

МОДЕЛИ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 539.3

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МНОГОПОЛЕВЫХ МОДЕЛЕЙ СРЕДЫ КОССЕРА

Васильев А.А.* , Мирошниченко А.Е.**

*Кафедра математического моделирования, ТвГУ

**Центр нелинейной физики, исследовательская школа физических и инженерных наук, Австралийский национальный университет, Канберра

Сформулирован реализуемый в системах символьных преобразований алгоритм компьютерного построения усложняющейся системы многополевых моделей среды Коссера с квадратной решеткой расположения элементов. Показано, что формируемая система моделей описывает динамические свойства моделируемой среды с нарастающей точностью.

We propose the algorithm for symbolic construction of multi-field models for Cosserat media on square lattices. It is shown that the derived models describe the dynamical properties of the medium with increasing accuracy.

Ключевые слова: среда Коссера, многополевая модель, гармонические коротковолновые решения.

Keywords: Cosserat media, multi-field model, harmonic short-wave solution.

Введение. Модели континуальной механики эффективно используются для моделирования твердых деформируемых тел, составленных из большого количества взаимодействующих структурных элементов. Однако при построении континуальных осредненных моделей теряется информация структурного уровня. Для того чтобы моделировать структурные системы с учетом эффектов структуры, не отказываясь от преимуществ континуальных моделей, разрабатываются обобщенные континуальные модели.

Необходимо отметить, что обобщенные модели, включая как частный случай классические модели, математически более громоздки по формулировке и при решении на их основе задач. Представленная в статье формулировка реализуемого в пакетах символьных преобразований алгоритма имеет цель обеспечить возможности использования компьютеров, как для аналитического построения обобщенных моделей, так и для численно-аналитического решения задач на их основе, и таким образом решить проблемы, вызванные усложнением и громоздкостью обобщенных моделей, обеспечить возможности широкого использования таких моделей.

Настоящая статья является продолжением, обобщением, завершением статьи [1] авторов.

1. Алгоритм построения многополевых моделей. Выбирается макроячейка моделируемой системы. Отметим, что при построении классической модели в качестве ячейки выбирается ячейка периодичности минимального размера.

В многополевом подходе базовая ячейка периодичности включает несколько элементарных ячеек.

В классическом подходе делается попытка описать деформационные характеристики всех элементов с использованием одной вектор-функции, размерность которой равна количеству степеней свободы элементарной ячейки [2, 3]. Это эффективное при решении большого класса задач предположение, которое, однако, как показывает сравнительный анализ, часто не дает основы для адекватного описания, например, коротковолновых эффектов. Особенностью многополевого подхода является то, что хотя все элементы идентичны, решетка элементов разбивается на N взаимопроникающих подрешеток, которые маркируются различными цифрами $n = 1, \dots, N$, и используется N вектор-функций для описания деформаций подрешеток [1, 6, 7].

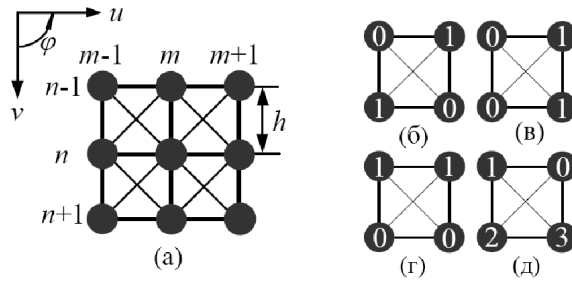


Рис. 1: (а-д). Моделируемая структурная система (а). Варианты маркировок элементов для построения двухполевых (б, в, г) и четырехполевой (д) моделей

Далее информация о макроячейке формализуется для компьютерной визуализации системы и возможности ее компьютерного использования при построении дискретной модели. Для формализации используется хорошо разработанная и алгоритмичная методика метода конечных элементов [5].

Строятся дискретные уравнения динамики элементов макроячейки с различной маркировкой $n = 1, \dots, N$.

Рассматриваем тела Коссера, для описания деформаций которых необходимо задание не только смещений u_i, v_i , но и вращений φ_i составляющих его структурных элементов (рис. 1а). Примерами таких структур являются балочные конструкции, гранулированные среды, интересные в технических приложениях материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона, обладающие свойством расширяться при растяжении, материалы хиральной внутренней структуры.

Для малых деформаций потенциальная энергия связи элементов m и k принимается в виде [4]

$$2E_{pot}^{k,m} = K_n^{k,m}(u_m - u_k)^2 + K_s^{k,m}[v_m - v_k - r_{k,m}(\varphi_m + \varphi_k)/2]^2 + G_r^{k,m}(\varphi_m - \varphi_k)^2,$$

где u_i, v_i - компоненты вектора смещений, а φ_i - углы поворотов структурных элементов, $r_{k,m}$ характеризуют длины связей, $K_n^{k,m}, K_s^{k,m}, G_r^{k,m}$ - жесткости связей в продольном и поперечном направлениях и сопротивление вращению. Потенциал

взаимодействия элементов представленного вида используется при моделировании гранулированных сред. Частным случаем такого потенциала является потенциальная энергия балочного элемента в методе конечных элементов [5]. Другой вариант потенциала, приводящего к микрополярным моделям, для сред с частицами конечного размера представлен в [7].

Кинетическая энергия частиц определяется соотношением

$$2E_{kin}^n = M\dot{u}_n^2 + M\dot{v}_n^2 + I\dot{\varphi}_n^2,$$

где M - масса и I - момент инерции ячейки.

Чтобы получить уравнения движения n -й частицы, в пакете аналитически строится функция Лангранжа

$$L_n = \sum_m \left[E_{kin}^n - E_{pot}^{(n,m)} \right],$$

где суммирование принято по всем частицам, которые входят в контакт с частицей n .

С использованием операций символьного дифференцирования и уравнений Лагранжа строятся уравнения динамики для нахождения перемещений $u_{k,m}^{[n]}(t)$, $v_{k,m}^{[n]}(t)$ и вращений $\varphi_{k,m}^{[n]}(t)$ n -го элемента.

Уравнение модели континуального приближения строится заменой

$$w_{k\pm i, m\pm j}(t) \rightarrow w(x \pm ih, y \pm jh, t)$$

в дискретных уравнениях движения и далее заменой компонент вектор функций на их разложения в ряд Тейлора с учетом производных не выше второго порядка относительно точки, для которой выписано уравнение. То есть в дискретных уравнениях движения производится замена

$$w_{k\pm i, m\pm j}(t) \rightarrow \sum_{r=0}^{N_x} \sum_{p=0}^{N_y} \frac{(\pm ih)^r}{r!} \frac{(\pm jh)^p}{p!} \frac{\partial^{r+p} w(x, y, t)}{\partial x^r \partial y^p},$$

где $N_x + N_y \leq 2$.

Таким образом, в результате получаются $3N$ уравнений динамики N -полевой модели для вектор-функций обобщенных перемещений с компонентами $u_n(x, y, t)$, $v_n(x, y, t)$, $\varphi_n(x, y, t)$, $n = 1, \dots, N$.

2. Двухполевые модели. Реализация описанной методики при построении двухполевых моделей, соответствующих маркировкам частиц рис. 1б и рис.1в, представлена в [1].

Модели содержат шесть уравнений, которые в линейном случае расщепляются на две группы. Первая группа уравнений совпадает с уравнениями классической микрополярной теории упругости [3]. То есть обе двухполевые модели содержат классическую микрополярную модель как составную часть и обладают ее свойствами при моделировании длинноволновых полей. Однако уточняют классическую модель эти модели различным образом. Их физический смысл и характер уточнения раскрывается на основе дополнительного анализа.

Анализ уравнений проводится на основе сравнения решений дискретных уравнений динамики

$$u_{k,m}^{[n]}(t) = \tilde{u}_n \exp[i(\omega t - khk_x - m h k_y)],$$

$$v_{k,m}^{[n]}(t) = \tilde{v}_n \exp[i(\omega t - khk_x - m h k_y)],$$

$$\varphi_{k,m}^{[n]}(t) = \tilde{\varphi}_n \exp[i(\omega t - khk_x - m h k_y)]$$

и их континуальных аналогов для полевых моделей

$$u_n(x, y, t) = \tilde{u}_n \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y)],$$

$$v_n(x, y, t) = \tilde{v}_n \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y)],$$

$$\varphi_n(x, y, t) = \tilde{\varphi}_n \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y)].$$

Три дисперсионные поверхности волн сжатия, сдвига и микро-вращений дискретной системы рассматриваются в области волновых чисел $0 \leq k_x \leq \pi/h$, $0 \leq k_y \leq \pi/h$. Классическая микрополярная модель дает дисперсионные поверхности квадратично аппроксимирующие дисперсионные поверхности дискретной системы около точки $k_x = 0$, $k_y = 0$, то есть в области длинных волн. При моделировании коротких волн однополевая модель дает существенную погрешность [4].

Шесть поверхностей двухполевой модели в случае рис. 1б определены в области $k_x + k_y \leq \pi/h$, $k_x \geq 0$, $k_y \geq 0$. Три из них являются дисперсионными поверхностями классической однополевой микрополярной модели и, соответственно, дают хорошее приближение на этой области для длинных волн. Три другие поверхности после отражения относительно линии $k_x = \pi/2h$, $k_y = \pi/2h$ дают на области $k_x + k_y \geq \pi/h$, $k_x \leq \pi/h$, $k_y \leq \pi/h$ квадратичную аппроксимацию дисперсионных поверхностей дискретной системы для коротких волн с волновыми векторами около точки $k_x = \pi/2h$, $k_y = \pi/2h$.

Шесть поверхностей двухполевой модели в случае рис. 1в определены в области $0 \leq k_x \leq \pi/2h$, $0 \leq k_y \leq \pi/h$. Три из них являются дисперсионными поверхностями классической однополевой микрополярной модели. Три другие поверхности после отражения относительно плоскости $k_x = \pi/2h$ дают квадратичную аппроксимацию дисперсионных поверхностей дискретной системы на области $\pi/2h \leq k_x \leq \pi/h$, $0 \leq k_y \leq \pi/h$ для коротких волн с волновыми векторами около точки $k_x = \pi/2h$, $k_y = 0$.

Двухполевая модель, соответствующая маркировке рис. 1г аналогична описанной выше модели рис. 1в. Она также содержит однополевую микрополярную модель и дополнительную модель, уточняющую ее в области коротких волн с волновыми векторами около точки $k_x = 0$, $k_y = \pi/2h$.

3. Четырехполевая модель. Четырехполевая модель строится реализацией сформулированного алгоритма при разбиении моделируемой системы на четыре подрешетки с обозначением частиц, представленным на рис. 1д. Модель включает 12 уравнений. Введением замен

$$U_1 = \frac{1}{4} [u_1 + u_2 + u_3 + u_4], \quad U_2 = \frac{1}{4} [-u_1 + u_2 - u_3 + u_4],$$

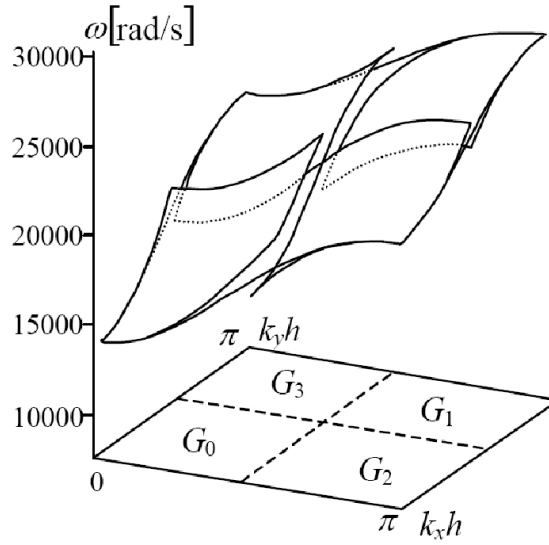


Рис. 2: Дисперсионная поверхность микро-вращательных волн моделируемой дискретной системы (контур над границей) и аппроксимирующие поверхности, построенные на основе четырехполюсовой модели

$$U_3 = \frac{1}{4} [-u_1 + u_2 + u_3 - u_4], \quad U_4 = \frac{1}{4} [-u_1 - u_2 + u_3 + u_4]$$

и аналогичных замен v_k, φ_k на V_k, Φ_k система расщепляется на четыре группы из трех уравнений. Сравнение показывает, что одна группа уравнений – уравнения микрополярной модели [3], а три другие группы – это дополняющие их уравнения представленных выше трех вариантов двухполюсовых моделей.

Соответственно 12 дисперсионных поверхностей четырехполюсовой модели, определенных на области $0 \leq k_x \leq \pi/2h, 0 \leq k_y \leq \pi/2h$, включают четыре группы поверхностей. Первую группу составляют дисперсионные поверхности классической микрополярной модели, аппроксимирующие поверхности дискретной модели на этой длинноволновой области G_0 (рис. 2). Три другие группы – дополнительные к ним поверхности двухполюсовых моделей, соответствующих маркировкам, представленным на рис. 1б, в, г, которые после отображения соответственно относительно прямой $k_x = \pi/2h, k_y = \pi/2h$ и плоскостей $k_x = \pi/2h, k_y = \pi/2h$ аппроксимируют дисперсионные поверхности дискретной системы на областях G_1, G_2, G_3 . С целью иллюстрации на рис. 2 представлена дисперсионная поверхность микро-вращательных волн (контур над границей) гранулированной среды [4] и аппроксимирующие поверхности, построенные на основе четырехполюсовой модели.

Заключение. В статье представлен алгоритм для компьютерного построения в пакетах символьных преобразований иерархической системы многополюсовых моделей сред Коссера. Алгоритм реализован в пакете Maple. Построены три вида двух-полюсовых моделей. Они содержат уравнения классической однополюсовой модели Коссера и дополнительные уравнения, уточняющие классическую модель Коссера различным образом при моделировании деформаций коротковолнового типа. Четырехполюсовая модель объединяет модель Коссера и три представленные двух-

полевые модели в одну и может применяться для моделирования как длинных, так и коротких волн различного типа.

Благодарности. Авторы выражают благодарность профессору Алексею Никифоровичу Кудинову за поддержку, внимание и полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Васильев А.А., Мирошниченко А.Е. Два варианта двухполевых моделей тел Коссера // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика, 2006. – № 4 – с. 98-106.
- [2] Cosserat E., Cosserat F. Theorie des Corps Deformables. – Paris: A. Hermann et Fils, 1909.
- [3] Eringen A.C. Theory of micropolar elasticity / Liebowitz H. (ed) Fracture, Vol. 2.– New York: Academic Press, 1968. – 621-729 p.
- [4] Suiker A.S.J., Metrikine A.V., de Borst R. Comparison of wave propagation characteristics of the Cosserat continuum model and corresponding discrete lattice models // International Journal of Solids and Structures, 2001. – Vol. 38 – P. 1563-1583.
- [5] Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М., Стройиздат, 1982, 448 с.
- [6] Vasiliev A.A., Miroshnichenko A.E. Multi-field modelling of Cosserat solids // Journal of the Mechanical Behavior of Materials, 2005. – Vol. 16, No. 6. – P. 379-392.
- [7] Vasiliev A.A., Dmitriev S.V., Miroshnichenko A.E. Multi-field continuum theory for medium with microscopic rotations // International Journal of Solids and Structures, 2005. – Vol. 42, No. 24-25. – P. 6245-6260.