конфигурацию.

Порядок допущенной погрешности при решении поставленной задачи определяется величиной γ^2 . А погрешность округления в нашем случае порядка 10^{-15} , поэтому ей мы можем пренебречь.

Погрешность метода решения Δ мы вычисляли в метрике пространства квадратично интегрируемых функций. Отметим, что основной вклад в конфигурацию вносят параметры, соответствующие фигуре вращения. В пакете MAPLE была составлена программа для вычисления Δ , значения которой для различных значений γ приводится в таблице 3.

Таблица 3: Погрешность метода решения задачи для различных значений γ .

e	$\Delta(\gamma = 0.01)$	$\Delta(\gamma = 0.03)$	$\Delta(\gamma = 0.06)$	$\Delta(\gamma = 0.09)$	$\Delta(\gamma = 0.012)$
1	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$9.30 \cdot 10^{-4}$	$3.77 \cdot 10^{-3}$	$8.71 \cdot 10^{-3}$	$1.60 \cdot 10^{-2}$
0.8	$3.53 \cdot 10^{-5}$	$3.71 \cdot 10^{-4}$	$1.73 \cdot 10^{-3}$	$4.35 \cdot 10^{-3}$	$8.48 \cdot 10^{-3}$
0.6	$2.76 \cdot 10^{-5}$	$2.31 \cdot 10^{-4}$	$7.95 \cdot 10^{-4}$	$1.65 \cdot 10^{-3}$	$2.97 \cdot 10^{-3}$
e_k	$2.74 \cdot 10^{-5}$	$2.37 \cdot 10^{-4}$	$8.65 \cdot 10^{-4}$	$1.86 \cdot 10^{-3}$	$3.30 \cdot 10^{-3}$

Как и следовало ожидать, наиболее точные решения мы получили при малых значениях параметра γ . Отметим, что в случае $\gamma = 0$ решение (1), (3) находится точно. Результаты, полученные для однородной конфигурации в ньютоновском приближении, совпадают с результатами, полученными классическими методами.

В третьей главе было решено уравнение гидростатического равновесия, описывающее гравитирующую, стационарно вращающуюся, намагниченную, неоднородную конфигурацию в ньютоновском приближении. Это уравнение удобно записать в виде

$$\Phi + \Theta(\rho) - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \Pi_m = 0, \quad \Theta(\rho) = \int_0^P \frac{dP}{\rho(P)}, \quad \Phi = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (10)$$

Здесь ρ - распределение плотности искомой конфигурации, которое мы будем аппроксимировать полиномом от декартовых координат x_k : $\rho = \sum_{a,b,c}^P \rho_{abc} x_1^a x_2^b x_3^c$;

$$\nabla \Pi_m = \mathbf{\Pi}_m.$$

В работе³ для решения (10) и определения границы конфигурации используется метод представления всех членов уравнения гидростатического равновесия, описывающих конфигурацию, полиномами координат степени P и последующим приравниванием коэффициентов при соответствующих степенях, который мы будем называть методом степенных рядов (СР - метод). В этой главе для решения (10) наряду с методом СР будет применяться метод аппроксимации всех членов уравнения гидростатического равновесия полиномом наилучшего приближения координат x_k степени P в L_2 (пространстве квадратично интегрируемых функций) (ПНП - метод), точность решения которого, как минимум, на порядок выше, чем точность СР - метода.

Для вычислений мы использовали численные данные для уравнений состояния ядерной материи Бете-Джонсона (ВЖ), Оппенгеймера-Волкова (ОВ), Рейда (R), а так же уравнения состояния в виде политроп со значениями их показателя

³Беспалько Е.В., Михеев С.А., Пузынин И.В., Цветков В.П. Гравитирующая быстровращающаяся сверхплотная конфигурация с реалистическими уравнениями состояния. Мат. Моделирование 2006, т 118, №3, с. 103-119.

n . Как будет показано, параметры конфигурации зависят от выбора уравнения состояния, что является критерием для их отбора. В частности, при значении $\varepsilon = \varepsilon_k$ происходит резкое увеличение интенсивности гравитационного излучения (ГИ) конфигурации, при регистрации частоты которого определяется ε_k и появляются аргументы в пользу выбора конкретного уравнения состояния.

Функцию $\Theta(\rho)$ представим в виде многочлена от $\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)$:

$$\Theta = \left(\frac{P_0}{\rho_0}\right) \left(\delta_0 + \delta_1 \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) + \delta_2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)^2 + \dots\right) \quad (11)$$

и, соответственно, ее легко можно будет записать в виде полинома от координат x_k .

Коэффициенты $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ выбираются из условия наилучшего приближения числовых данных или степенной функции (для политроп) для рассматриваемых уравнений состояния и (11) в метрике L_2 . Для уравнений состояния (BJ), (R), (OV), эти коэффициенты приводятся в таблице 4, а для политроп они могут быть вычислены по формулам (12):

Таблица 4: Коэффициенты многочлена, аппроксимирующего функцию, определяющую влияние давления на конфигурацию с уравнениями состояния Оппенгеймер-Волкова, Бете-Джонсона и Рейда

	(OV)	(BJ)	(R)
δ_0	2.25	1.64	2.02
δ_1	1.44	2.72	1.98
δ_2	-0.80	1.08	-0.04

$$\delta_0 = \frac{4n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(3n+1)}, \quad \delta_1 = -\frac{4n(n+1)(4n-7)}{(2n+1)(3n+1)},$$

$$\delta_2 = -\frac{20n(n^2-1)}{(2n+1)(3n+1)}, \quad \Lambda_0 = \frac{(n-1)(2n-1)}{(2n+1)(3n+1)} \sqrt{\frac{n}{n+2}} \quad (12)$$

Здесь Λ_0 погрешность аппроксимации в L_2 на отрезке $[0, 1]$ функции $\Theta(\rho)$ многочленом второй степени по плотности ρ .

Точную границу $\rho(x, y, z) = 0$ мы аппроксимировали возмущенной эллипсоидальной поверхностью δD . Условие близости точной поверхности и δD можно сформулировать введением функционала $\Lambda = \frac{1}{4\pi\rho_0^2} \int_{\delta D} \rho^2 d\Omega$. Условие минимума Λ приводит к уравнениям аналогичным (3), и далее мы их также будем обозначать (3).

Таким образом, систему уравнений (10), (3) запишем в виде

$$H(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \Psi_{ijk} = 0, \quad \Psi_{i_1} = 0; \quad i_1 = 1, 2, \quad (13)$$

$$H(x_1, x_2, x_3) = \sum_{a,b,c}^{P_m} H_{abc} x_1^a x_2^b x_3^c, \quad P_m = \max\{P + s(L - 2) + 2, 2P\}, \quad a + b + c > 0$$

Далее мы аппроксимировали функцию $H(x_1, x_2, x_3)$ полиномом $F(x_1, x_2, x_3)$ наилучшего приближения в L_2 степени P . Мы получили систему уравнений для определения коэффициентов $F_{a_1 b_1 c_1}$ полинома $F(x_1, x_2, x_3)$. Но из (13) следует, что $F_{a_1 b_1 c_1} \equiv 0$. В результате уравнение $H(x_1, x_2, x_3) = 0$ сводится к системе моментных уравнений, т. е. (13) будет иметь вид

$$\int_D x_1^{a_2} x_2^{b_2} x_3^{c_2} H(x_1, x_2, x_3) dV = 0, \quad \Psi_{ijk} = 0, \quad \Psi_{i_1} = 0; \quad i_1 = 1, 2, \quad (14)$$

$$H(x_1, x_2, x_3) = \sum_{a,b,c}^{P_m} H_{abc} x_1^a x_2^b x_3^c, \quad P_m = \max\{P + s(L - 2) + 2, 2P\}, \quad a + b + c > 0$$

Левые части уравнений (14) вычисляются аналитически с использованием комплекса программ, составленного в пакете MAPLE.

Представив ρ_{abc} , Z_{ijk} в виде разложения по степеням малого параметра асимметрии X до квадратичного включительно: $\rho_{abc} = \frac{(\frac{a+b}{2})!}{(\frac{a}{2})!(\frac{b}{2})!} \rho_{a+b,c} + \rho_{1(ab)c} X^2 + \rho_{[ab]c} X$, $Z_{ijk} = \frac{(\frac{i+j}{2})!}{(\frac{i}{2})!(\frac{j}{2})!} Z_{i+j,k} + Z_{1(ij)k} X^2 + Z_{[ij]k} X$ ($\rho_{1(ab)c} = \rho_{1(ba)c}$, $\rho_{[ab]c} = -\rho_{[ba]c}$, $Z_{1(ij)k} = Z_{1(ji)k}$, $Z_{[ij]k} = -Z_{[ji]k}$, $\rho_{[20]0=1}$), мы применим для решения (14) метод разложения по малому параметру X .

Для решения (14) в нулевом по X приближении был применен регуляризованный аналог метода ньютона (8), и были найдены коэффициенты, соответствующие фигуре вращения. Графики численных расчетов ε , K_0 представлены на рисунке 3.

Далее (14) была решена в линейном по X приближении, достаточно хорошо описывающим состояние конфигурации вдали от точки бифуркации. Найденные значения e_k и ε_k для конфигураций с уравнениями состояния (ВJ), (R) и некоторых политропных конфигураций представлены в таблице 5. Мы показали, что для уравнения состояния (OV) ветвления решений относительно оси вращения для распределения плотности конфигурации нет.

Таблица 5: Значения параметров e и ε в точках бифуркации для рассматриваемых уравнений состояния.

	(ВJ)	(R)	(OV)	$n = 1$	$n = 1.052$	$n = 1.111$
e_k	$4.29 \cdot 10^{-1}$	$6.24 \cdot 10^{-1}$	—	$5.75 \cdot 10^{-1}$	$7.07 \cdot 10^{-1}$	$8.77 \cdot 10^{-1}$
ε_k	$7.67 \cdot 10^{-2}$	$4.02 \cdot 10^{-2}$	—	$4.39 \cdot 10^{-2}$	$3.30 \cdot 10^{-2}$	$1.50 \cdot 10^{-2}$

В случае уравнений состояния заданных в виде политроп при решении системы (14) нами было найдено $n_k = 1.148$ такое, что при $n < n_k$ конфигурации

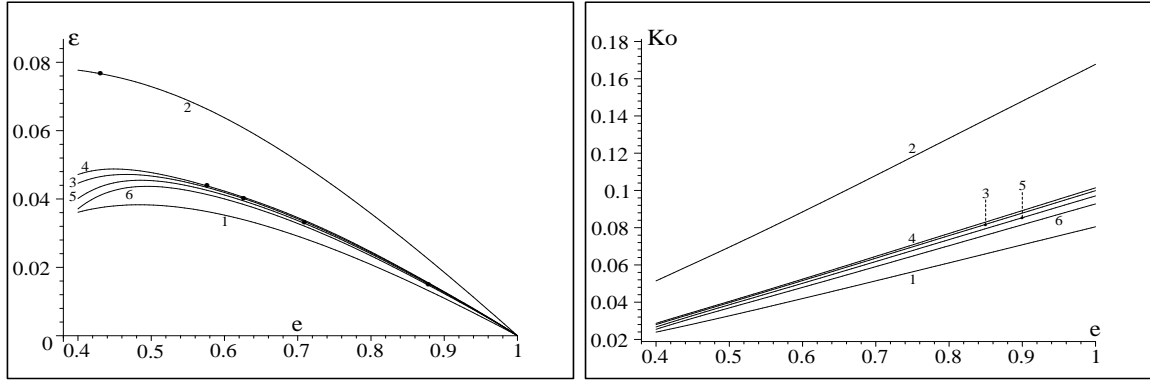


Рис. 3: На первом слева рисунке приводится зависимость функции ε от параметра e , на втором слева рисунке приводится зависимость функции K_0 от параметра e ; кривые 1 соответствуют уравнению состояния OV, 2 - ВJ, 3 - R, 4 - политропе с показателем $n = 1$, 5 - с $n = 1.052$, 6 - с $n = 1.111$. Жирными точками на кривых изображены значения $\varepsilon = \varepsilon(e_k)$, найденные в точках бифуркации для соответствующих уравнений состояния.

будут иметь точки бифуркации, а при $n > n_k$ критических точек конфигураций нет. На рисунке 4 приводится график зависимости ε_k от показателя политропы n .

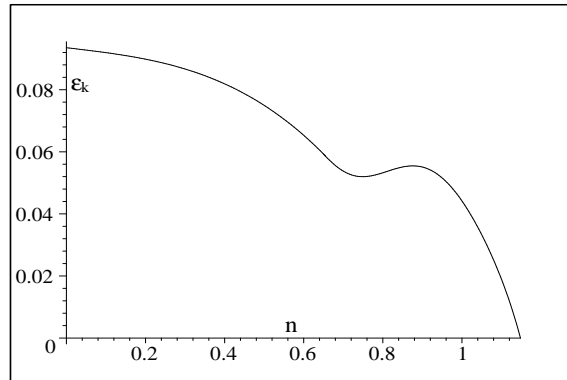


Рис. 4: Зависимость функции ε_k от параметра n .

Для политроп впервые найдена зависимость критического значения параметра ε_k в точке бифуркации от показателя политропы n , которая показывает $\varepsilon_k(n_k) = 0$. Из этого следует, что для случая $|n - n_k| \ll 1$ даже медленные пульсары могут находиться вблизи точек бифуркации их конфигураций. Зависимость $\varepsilon_k(n)$ ведет себя не монотонно: для $n \in [0, 0.749]$ значение ε_k будет достаточно медленно уменьшаться, при $n \in [0.749, 0.876]$ будет увеличиваться, а при $n \in [0.876, n_k]$ значение ε_k достаточно быстро уменьшится до нуля ($\varepsilon_k(n = 0.749) = 5.20 \cdot 10^{-2}$, $\varepsilon_k(n = 0.876) = 5.55 \cdot 10^{-2}$).

Вблизи e_k необходимо учитывать в (14) члены порядка X^3 . Проведенные нами

расчеты свели задачу о существовании точек бифуркации в (14) к вопросу о вещественных решениях кубического уравнения для физической области значений параметров конфигурации (9). Значения коэффициентов α и β для некоторых рассмотренных уравнений состояния ядерной материи конфигурации приведены в таблице 6.

Таблица 6: Значения коэффициентов α и β для рассматриваемых уравнений состояния.

	(BJ)	(R)	(OV)	$n = 1$	$n = 1.052$	$n = 1.111$
α	$4.31 \cdot 10^{-1}$	$1.43 \cdot 10^{-1}$	—	$1.33 \cdot 10^{-1}$	$1.58 \cdot 10^{-1}$	$1.79 \cdot 10^{-1}$
β	$5.01 \cdot 10^{-2}$	$1.01 \cdot 10^{-1}$	—	$1.06 \cdot 10^{-3}$	$3.63 \cdot 10^{-1}$	1.24

Погрешность Δ метода решения уравнения гидростатического равновесия (10) для гравитирующей, быстровращающейся, сверхплотной, неоднородной конфигурации в ньютоновском приближении, вычисленная в метрике пространства L_2 , для некоторых рассмотренных уравнений состояния приводится в таблице 7.

Таблица 7: Погрешность метода решения уравнения гидростатического равновесия для рассматриваемых уравнений состояния.

e	$\Delta(BJ)$	$\Delta(OV)$	$\Delta(n = 1)$	$\Delta(n = 1.052)$	$\Delta(n = 1.111)$
1	$5.06 \cdot 10^{-3}$	$2.37 \cdot 10^{-3}$	$4.77 \cdot 10^{-5}$	$1.77 \cdot 10^{-4}$	$3.68 \cdot 10^{-4}$
0.8	$3.60 \cdot 10^{-3}$	$2.12 \cdot 10^{-3}$	$6.12 \cdot 10^{-5}$	$1.92 \cdot 10^{-4}$	$3.75 \cdot 10^{-4}$
0.7	$2.90 \cdot 10^{-3}$	$2.03 \cdot 10^{-3}$	$7.89 \cdot 10^{-5}$	$2.16 \cdot 10^{-4}$	$4.01 \cdot 10^{-4}$
e_k	$1.55 \cdot 10^{-3}$	—	$1.28 \cdot 10^{-4}$	$2.14 \cdot 10^{-4}$	$3.67 \cdot 10^{-4}$

Основные научные результаты:

1. Разработан и реализован комплекс программ в системе символьной математики MAPLE для аналитического представления постньютоновских гравитационных потенциалов в случае неоднородной и в частности однородной возмущенной эллипсоидальной конфигурации на внутреннюю точку в виде полинома координат для заданных значений степеней полиномов, аппроксимирующих распределение давления, плотности и функцию, представляющую возмущение эллипсоидальной поверхности конфигурации.

2. Разработан и реализован комплекс программ в системе MAPLE для решения уравнения гидростатического равновесия, описывающего гравитирующую быстровращающуюся сверхплотную намагниченную однородную конфигурацию, свободная поверхность которой близка к эллипсоиду, с учетом релятивистских поправок в первом постньютоновском приближении, методом разложения по степеням малого параметра, характеризующего асимметрию распределения давления относительно оси вращения конфигурации, в линейном по этому параметру

приближении вдали от точки бифуркации и с точностью до кубичных членов параметра асимметрии вблизи критической точки.

3. Доказано существование точек бифуркации по параметрам e или ε решений уравнения гидростатического равновесия, описывающего гравитирующую быстровращающуюся сверхплотную намагниченную однородную конфигурацию с учетом релятивистских поправок в первом постньютоновском приближении при различных значениях постньютоновского параметра γ , в которых происходит ответвление асимметричных решений относительно оси вращения для распределения давления конфигурации и резкое увеличение значения параметра асимметрии по сравнению с его значением вдали от точки бифуркации.

4. Разработан и реализован комплекс программ в системе MAPLE для решения уравнения гидростатического равновесия, описывающего гравитирующую быстровращающуюся сверхплотную намагниченную неоднородную конфигурацию в ньютоновском приближении, свободная поверхность которой близка к эллипсоиду, методом разложения по степеням малого параметра, характеризующего асимметрию распределения плотности относительно оси вращения конфигурации, в линейном по этому параметру приближении вдали от точки бифуркации и с точностью до кубичных членов параметра асимметрии вблизи критической точки.

5. Доказано существование точек бифуркации по параметрам e или ε решений уравнения гидростатического равновесия, описывающего гравитирующую быстровращающуюся сверхплотную намагниченную неоднородную конфигурацию в ньютоновском приближении для реалистических уравнений состояния Бете-Джонсона и Рейда, в которых происходит ответвление асимметричных решений относительно оси вращения для распределения плотности конфигурации и резкое увеличение значения параметра асимметрии по сравнению с его значением вдали от точки бифуркации.

6. Доказано существование и проведена оценка для политропных конфигураций в ньютоновском приближении критического значения такого, что при значениях показателя политропы меньше критического политропные конфигурации будут иметь точки бифуркации, а при значениях больше критического нет.

Приведенные результаты исследования гравитирующей быстровращающейся сверхплотной конфигурации указывают на достижение всех поставленных в диссертационной работе целей.

Основные результаты диссертации опубликованы в научных изданиях рекомендованных ВАК:

1. Беспалько Е.В., Михеев С.А., Цветков В.П., Цирулев А.Н., Пузынин И.В. Вычисление ньютоновского потенциала гравитирующей конфигурации с поверх-

ностью, близкой к сфероиду, с помощью символьных и численных методов// Препринт Р11-2005-121, 2005; Вестник РУДН, сер. Прикладная и компьютерная математика, 2005, т.4, №2, с. 208-219.

2. Беспалько Е.В., Михеев С.А., Пузынин И.В., Цветков В.П. Гравитирующая быстро вращающаяся сверхплотная конфигурация с реалистическими уравнениями состояния. Мат. Моделирование 2006, т 118, №3, с. 103-119.

В других изданиях:

3. E.Bespalko, S.Miheev, V.Tsvetkov, I.Tsvetkov. Mathematical model of the rapidly rotating gravitating of superdense neutron configurations// QFTHEP'2004 XVIIIth International Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory, Moscow, 2005, с. 318-321.

4. Беспалько Е.В., Михеев С.А., Пузынин И.В., Цветков В.П. Математическая модель гравитирующей быстро вращающейся сверхплотной конфигурации с реалистическими уравнениями состояния// Препринт Р11-2005-35, ОИЯИ. Дубна, 2005.

5. Беспалько Е.В., Михеев С.А., Цветков В.П., Пузынин И.В. Динамическое нарушение аксиальной симметрии плотности быстро вращающейся, гравитирующей конфигурации и фазовый переход второго рода. Материалы I Международного междисциплинарного научного семинара памяти чл.-корр. РАН Сергея Павловича Курдюмова "Идеи синергетики в естественных науках". Тверь, 2005, с. 28-30.

6. Беспалько Е.В., Михеев С.А., Цветков В.П., Пузынин И.В. Математическое моделирование гравитирующей, быстро вращающейся сверхплотной конфигурации с помощью символьных вычислений и численных методов. Материалы I Международного междисциплинарного научного семинара памяти чл.-корр. РАН Сергея Павловича Курдюмова "Идеи синергетики в естественных науках". Тверь, 2005, с. 31-33.

7. Беспалько Е.В., Михеев С.А., Пузынин И.В., Цветков В.П. Ньютоновские гравитирующие быстро вращающиеся сверхплотные намагниченные конфигурации с реалистическими уравнениями состояния вблизи точек бифуркации.// XLII Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии. Тезисы докладов., Москва, Издательство РУДН, 2006, с. 59.

8. Беспалько Е.В., Михеев С.А., Цветков В.П. Точки бифуркации нелинейных уравнений, описывающих сверхплотные гравитирующие конфигурации в релятивистской области значений их параметров.// Материалы II Международного междисциплинарного научного семинара памяти чл.-корр. РАН Сергея Павловича Курдюмова "Идеи синергетики в естественных науках". Тверь, 2006, с. 64-66.