УДК 510.67

ТРАНСЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА И АВТОМАТНЫЕ СТРУКТУРЫ[1]

Дудаков С.М.
Кафедра информатики

Предлагается пример запроса к базе данных, который является локально генерическим и может быть записан с использованием отношений автоматных систем, но не может быть записан ограниченной формулой. Тем самым опровергаются гипотезы о том, что в автоматных структурах соблюдается трансляционная теорема, две гипотезы из работы [11] о том, что не существует разрешимых обогащений теории дискретного линейного порядка без трансляционной теоремы, и что в каждом таком обогащении без трансляционной теоремы существует формула, способная выделить любое подмножество любого конечного множества (проблемы 3 и 4 в [11]). Это построение так же опровергает две более слабые гипотезы из [9], утверждающие то же самое для расширений арифметики Пресбургера (гипотезы 1 и 2 в [9]). Кроме того, далее мы строим теории, опровергающие одну из гипотез из [10].

We construct an instance of locally generic database queries which can be written as an extended first-order formula using automatic structure relations and which can't be expressed by any restricted formula. It refuses the hypothesis that automatic structures hold the collapse result and more general hypothesis from [11] that there is no decidable extensions of the theory of the discrete linear order without the collapse result (the problems 3 and 4 in [11]). It also refuses the weaker hypothesis from [9] that the same is true for any decidable extensions of Presburger arithmetic (the hypothesis 1 and 2 in [9]). More over we construct theories which refute one hypothesis from [10].

Ключевые слова: трансляционная теорема; автоматные структуры.
Keywords: the collapse result; automatic structures.

1. Введение. Задача, которую мы решаем в данной работе, проистекает из теории баз данных. Типичной моделью базы данных со времен Кодда является реляционная модель, в которой база данных мыслится как собрание конечного числа конечных таблиц (см. [14, 15]). Эта модель реализуется в большинстве существующих средств управлениями базами данных и в предлагаемых ими языках запросов.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 04-01-00015 и 04-01-00565.

Итак, база данных — конечная совокупность конечных таблиц. Таблицы можно считать конечными отношениями, названия которых образуют конечную сигнатуру Ω — *схему базы данных*, а элементы таблиц берутся из какого-либо фиксированного множества A. Хотя количество таблиц и количество элементов в каждой из них конечно, но эти количества могут быть сколь угодно большими, поэтому множество A следует считать бесконечным. Таким образом, базу данных можно считать алгебраической системой $\mathfrak{D}$ сигнатуры Ω, носитель которой — конечное подмножество A.

Для извлечения информации из базы данных, как правило, используются языки первого порядка, которые используются для построения *запросов*. Эта традиция тоже восходит к Кодду, который в качестве языка запросов предложил использовать язык реляционных выражений, практически эквивалентный языку логики предикатов первого порядка.

В простейшем случае запросы являются замкнутыми формулами первого порядка, а информация, которую можно извлечь с помощью таких запросов, — обладает база данных каким-то свойством или нет. Хорошо известно, что не всякое свойство алгебраических систем может быть записано такими формулами, более того, нельзя записать многие простейшие вещи. Например, если сигнатура базы данных содержит только один одноместный предикатный символ P, то невозможно записать в этой сигнатуре формулу первого порядка, выделяющую в точности те базы данных, в которых количество элементов отношения P является четным (см., например, [12]).

Один из путей, который помог бы преодолеть это ограничение, состоит в следующем. Обычно над множеством A, элементы которого используются для построения базы данных $\mathfrak{D}$, определены какие-либо стандартные отношения, образующие сигнатуру Σ. Например, если $A = \omega$, то над множеством натуральных чисел ω в качестве таких отношений можно использовать операции сложения и умножения. Таким образом, элементы, составляющие $\mathfrak{D}$, являются элементами некой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ, называемой *универсумом*. Возможно, что если в языке запросов использовать не только отношения сигнатуры базы данных Ω, но отношения универсума Σ (формулы в сигнатуре (Ω, Σ) называются *расширенными*), то тогда можно будет записать какие-то свойства, которые нельзя записать запросами в сигнатуре Ω (формулы в сигнатуре Ω называются *ограниченными*). Разумеется, речь должна идти не о связи отношений из Ω и Σ, а только о свойствах отношений из Ω. Более точно, мы хотим чтобы значение формулы не менялось при произвольных сохраняющих порядок изоморфизмах состояния базы данных $\mathfrak{D}$ внутри универсума $\mathfrak{A}$. Такие формулы называются *локально генерическими* или $<$-*инвариантными*.

Если, например, в качестве универсума взять элементарную арифметику: $\mathfrak{L} = (\omega, +, \times)$, то можно будет записать любое арифметическое свойство. Однако, поскольку запросы выполняются вычислительным устройством, то логично потребовать, чтобы существовал алгоритм, способный определить истинность любой такой формулы. Очевидно, для теории системы $\mathfrak{L}$ такого алгоритма нет.

Если в качестве универсума взять более ограниченную систему $\mathfrak{L}_0 = (\omega, 0, 1, <, +)$ — арифметику Пресбургера, то все значения формул окажутся вычислимыми. Но как доказано в [11], любая локально генерическая формула с использованием сложения эквивалентна формуле без него. Точнее, любая локально генерическая расширенная формула эквивалентна некоторой ограниченной. Подобное свойство теорий называется *трансляционным результатом* или *коллапсом к порядку*[1], а само утверждение — *трансляционной теоремой.* Таким образом, интерес представляет поиск теорий, которые с одной стороны были бы разрешимыми, а с другой стороны в них не имел бы место коллапс к порядку. Такие теории найдены, например, существует разрешимое упорядочение случайного графа (см.[4]). Порядок в этой теории является плотным.

Известно, что для многих разрешимых расширений дискретного линейного порядка трансляционная теорема верна. В частности, доказано, что она выполняется в самой арифметике Пресбургера (см. [11]), ее семеновских обогащениях (см. [2]), ее обогащениях слабо монотонными согласованными со сложением функциями (см. [9]). С другой стороны, все ранее известные примеры обогащений дискретного линейного порядка, использование которых увеличивает выразительную силу языка логики предикатов, являются неразрешимыми. Более того, в них интерпретируются теория наследственно конечных множеств и элементарная арифметика.

В связи с этим в [11] высказана гипотеза о том, что трансляционная теорема справедлива для всех разрешимых обогащений дискретного линейного порядка (проблема 3). Там же высказано более сильное предположение, что если в каком-нибудь таком обогащении имеет место увеличение выразительной силы языка первого порядка, то в нем существует некоторая формула $\phi(\bar{x}, \bar{y})$, которая способна выделить произвольное конечное множество (проблема 4). В [9] высказаны более слабые гипотезы, которые утверждают то же самое для расширений арифметики Пресбургера (гипотезы 1 и 2). В работе [10] сформулировано другое предположение: для коллапса к порядку необходимо и достаточно, чтобы существовало определимое множество, на котором нет независимой формулы.

Данная работа посвящена опровержению сформулированных выше предположений. Мы рассматриваем в качестве универсума некоторое автоматное расширение арифметики Пресбургера (см. [13]), и предлагаем пример локально генерической формулы, которая не эквивалентна никакой ограниченной формуле. Рассматриваемые нами автоматные системы являются разрешимыми обогащениями арифметики Пресбургера специальным предикатом $\sqsubseteq$ и, тем более, обогащениями линейного дискретного порядка. Формула ϕ, обладающая указанным выше свойством, в этой теории, естественно, отсутствует, так как расширения арифметики Пресбургера, ее содержащие, не могут быть разрешимыми.

С другой стороны, мы показываем, что если вместо предиката $\sqsubseteq$ рассматривать его достаточно редкое подмножество $\sqsubseteq^*$, то при обогащении арифметики Пресбургера таким отношением, в нем трансляционная теорема останется верной, более того, теория такой системы будет сводимой. Но в этой системе нет никакого бесконечного множества (тем более определимого), на котором не было бы независимой формулы. Это опровергает гипотезу из [10].

В параграфе 2 мы даем основные определения, которые используем в дальнейшем. В параграфе 3 мы определяем обогащение арифметики Пресбургера T_4 экспонентой и предикатом R и устанавливаем некоторые свойства этого обогащения, после чего, в параграфе 4 демонстрируем, что это расширение допускает эффективную элиминацию кванторов до получения экзистенциальной формулы определенного вида.

[1] *Англ.* the collapse result.

Далее, в параграфе 5 мы начинаем рассматривать системы, являющиеся конечными начальными фрагментами моделей T_4. Мы показываем, что при определенных условиях любая формула в этих системах эквивалентна некоторой булевой комбинации неравенств для количества элементов в них. Таким образом, мы показываем, что четность количества элементов R записать в этих системах нельзя. Наконец, в параграфе 6 мы демонстрируем, как записать четность количества элементов R, если в формулах использовать отношения некоторой автоматной системы $\mathfrak{L}_{\sqsubseteq}$, предложенной М.А.Тайцлиным, что и означает отсутствие коллапса к порядку в этой системе, которая является разрешимым обогащением арифметики Пресбургера.

В параграфе 7 мы рассматриваем обобщения системы $\mathfrak{L}_{\sqsubseteq}$, в которых множество атомов не совпадает со множеством степеней двойки. Мы демонстрируем, что в таких системах трансляционная теорема верна тогда и только тогда, когда множество атомов имеет сколь угодно большие «пробелы», то имеются сколь угодно длинные последовательности подряд идущих степеней двойки, которые не являются атомами.

2. Определения. Основные понятия теории моделей, которые упоминаются в данной работе, изложены в [6].

Арифметические теории. Далее всюду строчные готические буквы $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... (возможно, с индексами) будут обозначать целочисленные константы, а строчные греческие начала алфавита α, β, γ — рациональные. В дальнейшем мы не будем специально упоминать об этом.

Итак, пусть сигнатура арифметики Пресбургера $\Sigma^A = (0, 1, <, +)$. Мы рассматриваем модели теории $T_0 = \mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +)$, то есть теории натуральных чисел с порядком и сложением (см., например, [1]).

Заметим, что в теории T_0 определимы следующие символы. Все натуральные числа:

$$x = \mathfrak{a} \iff x = \underbrace{1 + \dots + 1}_{\mathfrak{a}\text{ раз}}.$$

Определимы предикаты делимости:

$$Q_{\mathfrak{a}}(x) \iff \exists y(\underbrace{y + y + \dots + y}_{\mathfrak{a}\text{ раз}} = x)$$

для всех $\mathfrak{a} \in \omega$, $\mathfrak{a} \geqslant 2$. Мы будем использовать также вычитание, когда оно имеет смысл для натуральных чисел.

Используя перечисленные выше возможности можно записать умножение на константу:

$$\mathfrak{a}x = z \iff z = \underbrace{x + x + \dots + x}_{\mathfrak{a}\text{ раз}}$$

и целочисленное деление на константу:

$$\left[\frac{x}{\mathfrak{a}}\right] = z \iff \mathfrak{a}z \leqslant x \wedge \mathfrak{a}(z+1) > x.$$

Таким образом, мы можем выразить целую часть от умножения на любое рациональное число. Добавление к сигнатуре определимых символов не увеличивает выразительных возможностей, поэтому в дальнейшем мы будем включать все эти символы в состав сигнатуры.

Автоматные системы. В [13] введено понятие *автоматной системы.* Так называются системы обладающие следующим свойством:

> «Для любой формулы $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ можно эффективно построить конечный автомат, который по входу в двоичной записи $(\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n)$ будет определять истинна формула ϕ на наборе $\bar{\mathsf{a}}$ или ложна.»

Так как теория конечных автоматов разрешима, то теория любой автоматной системы тоже разрешима.

Мы рассмотрим одну из автоматных систем, предложенную М.А.Тайцлиным, которая является обогащением арифметики Пресбургера. Расширим сигнатуру Σ^A до сигнатуры $\Sigma^A_{\sqsubseteq}$ добавлением двухместного предикатного символа $\sqsubseteq$: $\Sigma^A_{\sqsubseteq} = (0, 1, <, +, \sqsubseteq)$. Как известно, любое натуральное число можно однозначно разложить в сумму различных степеней двойки, в соответствии с его двоичной записью, например,

$$19 = 16 + 2 + 1, \quad 28 = 16 + 8 + 4.$$

Отношение $x \sqsubseteq y$ будет означать, что x — степень двойки, которая встречается в разложении y. Например,

$$16 \sqsubseteq 19, \quad 4 \sqsubseteq 28, \quad \text{но} \quad 4 \not\sqsubseteq 19.$$

Если x не является степенью двойки, то формула $x \sqsubseteq y$ ложна для любого y.

Система

$$\mathfrak{L}_{\sqsubseteq} = (\omega, 0, 1, <, +, \sqsubseteq)$$

является автоматной (см. [13]), поэтому ее теория разрешима.

Система $(\omega, 0, 1, <, +, \sqsubseteq)$ по сути дела эквивалента системе $(\omega, <, \sqsubseteq)$, так как константы $0, 1$ и операция сложения определимы через $<$ и $\sqsubseteq$. А система $(\omega, <, \sqsubseteq)$, в свою очередь, является идеалом Фреше атомной булевой алгебры, в которой множество атомов упорядочено по типу натуральных чисел. В роли атомов выступают степени двойки, поэтому для краткости будем называть степени двойки *атомами.* Тогда любое натуральное число является в смысле отношения $\sqsubseteq$ конечным множеством атомов, и наоборот: любое конечное множество атомов определяет некоторое натуральное число — их сумму.

Трансляционный результат. Пусть Σ — сигнатура некоторой теории T. Пусть сигнатура Σ содержит двухместный предикатный символ $<$, означающий в теории T линейное упорядочение. Пусть Ω — конечная предикатная сигнатура, не имеющая общих символов с Σ. Такие сигнатуры мы будем называть *сигнатурами баз данных. Запросом* называется формула первого порядка. Запрос (т.е. формулу первого порядка) в сигнатуре $\Sigma \cup \Omega$ мы называем *расширенным*[2], в сигнатуре $(\Omega, <)$ — *ограниченным*[3].

Если $\mathfrak{A}$ — модель T, $\mathfrak{B}$ — интерпретация символов из Ω над $|\mathfrak{A}|$ — носителем системы $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B}$ называется *состоянием* базы данных над $\mathfrak{A}$. Состояние $\mathfrak{B}$ называется *конечным,* если интерпретации всех символов из Ω конечны. Очевидно, что если состояние $\mathfrak{B}$ конечно, то и любое изоморфное ему состояние $\mathfrak{C}$ тоже будет конечным.

---

[2] Англ. extended

[3] Англ. restricted

Два состояния над $\mathfrak{A}$ называются *порядково изоморфными*, если между ними можно установить изоморфизм, который сохраняет порядок $<$ в системе $\mathfrak{A}$. Формула называется *локально генерической относительно конечных состояний* (или просто *локально генерическим*, или $<$*-инвариантной*), если из истинности (ложности) ее на конечном состоянии $\mathfrak{B}$, следует ее истинность (ложность) на любом порядково изоморфном ему состоянии $\mathfrak{C}$.

Если в системе $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ для любой сигнатуры базы данных Ω каждая локально генерическая расширенная формула для конечных состояний эквивалентна некоторой ограниченной формуле, то это свойство называется *коллапсом к порядку* или *трансляционной теоремой* для системы $\mathfrak{A}$. Очевидно, что это свойство теорий, а не алгебраических систем, поскольку для каждого конкретного конечного состояния базы данных это можно описать формулой сигнатуры Σ, а сам коллапс к порядку записывается в виде множества замкнутых формул сигнатуры Σ.

3. Сложное обогащение арифметики Пресбургера. Чтобы доказать отсутствие коллапса к порядку в теории системы $(\omega, 0, 1, \leqslant, +, \sqsubseteq)$, мы должны найти некоторую сигнатуру базы данных Ω и некоторую расширенную $<$-инвариантную формулу в сигнатуре $(\Omega, \Sigma^A_{\sqsubseteq})$, которая не будет эквивалентна никакой $<$-ограниченной формуле сигнатуры $(\Omega, \leqslant)$. Формула, которую мы собираемся предложить, будет выделять состояния баз данных, изоморфные начальному фрагменту некоторого обогащения арифметики Семенова (см.[7, 8]), которое мы и собираемся описать в этом и следующих параграфах.

Пусть $\mathfrak{L} = (\omega, 0, 1, \leqslant, +)$ — обычная арифметика Пресбургера сигнатуры $\Sigma^A = (0, 1, \leqslant, +)$. Добавим в сигнатуру Σ^A новые одноместный функциональный и одноместный предикатный символы. Полученную сигнатуру будем обозначать

$$\Sigma^A_R = (0, 1, <, +, 4^x, R).$$

Обогатим систему $\mathfrak{L}$ до системы $\mathfrak{L}_R$ сигнатуры Σ^A_R. Значением функционального символа будет степень по основанию 4: 4^x, а значением предиката R — множество значений гиперэкспоненты по основанию 4.

Точнее, определим функцию $H_4(x)$ следующим образом:

$$H_4(0) = 0,\ \ H_4(x+1) = 4^{H_4(x)}.$$

Эта функция — *гиперэкспонента* по основанию 4, а множество ее значений и будет нашим предикатом R:

$$R = \{H_4(x) : x \in \omega\}.$$

Мы продемонстрируем, что в теории $T_R = \mathrm{Th}(\mathfrak{L}_R)$ системы

$$\mathfrak{L}_R = (\omega, 0, 1, <, +, 4^x, R)$$

каждая формула эквивалентна экзистенциальной (если включать в состав сигнатуры предикаты делимости и умножение на рациональные константы).

Сначала установим одно полезное свойство гиперэкспоненты.

Теорема 1. *Для каждого натурального $\mathfrak{p} > 1$ значение $H_4(x)$ является константой по модулю $\mathfrak{p}$, начиная с некоторого x.*

Доказательство. Будем доказывать утверждение индукцией по $\mathfrak{p}$.

Если $\mathfrak{p}$ — степень двойки, то утверждение очевидно.

Если $\mathfrak{p}$ — четное, но не степень двойки, то оно однозначно разлагается на множители $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}\mathfrak{r}$, где $\mathfrak{q}$ — степень двойки, а $\mathfrak{r}$ — нечетное число, причем оба множителя меньше $\mathfrak{p}$. По индукционному предположению, $H_4(x)$ есть константа по модулям $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{r}$, начиная с некоторых x_1 и x_2 соответственно. Но остаток от деления на $\mathfrak{p}$ однозначно определяется остатками от деления на $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{r}$, значит $H_4(x) \bmod \mathfrak{p}$ — тоже константа, начиная с $\max\{x_1, x_2\}$.

Пусть теперь $\mathfrak{p}$ — нечетное. Экспонента 4^x — функция периодическая по модулю $\mathfrak{p}$, причем период ее не превосходит $\mathfrak{p} - 1$. Пусть, например, период равен $\mathfrak{s}$. Тогда $4^x \bmod \mathfrak{p}$ однозначно определяется по $x \bmod \mathfrak{s}$. Но $\mathfrak{s} < \mathfrak{p}$, по индукционному предположению, $H_4(x) \bmod \mathfrak{s}$ — константа, начиная с некоторого x_0. Но тогда $H_4(x) \bmod \mathfrak{p}$ — тоже константа, начиная с $x_0 + 1$. ∎

Следствие 1. *Если $x \in R$, то формула вида $Q_\mathfrak{c}(x + \mathfrak{a})$, где $\mathfrak{a}$ — константа, эквивалентна некоторой булевой комбинации линейных неравенств для x.*

Другое необходимое нам свойство теории T_R:

Лемма 1. *В теории T_R каждая формула эквивалентна формуле, в которой предикатный символ R входит только в состав R-ограниченных кванторов.*

Доказательство. Нам достаточно продемонстрировать, что если формула ϕ удовлетворяет условию теоремы, то и формула $(\exists x \notin R)\phi$ тоже будет эквивалентна формуле указанного в теореме вида. По индукционному предположению мы можем считать, что сама формула ϕ имеет нужный вид. Но тогда получаем:

$$(\exists x \notin R)\phi \equiv (\exists y \in R)(\exists x)(y < x < 4^y \wedge \phi),$$

где y — новая переменная. ∎

4. Элиминация кванторов в теории T_R. Теперь докажем главную теорему о теории T_R.

Теорема 2. *В теории T_R любая формула эквивалентна экзистенциальной формуле, матрица которой является булевой комбинацией предикатов делимости для термов вида $v + \mathfrak{a}$ и сравнений сумм вида*

$$\mathfrak{c} + \sum_v (\mathfrak{a}_v 4^v + \mathfrak{b}_v v), \tag{1}$$

где $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ — константы, а v — переменные из формулы.

Доказательство. По лемме 1 можно считать, что R входит только в состав R-ограниченных кванторов. Наша задача — продемонстрировать, что формула

$$\neg(\exists x_1, \dots, x_n)(\exists y_1, \dots, y_m \in R)\phi \tag{2}$$

эквивалентна экзистенциальной, если ϕ — бескванторная формула, причем при этом преобразовании матрица формулы не теряет нужного нам вида. Будем делать это индукцией по количеству кванторов, стоящих после знака отрицания.

Изначально будем считать, что ϕ является конъюнкцией предикатов делимости и сравнений сумм вида (1).

Прежде всего (см. [8]) отметим, что делимость числа 4^u зависит от делимости u, то есть формула $Q_{\mathfrak{e}}(4^u + \mathfrak{f})$ эквивалентна булевой комбинации формул вида $Q_{\mathfrak{d}}(u + \mathfrak{k})$ для некоторых $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{k}$ и некоторых линейных неравенств для u.

Далее, формула $Q_{\mathfrak{d}}(u + \mathfrak{e})$ при $u \in R$ в силу теоремы 1 и ее следствия эквивалентна некоторой комбинации линейных неравенств для u.

Еще одно тривиальное замечание: если $y_1, y_2 \in R$ и для некоторой константы $\mathfrak{c}$ выполнено $y_2 < y_1 \leqslant \mathfrak{c} y_2$, то y_1 и y_2 не могут превосходить некоторой константы $\mathfrak{d}(\mathfrak{c})$, которая эффективно находится по $\mathfrak{c}$. Аналогично, если $4^x \leqslant \mathfrak{c}x$, то x может принимать конечно много различных значений.

Заметим также, что, заменив в сумме вида (1) какую-либо переменную v на терм $u + \mathfrak{d}$, где u — переменная, $\mathfrak{d}$ — натуральное число, мы получим формулу аналогичного вида, так как

$$\mathfrak{a}_v 4^{u+\mathfrak{d}} = 4^{\mathfrak{d}} \mathfrak{a}_v 4^u.$$

Для отрицательных $\mathfrak{d}$ можно все неравенство умножить на $4^{-\mathfrak{d}}$.

Если для какого-то x_i из формулы (31) слагаемое вида $\mathfrak{a}4^{x_i}$ не встречается в неравенствах из ϕ, то квантор для этого x_i удаляется точно так же, как в арифметике Пресбургера (см., например, [1]).

Теперь мы можем считать, что для каждого x_i хотя в одном из неравенств имеется слагаемое вида $\mathfrak{a}4^{x_i}$, в котором $\mathfrak{a} \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что переменные из (31) упорядочены следующим образом:

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n, \quad y_1 > y_2 > \cdots > y_m.$$

Таким образом, мы получаем, что среди этих переменных нет равных. Кроме того, нам будет удобно считать, что все y_i не равны нулю и единице. Всего этого можно добиться с помощью рассмотрения различных случаев и объединения их с помощью дизъюнкции. Такая операция не увеличит количества кванторов перед каждой из вновь полученных формул.

Приведем каждое неравенство из ϕ к виду

$$r_k \leqslant s_k \leqslant t_k, \tag{3}$$

где суммы s_k содержат только слагаемые с переменными x_i и y_j, а суммы r_k и t_k таких слагаемых не содержат. Нижняя граница r_k или верхняя граница t_k могут отсутствовать.

Выберем σ_0 — максимальное по модулю из всех слагаемых, составляющих все суммы s_k, без учета коэффициента перед ними. Если есть несколько одинаковых максимальных (например, $y_1 = 4^{x_1}$), то возьмем любое из них. Пусть σ_k — слагаемое σ_0 в сумме s_k с учетом коэффициента, будем считать этот коэффициент равным $\mathfrak{a}_k$. Пусть s'_k — остаток суммы s_k (без σ_k). Слагаемое σ_0 может иметь один из видов: 4^{x_1}, y_1 или 4^{y_1}.

Заметим, что если для какого-нибудь k слагаемое σ_k не является наибольшим по модулю среди всех слагаемых s_k с учетом коэффициентов, то существует способ уменьшить количество кванторов. Покажем как сделать это.

Пусть τ_k — наибольшее слагаемое в сумме s_k, и $\tau_k = \mathfrak{b}_k\tau_0$, где τ_0 может иметь один из четырех видов: x_i, 4^{x_i}, y_i или 4^{y_i}. Тогда

$$\tau_0 \leqslant \sigma_0 \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}\tau_0. \tag{4}$$

Возможны 12 вариантов, рассмотрим их все.

1. $x_i \leqslant 4^{x_1} \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}x_i$. Поскольку для каждого x_i существует слагаемое $4^{x_i} \leqslant 4^{x_1}$, то имеем $4^{x_i} \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}x_i$. В этом случае легко получаем что x_i может принимать конечно много значений, и квантор существования можно заменить дизъюнкцией.

2. $4^{x_i} < 4^{x_1} \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}4^{x_i}$. Прологарифмировав, получим

   $$x_i < x_1 \leqslant \log_4 \mathfrak{b}_k - \log_4 \mathfrak{a}_k + x_i.$$

   Таким образом, x_1 может принимать только значения

   $$x_i + 1, \ldots, x_i + \log_4 \mathfrak{b}_k - \log_4 \mathfrak{a}_k,$$

   и, снова, квантор существования заменяется дизъюнкцией.

3. $y_i \leqslant 4^{x_1} \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}y_i$. Если существует слагаемое вида 4^{y_i}, то будем иметь $4^{y_i} \leqslant 4^{x_1} \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}y_i$ откуда следует, что y_i может принимать ограниченно много значений.

   Если слагаемого вида 4^{y_i} нет, то напомним, что мы полагаем $y_i > 1$. Поэтому, если y_i существует, то $y_i = 4^{y_i'}$, для некоторого $y_i' \in R$. Выполнив такую замену в нашей формуле и заменив квантор, получим $4^{y_i'} \leqslant 4^{x_1} \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}4^{y_i'}$. Из-за отсутсвия слагаемых 4^{y_i} все неравенства сохраняют нужный нам вид. Далее действуем как в пункте 2.

4. $4^{y_i} \leqslant 4^{x_1} \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}4^{y_i}$, рассматривается аналогично случаю 2.

5. $x_i \leqslant y_1 \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}x_i$. Так как $4^{x_i} \leqslant y_1 \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}x_i$, то $4^{x_i} \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}x_i$, и x_i может принимать конечно много значений.

6. $4^{x_i} \leqslant y_1 \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}4^{x_i}$. В этом случае слагаемого 4^{y_1} быть не может (иначе оно было бы максимальным, а не y_1). Выполнив замену, аналогичную пункту 3), получим

   $$4^{x_i} \leqslant 4^{y_1'} \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}4^{x_i}.$$

   Отсюда следует, что x_i может принимать только значения

   $$y_1' - \log_4 \mathfrak{b}_k + \log_4 \mathfrak{a}_k, \ldots, y_1'.$$

7. $y_i < y_1 \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}y_i$, $i \neq 1$. Согласно сделанному в начале замечанию, y_1 может принимать ограниченно много значений.

8. $4^{y_i} \leqslant y_1 \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}4^{y_i}$, $i \neq 1$. В данном случае слагаемого 4^{y_1} быть не может, и если $4^{y_i} = y_1$, то y_1 можно заменить на 4^{y_i}.

   Если же $4^{y_i} < y_1$, то $4^{4^{y_i}} \leqslant y_1$, и мы получим
$$4^{4^{y_i}} \leqslant y_1 \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}4^{y_i},$$
   откуда следует, что y_i может принимать ограниченно много значений.

9. $x_i \leqslant 4^{y_1} \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}x_i$. Поскольку 4^{x_i} присутствует в какой-то сумме $s_{k'}$, то оно не может превосходить 4^{y_1}, иначе последнее не было бы максимальным. Следовательно, имеем неравенство
$$4^{x_i} \leqslant 4^{y_1} \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}x_i,$$
   откуда следует, что x_i может принимать ограниченно много значений.

10. $4^{x_i} \leqslant 4^{y_1} \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}4^{x_i}$ рассматривается аналогично пункту 6.

11. $y_i \leqslant 4^{y_1} \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}y_i$, поскольку $4^{y_i} \leqslant 4^{y_1}$, то $4^{y_i} \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}y_i$ и y_i может принимать конечно много значений.

12. $4^{y_i} \leqslant 4^{y_1} \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k}{\mathfrak{a}_k}4^{y_i}$, $i \neq 1$. Прологарифмировав, будем иметь
$$y_i \leqslant y_1 \leqslant \log_4 \mathfrak{b}_k - \log_4 \mathfrak{a}_k + y_i.$$
   Учитывая, что $y_1 \geqslant 4^{y_i}$, получим, что y_1 может иметь конечно много значений.

Теперь мы можем считать, что в каждой сумме s_k слагаемое σ_k является наибольшим по модулю. Возможны два случая:

1. каждое σ_k по модулю превосходит соответствующую сумму s'_k не менее чем в два раза,
2. для некоторого k слагаемое σ_k по модулю меньше $2s'_k$.

Случай 1): $|\sigma_k| \geqslant 2|s'_k|$ для всех k.
Тогда для каждого s_k имеем оценку
$$\frac{1}{2}\sigma_k \leqslant s_k \leqslant \frac{3}{2}\sigma_k.$$

а) Пусть $\sigma_k = \mathfrak{a}_k 4^{x_1}$.

Покажем, что количество вхождений слагаемого $\mathfrak{a}_k 4^{x_1}$ в формуле (31) можно уменьшить. Рассмотрим, например, неравенство вида $r_k \leqslant s_k$. Найдем такое u, для которого $\mathfrak{a}_k 4^u < r_k \leqslant 4\mathfrak{a}_k 4^u$. Такое u существует и единственно (случаи, когда $r_k \leqslant \mathfrak{a}_k$, можно перебрать в конечной дизъюнкции и не рассматривать). Если $x_1 \leqslant u - 1$, то
$$s_k \leqslant \frac{3}{2}\mathfrak{a}_k 4^{x_1} \leqslant \frac{3}{2}\mathfrak{a}_k \frac{1}{4}4^u = \frac{3}{8}\mathfrak{a}_k 4^u < r_k,$$

то есть неравенство ложно. Если $x_1 \geqslant u+2$, то

$$s_k \geqslant \frac{1}{2}\mathfrak{a}_k 4^{x_1} \leqslant \frac{1}{2}\mathfrak{a}_k 16 \times 4^u = 8\mathfrak{a}_k 4^u > r_k,$$

то есть неравенство истинно. Отсюда можно сделать вывод, что формула

$$\neg(\exists x_1,\ldots,x_n)(\exists y_1,\ldots,y_m \in R)(\underbrace{r_k \leqslant s_k \wedge \phi'}_{\phi(x_1,\ldots)})$$

будет эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned}(\exists u)(\mathfrak{a}_k 4^u < r_k \leqslant 4\mathfrak{a}_k 4^u \wedge \\ \wedge \neg(\exists x_2,\ldots,x_n)(\exists y_1,\ldots,y_m \in R) \\ (\phi(u,\ldots) \vee \phi(u+1,\ldots) \vee (\exists x_1)(x_1 \geqslant u+2 \wedge \phi'))).\end{aligned} \qquad (5)$$

Аналогично рассматривается противоположное неравенство: $t_k \geqslant s_k$. Пусть $\mathfrak{a}_k 4^u < t_k \leqslant 4\mathfrak{a}_k 4^u$. Тогда при $x_1 \leqslant u-1$ получим

$$s_k \leqslant \frac{3}{2}\mathfrak{a}_k 4^{x_1} \leqslant \frac{3}{2}\mathfrak{a}_k \frac{1}{4}4^u = \frac{3}{8}\mathfrak{a}_k 4^u < t_k,$$

а при $x_1 \geqslant u+2$ имеем

$$s_k \geqslant \frac{1}{2}\mathfrak{a}_k 4^{x_1} \leqslant \frac{1}{2}\mathfrak{a}_k 16 \times 4^u = 8\mathfrak{a}_k 4^u > t_k.$$

Следовательно, формула

$$\neg(\exists x_1,\ldots,x_n)(\exists y_1,\ldots,y_m \in R)(\underbrace{t_k \geqslant s_k \wedge \phi'}_{\phi(x_1,\ldots)})$$

будет эквивалентна

$$\begin{aligned}(\exists u)(\mathfrak{a}_k 4^u < t_k \leqslant 4\mathfrak{a}_k 4^u \wedge \\ \wedge \neg(\exists x_2,\ldots,x_n)(\exists y_1,\ldots,y_m \in R) \\ (\phi(u,\ldots) \vee \phi(u+1,\ldots) \vee (\exists x_1)(x_1 \leqslant u-1 \wedge \phi'))).\end{aligned} \qquad (6)$$

Далее в формулах (5) и (6) нужно распределить кванторы существования и знаки отрицания по дизъюнкциям. И в том и в другом случае произойдет уменьшение количества слагаемых вида $\mathfrak{a}_k 4^{x_1}$ в каждой из формул, стоящих под знаком отрицания. Когда таких слагаемых не останется, квантор, как уже было сказано ранее, удаляется аналогично арифметике Пресбургера.

b) Пусть $\sigma_k = \mathfrak{a}_k 4^{y_1}$. Как и в предыдущем случае, покажем, что возможно уменьшить количество слагаемых такого вида. Рассмотрим неравенство $r_k \leqslant s_k$. Аналогично предыдущему пункту получим, что формула

$$\neg(\exists x_1,\ldots,x_n)(\exists y_1,\ldots,y_m \in R)(\underbrace{r_k \leqslant s_k \wedge \phi'}_{\phi(y_1,\ldots)})$$

будет эквивалентна

$$(\exists u, v)(\mathfrak{a}_k 4^u < r_k \leqslant 4\mathfrak{a}_k 4^u \wedge v = u + 1 \wedge \\ \wedge \neg(\exists x_1, \ldots, x_n)(\exists y_2, \ldots, y_m \in R) \\ (\phi(u, \ldots) \wedge u \in R \vee \phi(v, \ldots) \wedge v \in R \vee (\exists y_1 \in R)(y_1 \geqslant u + 2 \wedge \phi'))). \quad (7)$$

Если раскрыть внутреннюю формулу, то получим следующее:

$$(\exists u, v)(\mathfrak{a}_k 4^u < r_k \leqslant 4\mathfrak{a}_k 4^u \wedge v = u + 1 \wedge \\ \wedge (\neg(\exists x_1, \ldots, x_n)(\exists y_2, \ldots, y_m \in R)(\phi(u, \ldots)) \vee u \notin R) \wedge \\ \wedge (\neg(\exists x_1, \ldots, x_n)(\exists y_2, \ldots, y_m \in R)(\phi(v, \ldots)) \vee v \notin R) \wedge \\ \wedge \neg(\exists x_1, \ldots, x_n)(\exists y_1, \ldots, y_m \in R)(y_1 \geqslant u + 2 \wedge \phi')).$$

Далее остается только привести внутреннюю часть к дизъюнктивной нормальной форме, распределить внешние кванторы существования по дизъюнкции и удалить формулы типа $u \notin R$, пользуясь леммой 1.

Случай с неравенством $t_k \geqslant s_k$ абсолютно аналогичен.

c) Пусть $\sigma_k = \mathfrak{a}_k y_1$. В этом случае формула (31) будет эквивалентна

$$(\exists a_1, b_1, g_1, d_1, e_1, \ldots, a_m, b_m, c_m, d_m, e_m \in R) \\ \Big(\mathfrak{a}_1 a_1 < r_1 \leqslant \mathfrak{a}_1 4^{a_1} \wedge b_1 = 4^{a_1} \wedge g_1 = 4^{b_1} \wedge \\ \wedge \mathfrak{a}_1 d_1 < t_1 \leqslant \mathfrak{a}_1 4^{d_1} \wedge e_1 = 4^{d_1} \wedge \cdots \\ \cdots \wedge \mathfrak{a}_m a_m < r_m \leqslant \mathfrak{a}_m 4^{a_m} \wedge b_m = 4^{a_m} \wedge g_m = 4^{b_m} \wedge \\ \wedge \mathfrak{a}_m d_m < t_m \leqslant \mathfrak{a}_m 4^{d_m} \wedge e_m = 4^{d_m} \wedge \\ \wedge \neg(\exists x_1, \ldots, x_n)(\exists y_2, \ldots, y_m \in R) \bigvee_{\substack{y_1 \in \{a_1, b_1, g_1, d_1, e_1, \ldots \\ \ldots, a_m, b_m, g_m, d_m, e_m\}}} \phi\Big) \quad (8)$$

за исключением конечного числа случаев, которые будут указаны ниже. Если какие-то верхние ограничения отсутствуют, то и соответствующих переменных d, e не будет. Если отсутствуют нижние ограничения, то не будет переменных a и b, а g будет определяться равенством $4^g = d$.

В самом деле, при $y_1 < a_k$ для любого k получаем, что $\mathfrak{a}_k y_1 \leqslant \mathfrak{a}_k \log_4 a_k$, так как $y_1 \in R$. Поэтому

$$s_k \leqslant \frac{3}{2}\mathfrak{a}_k y_1 \leqslant \frac{3}{2}\mathfrak{a}_k \log_4 a_k \leqslant \mathfrak{a}_k a_k < r_k.$$

Аналогично, при $y_2 > e_k$ имеем

$$s_k \geqslant \frac{1}{2}\mathfrak{a}_k y_1 \geqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}_k 4^{e_k} > t_k.$$

Если же формула выполняется для какого-то y_1, лежащего между g_k и d_k для всех k, то пусть g_p — максимальное из всех g_k, а d_q — минимальное из всех d_k. Тогда $4^{g_p} < d_q$, и мы получим при $y_1 = g_p$

$$r_k \leqslant \mathfrak{a}_k b_k \leqslant \frac{1}{2}\mathfrak{a}_k g_k \leqslant \frac{1}{2}\mathfrak{a}_k g_p \leqslant s_k \leqslant \frac{3}{2}\mathfrak{a}_k g_p \leqslant \mathfrak{a}_k d_q \leqslant \mathfrak{a}_k d_k \leqslant t_k.$$

Таким образом, нахождение y_1 действительно можно свести к рассмотрению указанных случаев.

Случай 2): $|\sigma_k| < 2|s'_k|$ для некоторого k.
Пусть τ_0 — второе по абсолютной величине слагаемое в s_k (без коэффициента перед ним), а само слагаемое имеет вид $\mathfrak{b}_k\tau_0$. Если максимальных слагаемых несколько, то в качестве τ_0 берем другое максимальное. Тогда будем иметь

$$\tau_k \leqslant \sigma_k < \mathfrak{c}\tau_k,$$

где $\mathfrak{c}$ — удвоенная сумма модулей всех коэффициентов из s'_k, то есть некоторая константа. Как и для σ_0, для τ_0 существуют три возможности: $\tau_0 = 4^{x_i}$, $\tau_0 = y_i$ или $\tau_0 = 4^{y_i}$. Тогда получим

$$\tau_0 \leqslant \sigma_0 \leqslant \frac{\mathfrak{b}_k\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}_k}\tau_0.$$

Далее рассмотрение аналогично случаям для неравенства (4). ∎

Специально отметим одно существенное для нас свойство формул, которые получаются в ходе добавления новых кванторов.

Следствие 2. *Если в исходной формуле все кванторы ограничены некоторой константой $\mathfrak{h} \in R$, то во вновь построенной формуле все кванторы тоже можно считать ограниченными этой же константой.*

Доказательство. Новые кванторы появляются в формулах (5), (6), (7), (8).

Рассмотрим случай (5), когда $\sigma_k = \mathfrak{a}_k 4^{x_1}$.

Пусть квантор имел вид $(\exists x_1 \leqslant \mathfrak{h})$. После преобразования получим:

$$\begin{aligned}
&(\exists u)(\mathfrak{a}_k 4^u < r_k \leqslant 4\mathfrak{a}_k 4^u \wedge \\
&\qquad\qquad \wedge \neg(\exists x_2, \dots, x_n)(\exists y_1, \dots, y_m \in R) \\
&\qquad (\phi(u, \dots) \wedge u \leqslant \mathfrak{h} \vee \phi(u+1, \dots) \wedge u+1 \leqslant \mathfrak{h} \vee \\
&\qquad\qquad\qquad \vee (\exists x_1)(u+2 \leqslant x_1 \leqslant \mathfrak{h} \wedge \phi'))).
\end{aligned}$$

Напомним еще раз, что переменная u может принимать единственно возможное значение. Предположим, что $r_k > \mathfrak{a}_k 4^{\mathfrak{h}+1}$. Тогда будем иметь

$$4\mathfrak{a}_k 4^u \geqslant r_k > \mathfrak{a}_k 4^{\mathfrak{h}+1}.$$

То есть $\mathfrak{a}_k 4^{u+1} > \mathfrak{a}_k 4^{\mathfrak{h}+1}$ и $u > \mathfrak{h}$. В этом случае неравенства во внутренней формуле всегда ложны, а вся формула, соответственно, истинна. Если же $r_k \leqslant \mathfrak{a}_k 4^{\mathfrak{h}+1}$, то

$$\mathfrak{a}_k 4^u < r_k \leqslant \mathfrak{a}_k 4^{\mathfrak{h}+1},$$

отсюда получаем $4^u < 4^{\mathfrak{h}+1}$ и $u \leqslant \mathfrak{h}$. Таким образом, эта формула эквивалентна

$$\begin{aligned}
&r_k > 4\mathfrak{a}4^{\mathfrak{h}} \vee (\exists u \leqslant \mathfrak{h})(\mathfrak{a}_k 4^u < r_k \leqslant 4\mathfrak{a}_k 4^u \wedge \\
&\qquad\qquad \wedge \neg(\exists x_2, \dots, x_n)(\exists y_1, \dots, y_m \in R) \\
&\qquad (\phi(u, \dots) \wedge u \leqslant \mathfrak{h} \vee \phi(u+1, \dots) \wedge u+1 \leqslant \mathfrak{h} \vee \\
&\qquad\qquad\qquad \vee (\exists x_1 \leqslant \mathfrak{h})(u+2 \leqslant x_1 \wedge \phi'))).
\end{aligned}$$

Для формулы (6) аналогично получим после преобразования:

$$
\begin{aligned}
&(\exists u)(\mathfrak{a}_k 4^u < t_k \leqslant 4\mathfrak{a}_k 4^u \wedge \\
&\qquad\qquad \wedge \neg(\exists x_2, \dots, x_n)(\exists y_1, \dots, y_m \in R) \\
&\qquad (\phi(u, \dots) \wedge u \leqslant \mathfrak{h} \vee \phi(u+1, \dots) \wedge u+1 \leqslant \mathfrak{h} \vee \\
&\qquad\qquad\qquad \vee (\exists x_1)(x_1 \leqslant u-1 \wedge x_1 \leqslant \mathfrak{h} \wedge \phi'))).
\end{aligned}
$$

При $t_k > \mathfrak{a}_k 4^{\mathfrak{h}+1}$ будем иметь $u > \mathfrak{h}$, в этом случае формула будет эквивалентна

$$\neg(\exists x_2, \dots, x_n)(\exists y_1, \dots, y_m \in R)(\exists x_1 \leqslant \mathfrak{h})\phi'.$$

Окончательно, получим

$$
\begin{aligned}
&t_k > 4\mathfrak{a}4^{\mathfrak{h}} \wedge \neg(\exists x_2, \dots, x_n)(\exists y_1, \dots, y_m \in R)(\exists x_1 \leqslant \mathfrak{h})\phi' \vee \\
&\qquad\qquad \vee (\exists u \leqslant \mathfrak{h})(\mathfrak{a}_k 4^u < t_k \leqslant 4\mathfrak{a}_k 4^u \wedge \\
&\qquad\qquad \wedge \neg(\exists x_2, \dots, x_n)(\exists y_1, \dots, y_m \in R) \\
&\qquad (\phi(u, \dots) \wedge u \leqslant \mathfrak{h} \vee \phi(u+1, \dots) \wedge u+1 \leqslant \mathfrak{h} \vee \\
&\qquad\qquad\qquad \vee (\exists x_1 \leqslant \mathfrak{h})(x_1 \leqslant u-1 \wedge \phi'))).
\end{aligned}
$$

Для формулы (7) техника аналогична. Нужно только заметить, что в лемме 1 в случае ограниченного $\mathfrak{h}$ квантора новый квантор тоже будет ограничен этой же константой.

Для случая (8) тоже используется техника ограничения всех вновь появившихся кванторов. Рассмотрим, например, в (8) кванторы по переменным a_1, b_1 и g_1. Снова напомним, что $a_1, b_1, g_1 \in R$, a_1 находится из неравенства

$$\mathfrak{a}_1 a_1 < r_1 \leqslant \mathfrak{a}_1 4^{a_1},$$

и выполняется $4^{a_1} = b_1$, $4^{b_1} = g_1$. При $r_1 > \mathfrak{a}_1 4^{\mathfrak{h}}$ получим

$$\mathfrak{a}_1 4^{a_1} \geqslant r_1 > \mathfrak{a}_1 4^{\mathfrak{h}},$$

то есть $a_1 > \mathfrak{h}$. Тогда случай $y_1 = a_1$ можно исключить из дизъюнкции. В противном случае, при $r_1 \leqslant \mathfrak{a}_1 4^{\mathfrak{h}}$, будем иметь

$$\mathfrak{a}_1 a_1 < r_1 \leqslant \mathfrak{a}_1 4^{\mathfrak{h}}$$

и, следовательно, $a_1 \leqslant \mathfrak{h}$. Ограничив квантор по a_1 точно так же ограничиваем квантор по b_1, выделяя случай, когда $r_1 > \mathfrak{a}_1 \mathfrak{h}$, и по g_1, рассматривая ситуацию $r_1 > \mathfrak{a}_1 \log_4 \mathfrak{h}$. Заметим только, что поскольку $\mathfrak{h}$ является константой, то и $\log_4 \mathfrak{h}$ — тоже константа. ∎

5. Начальные фрагменты системы $\mathfrak{L}_R$. Теперь, когда мы рассмотрели систему $\mathfrak{L}_R = (\omega, 0, 1, \leqslant, +, 4^x, R)$, мы приступим к изучению начальных фрагментов этой системы, которые будут состояниями базы данных. Главный результат этой части — если начальный фрагмент этой системы ограничен некоторым числом $\mathfrak{h} \in R$, то каждая формула на этом фрагменте эквивалентна булевой комбинации линейных неравенств для $\mathfrak{h}$.

Итак, мы выяснили, что в теории системы $\mathfrak{L}_R = (\omega, 0, 1, \leqslant, +, 4^x, R)$ сигнатуры Σ_R^A каждая формула может быть преобразована в экзистенциальную, причем ее матрица содержит предикаты делимости и сравнения сумм вида (1).

Обогатим сигнатуру Σ_R^A константой $\mathfrak{h}$ и обозначим полученную сигнатуру $\Omega_{\mathfrak{h}}$:

$$\Omega_{\mathfrak{h}} = (0, 1, \leqslant, +, 4^x, R, \mathfrak{h}).$$

Рассмотрим алгебраическую систему сигнатуры $\Omega_{\mathfrak{h}}$:

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{h}} = ([0; \mathfrak{h}], 0_{\mathfrak{h}}, 1_{\mathfrak{h}}, \leqslant_{\mathfrak{h}}, +_{\mathfrak{h}}, 4^x_{\mathfrak{h}}, R_{\mathfrak{h}}, \mathfrak{h}_{\mathfrak{h}}) \text{ —}$$

начальный фрагмент системы $\mathfrak{L}_R$, ограниченный числом $\mathfrak{h} \in R$. Отношения $\leqslant_{\mathfrak{h}}$ и $R_{\mathfrak{h}}$ — обычные ограничения отношений $\leqslant$ и R на множество $[0; \mathfrak{h}]$. Отношение $+_{\mathfrak{h}}$ будет ограничением с насыщением обычного сложения, то есть $a +_{\mathfrak{h}} b = a + b$, если $a + b < \mathfrak{h}$, иначе — $a +_{\mathfrak{h}} b = \mathfrak{h}$. Аналогично ограничивается экспонента.

Лемма 2. *Для каждой формулы ϕ сигнатуры $\Omega_{\mathfrak{h}}$ можно построить формулу $\psi(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_1)$ сигнатуры Σ_R^A такую, что*

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{h}} \models \phi \iff \mathfrak{L}_R \models \psi(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_1).$$

Здесь $\mathfrak{h}_1$ — элемент R, непосредственно предшествующий $\mathfrak{h}$. Более того, можно считать, что все кванторы формулы ψ ограничены константой $\mathfrak{h}$, и значение каждого встречающегося в ней терма превосходит $\mathfrak{h}$ не более чем в два раза.

Доказательство. Прежде всего, можно считать, что каждая атомная подформула ϕ является атомарной, то есть имеет один из видов:

- $u + v = w$;
- $4^u = w$;
- $u \leqslant v$;
- $R(u)$;
- $u = 0$;
- $u = 1$;
- $u = \mathfrak{h}$.

Здесь u, v, w — переменные. Далее, отметим, что в формуле ϕ все кванторы можно считать ограниченными $\mathfrak{h}$, так как это — наибольший в $\mathfrak{D}_{\mathfrak{h}}$ элемент. После этого формула ψ получается заменой подформул первых двух видов на

$$(u + v \leqslant \mathfrak{h} \wedge u + v = w) \vee (u + v > \mathfrak{h} \wedge w = \mathfrak{h})$$

и

$$(u \leqslant \mathfrak{h}_1 \wedge 4^u = w) \vee (u > \mathfrak{h}_1 \wedge w = \mathfrak{h})$$

соответственно. Единственный терм, который может превосходить $\mathfrak{h}$, — это $u + v$, но так как каждая из переменных не больше $\mathfrak{h}$, то их сумма превосходит $\mathfrak{h}$ не более чем в два раза. ∎

Согласно теореме 2 и ее следствию можно считать, что формула $\psi(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_1)$ экзистенциальна. Отметим только, что константа $\log_4 \mathfrak{h}$, которая возникла при доказательстве следствия 2, равна $\mathfrak{h}_1$.

Лемма 3. *Формула $\psi(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_1)$ эквивалентна бескванторной формуле с константами $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} > \mathfrak{h}_1 > \cdots > \mathfrak{h}_l$, где $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_l$ — элементы $R_{\mathfrak{h}}$, непосредственно предшествующие $\mathfrak{h}$, а также $\mathfrak{h}_{-1} < \mathfrak{h}_{-2} < \cdots < \mathfrak{h}_{-l}$, где $\mathfrak{h}_{-1}, \ldots, \mathfrak{h}_{-l}$ — элементы $R_{\mathfrak{h}}$, непосредственно следующие за $\mathfrak{h}$. Кроме того, эта бескванторная формула содержит только линейные неравенства и предикаты делимости.*

Доказательство. Для этого достаточно показать, что в случае 1) в доказательстве теоремы 2 можно избежать появления новых кванторов.

Заметим, что термы r_k и t_k имеют вид

$$\sum_j \mathfrak{e}_{jk}\mathfrak{h}_j + \mathfrak{f}_k.$$

Снова рассмотрим получающиеся формулы (5), (6), (7), (8). В формуле

$$(\exists u)(\mathfrak{a}_k 4^u < r_k \leqslant 4\mathfrak{a}_k 4^u \wedge \cdots)$$

переменная u может принимать единственно возможное значение, а именно

$$\log_4\left(\frac{r_k}{\mathfrak{a}_k} - 1\right).$$

Учитывая вид r_k, получим

$$u = \log_4\left(\sum_j \frac{\mathfrak{e}_{jk}}{\mathfrak{a}_k}\mathfrak{h}_j + \frac{\mathfrak{f}_p}{\mathfrak{a}_k} - 1\right).$$

Пусть j_0 — индекс наибольшего из $\mathfrak{h}_j$, присутствующих в этой формуле с ненулевым коэффициентом. Поскольку $\mathfrak{h}_{i-1} = 4^{\mathfrak{h}_i}$, то

$$\log_4\left(\sum_j \frac{\mathfrak{e}_{jk}}{\mathfrak{a}_k}\mathfrak{h}_j + \frac{\mathfrak{f}_p}{\mathfrak{a}_k} - 1\right)$$

может быть равен только

$$\log_4\left(\frac{\mathfrak{e}_{j_0k}}{\mathfrak{a}_k}\mathfrak{h}_{j_0}\right)$$

или

$$\log_4\left(\frac{\mathfrak{e}_{j_0k}}{\mathfrak{a}_k}\mathfrak{h}_{j_0}\right) - 1$$

при достаточно больших $\mathfrak{h}$. Конкретный вид определяется знаком коэффициента при следующем по порядку $\mathfrak{h}_j$. Последние же выражения равны $\mathfrak{h}_{j_0+1} + \mathfrak{d}$ для некоторых констант $\mathfrak{d}$. Для маленьких $\mathfrak{h}$ мы можем явно выписать дизъюнкцию возможных значений. Таким образом, переменная u будет иметь или конкретное числовое значение, или будет равна $\mathfrak{h}_{j_0} + \mathfrak{d}$ для некоторых j_0 и $\mathfrak{d}$.

Теперь рассмотрим другой случай: формулу (8). Заметим, что в формуле (8) из пятерки переменных $a_i, b_i, g_i, d_i, e_i \in R$ только две независимых: a_i и d_i, остальные выражаются через них:

$$b_i = 4^{a_i},\ g_i = 4^{b_i},\ e_i = 4^{d_i}.$$

Поэтому мы продемонстрируем только, как убрать кванторы для a_i и d_i. Как и в предыдущем случае в формуле

$$(\exists a_i \in R)(\mathfrak{a}_i a_i < r_i \leqslant \mathfrak{a}_i 4^{a_i} \wedge \cdots)$$

a_i может принимать единственно возможное значение, а именно a_i равно наибольшему элементу множества R, который меньше

$$\frac{r_i}{\mathfrak{a}_i} = \sum_j \frac{\mathfrak{e}_{ji}}{\mathfrak{a}_i}\mathfrak{h}_j + \frac{\mathfrak{f}_i}{\mathfrak{a}_i}.$$

Снова пусть j_0 — индекс наибольшего из $\mathfrak{h}_j$, присутствующих в этой формуле. Тогда, если $\mathfrak{h}$ достаточно велико, при $\frac{\mathfrak{e}_{j_0 i}}{\mathfrak{a}_i} > 1$ переменная a_i может быть равна только $\mathfrak{h}_{j_0}$, при $\frac{\mathfrak{e}_{j_0 i}}{\mathfrak{a}_i} < 1$ она равна $\mathfrak{h}_{j_0+1}$, а при $\frac{\mathfrak{e}_{j_0 i}}{\mathfrak{a}_i} = 1$ все определяется знаком меньших по порядку слагаемых. При малых $\mathfrak{h}$ мы снова будем иметь конечную дизъюнкцию возможных случаев. Аналогично происходит удаление квантора для переменных d_i.

Так как значение a_i и d_i не превосходит $\mathfrak{h}_{j_0}$, то наибольшее возможное значение b_i и e_i будет равно $\mathfrak{h}_{j_0-1}$, а переменных g_i, соответственно, $\mathfrak{h}_{j_0-2}$. ∎

Теорема 3. *Значение любой формулы сигнатуры $\Omega_\mathfrak{h}$ на конечной алгебраической системе вида $\mathfrak{D}_\mathfrak{h}$ эквивалентно булевой комбинации линейных неравенств для $\mathfrak{h}$.*

Доказательство. Из леммы 3 следует, что формула $\psi(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_1)$ эквивалентна булевой комбинации линейных неравенств для $\mathfrak{h}_{-l}, \ldots, \mathfrak{h}_{-1}, \mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}, \mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_l$ и предикатов делимости от них. Но, согласно теореме 1, предикаты делимости от $\mathfrak{h}_i$ тоже сводятся к некоторым линейным неравенствам.

А так как каждая из констант экспоненциально превосходит ближайшую, то любое линейное неравенство с $\mathfrak{h}_{-l}, \ldots, \mathfrak{h}_{-1}, \mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}, \mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_l$ сводится к линейным неравенствам для $\mathfrak{h}_{-l}$, а они, в свою очередь, — к неравенствам для $\mathfrak{h}$. ∎

Мы будем рассматривать состояния баз данных сигнатуры $\Omega_\mathfrak{h}$.

Лемма 4. *Утверждение «состояние базы данных является одной из алгебраических систем вида $\mathfrak{D}_\mathfrak{h}$» можно выразить формулой первого порядка сигнатуры $\Omega_\mathfrak{h}$.*

Доказательство. Нужно записать конъюнкцию формул, которые утверждают следующее:

- $\leqslant_\mathfrak{h}$ — линейный порядок;
- $0_\mathfrak{h}$ — минимальный, $1_\mathfrak{h}$ — второй по порядку, а $\mathfrak{h}_\mathfrak{h}$ — максимальный элементы;

- $+_{\mathfrak{h}}$ — двухместная функция, и для любых x и y выполнено
$$x +_{\mathfrak{h}} 0 = x \wedge x +_{\mathfrak{h}} s(y) = s(x +_{\mathfrak{h}} y),$$
где $s(u)$ — следующий за u по порядку элемент или $\mathfrak{h}_{\mathfrak{h}}$, если $u = \mathfrak{h}_{\mathfrak{h}}$;
- $4^x_{\mathfrak{h}}$ — одноместная функция и для любого x выполнено $4^0_{\mathfrak{h}} = 1$ и
$$4^{x+1}_{\mathfrak{h}} = 4^x_{\mathfrak{h}} +_{\mathfrak{h}} 4^x_{\mathfrak{h}} +_{\mathfrak{h}} 4^x_{\mathfrak{h}} +_{\mathfrak{h}} 4^x_{\mathfrak{h}};$$
- если x и y — два подряд идущих элемента $R_{\mathfrak{h}}$, то $4^x_{\mathfrak{h}} = y$;
- $0_{\mathfrak{h}} \in R_{\mathfrak{h}}$ и $\mathfrak{h}_{\mathfrak{h}} \in R_{\mathfrak{h}}$;
- если $x \in R_{\mathfrak{h}}$ и $x <_{\mathfrak{h}} \mathfrak{h}_{\mathfrak{h}}$, то для любых $y <_{\mathfrak{h}} x$ и $z <_{\mathfrak{h}} 4^y_{\mathfrak{h}}$ выполнено
$$4^y_{\mathfrak{h}} +_{\mathfrak{h}} 4^y_{\mathfrak{h}} +_{\mathfrak{h}} 4^y_{\mathfrak{h}} +_{\mathfrak{h}} z <_{\mathfrak{h}} \mathfrak{h}_{\mathfrak{h}}.$$

Последнее необходимо для того, чтобы гарантировать, что $\mathfrak{h}_{\mathfrak{h}} \in R$. ∎

В дальнейшем мы будем рассматривать только состояния баз данных вида $\mathfrak{D}_{\mathfrak{h}}$. Свойство, которое мы будем пытаться выразить формулами, будет следующим:

«Состояние базы данных является одной из систем вида $\mathfrak{D}_{\mathfrak{h}}$, порядки $\leqslant_{\mathfrak{h}}$ и $\leqslant$ согласованы, и количество элементов предиката $R_{\mathfrak{h}}$ четно.» (9)

Здесь $\leqslant$ — порядок универсума. Очевидно, что если какая-то формула выражает указанное свойство, то она является $<$-инвариантной, так как свойство свойство (9) не меняется при сохраняющих порядок $\leqslant$ изоморфизмах состояния внутри универсума.

Из леммы 4 следует, что первые два утверждения в свойстве (9) с помощью формул первого порядка сигнатуры $(\Omega_{\mathfrak{h}}, \leqslant)$ записать можно. Покажем, что при этих условиях последнее утверждение в (9) с помощью формул сигнатуры $(\Omega_{\mathfrak{h}}, \leqslant)$ невыразимо.

Теорема 4. *Свойство* (9) *нельзя выразить формулами первого порядка сигнатуры* $(\Omega_{\mathfrak{h}}, \leqslant)$ *ни в каком универсуме.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный универсум $\mathfrak{A}$ с порядком $\leqslant$. Рассмотрим какой-нибудь элементарно эквивалентный $\mathfrak{A}$ универсум $\mathfrak{B}$, в котором есть неразличимая последовательность I, упорядоченная по типу рациональных чисел. Пусть ϕ — произвольная $<$-инвариантная формула сигнатуры $(\Omega_{\mathfrak{h}}, \leqslant)$. Рассмотрим состояние базы данных $\mathfrak{D}_{\mathfrak{h}}$ над множеством I в системе $\mathfrak{B}$. Так как любая порядковая формула тривиально является сводимой, а порядки $\leqslant$ и $\leqslant_{\mathfrak{h}}$ согласованы, то из работы [5] следует, что можно построить эквивалентную ϕ на конечных состояниях активную формулу ψ сигнатуры $\Omega_{\mathfrak{h}}$. В активной формуле порядки $\leqslant$ и $\leqslant_{\mathfrak{h}}$ эквивалентны, поэтому порядок универсума $\leqslant$ можно исключить. Останется формула сигнатуры $\Omega_{\mathfrak{h}}$. Следовательно, по теореме 3, формула ψ на состояниях $\mathfrak{D}_{\mathfrak{h}}$ эквивалентна булевой комбинации линейных неравенств для $\mathfrak{h}$. А помощью линейных неравенств для $\mathfrak{h}$ четность количества элементов $R_{\mathfrak{h}}$ записать, очевидно, нельзя. ∎

Итак, мы показали, что свойство (9) нельзя записать в виде формулы $<$-ограниченной сигнатуры $(\Omega_{\mathfrak{h}}, \leqslant)$.

6. Состояния $\mathfrak{D}_{\mathfrak{h}}$ над системой $\mathfrak{L}_{\sqsubseteq}$. Теперь покажем, что при использовании отношений автоматной системы $\mathfrak{L}_{\sqsubseteq}$ свойство (9) может быть записано в виде расширенной формулы. Согласно лемме 4, нужно только показать, как определить четность $R_{\mathfrak{h}}$.

Будем считать, что состояние $\mathfrak{D}_{\mathfrak{h}}$ вложено в систему $\mathfrak{L}_{\sqsubseteq}$. Считаем, что порядки в системах согласованы.

Напомним, что в системе $\mathfrak{L}_{\sqsubseteq}$ каждый элемент может рассматриваться как конечное множество линейно упорядоченных атомов, поэтому для любого элемента $x_{\mathfrak{h}} <_{\mathfrak{h}} \mathfrak{h}_{\mathfrak{h}}$ состояния $\mathfrak{D}_{\mathfrak{h}}$ можно определить атом

$$f(x_{\mathfrak{h}}) = \max((x_{\mathfrak{h}} +_{\mathfrak{h}} 1_{\mathfrak{h}}) \bigtriangledown x_{\mathfrak{h}}).$$

С помощью $\bigtriangledown$ обозначена симметрическая разность. Здесь и в дальнейшем, чтобы отличать элементы состояния $\mathfrak{D}_{\mathfrak{h}}$, мы всегда будем добавлять к ним индекс $\mathfrak{h}$, не упоминая об этом специально. Соответственно, буквы без индекса обозначают произвольные элементы системы $\mathfrak{L}_{\sqsubseteq}$.

Функция $f(x_{\mathfrak{h}})$ определима в состоянии $\mathfrak{D}_{\mathfrak{h}}$ над $\mathfrak{L}_{\sqsubseteq}$, поэтому мы будем ее использовать.

Лемма 5. *Для любого элемента $x_{\mathfrak{h}} \in R_{\mathfrak{h}}$, $1_{\mathfrak{h}} < x_{\mathfrak{h}} < \mathfrak{h}$ существует $y_{\mathfrak{h}}$ такой, что*

- $x_{\mathfrak{h}} < y_{\mathfrak{h}} \leqslant 4_{\mathfrak{h}}^{x_{\mathfrak{h}}}$*;*
- $f(y_{\mathfrak{h}})$ *не равняется никакому* $f(z_{\mathfrak{h}})$ *для* $z_{\mathfrak{h}} \leqslant x_{\mathfrak{h}}$.

Доказательство. Предположим, что это не так и для некоторого $x_{\mathfrak{h}} \in R_{\mathfrak{h}}$ утверждение не выполнено. Пусть

$$X = \{f(z_{\mathfrak{h}}) : z_{\mathfrak{h}} \leqslant x_{\mathfrak{h}}\}.$$

Тогда для каждого $y_{\mathfrak{h}} \in (x_{\mathfrak{h}}, 4_{\mathfrak{h}}^{x_{\mathfrak{h}}}]$ имеем $f(y_{\mathfrak{h}}) \in X$. Заметим, что при переходе от $y_{\mathfrak{h}}$ к $y_{\mathfrak{h}} +_{\mathfrak{h}} 1_{\mathfrak{h}}$ двоичный разряд $f(y_{\mathfrak{h}})$ всегда меняется с 0 на 1. Это так, потому что порядок состояния совпадает с порядком автоматной системы.

Так как $y_{\mathfrak{h}}$ может рассматриваться как множество атомов, то определим

$$X_{y_{\mathfrak{h}}} = X \cap y_{\mathfrak{h}}.$$

Существует не более $2^{|X|}$ различных множеств $X_{y_{\mathfrak{h}}}$. А так как $|X| \leqslant x_{\mathfrak{h}} + 1$, то существует не более $2^{x_{\mathfrak{h}}+1}$ различных множеств $X_{y_{\mathfrak{h}}}$. С другой стороны, различных $y_{\mathfrak{h}}$ в промежутке $(x_{\mathfrak{h}}, 4_{\mathfrak{h}}^{x_{\mathfrak{h}}}]$ существует $4^{x_{\mathfrak{h}}} - x_{\mathfrak{h}}$. При $x_{\mathfrak{h}} > 1_{\mathfrak{h}}$ имеем

$$4^{x_{\mathfrak{h}}} - x_{\mathfrak{h}} > 2^{x_{\mathfrak{h}}+1},$$

поэтому в промежутке $(x_{\mathfrak{h}}, 4_{\mathfrak{h}}^{x_{\mathfrak{h}}}]$ существуют два различных $y'_{\mathfrak{h}}$ и $y''_{\mathfrak{h}}$, для которых $X_{y'_{\mathfrak{h}}} = X_{y''_{\mathfrak{h}}}$. Пусть $y'_{\mathfrak{h}} < y''_{\mathfrak{h}}$, тогда существует атом $a \sqsubseteq y''_{\mathfrak{h}} \setminus y'_{\mathfrak{h}}$. Без ограничения общности считаем, что a — наибольший из таких атомов, тогда для любых двух $u_{\mathfrak{h}}, v_{\mathfrak{h}} \in [y'_{\mathfrak{h}}; y''_{\mathfrak{h}}]$ выполняется

$$(\forall a' > a)(a' \sqsubseteq u_{\mathfrak{h}} \leftrightarrow a' \sqsubseteq v_{\mathfrak{h}}). \tag{10}$$

Очевидно, что $a \notin X$, так как $y'_\mathfrak{h} \cap X = y''_\mathfrak{h} \cap X$. Пусть

$$y^*_\mathfrak{h} = \max\{y_\mathfrak{h} \in [y'_\mathfrak{h}, y''_\mathfrak{h}] : a \not\sqsubseteq y_\mathfrak{h}\}.$$

Так как $a \sqsubseteq y''_\mathfrak{h}$, то $y^*_\mathfrak{h} < y''_\mathfrak{h}$. Поскольку $y^*_\mathfrak{h} +_\mathfrak{h} 1_\mathfrak{h}$ уже содержит атом a, то $f(y^*_\mathfrak{h}) = a$ из-за соотношения (10). Но это противоречит $a \notin X$. ■

Лемма 6. *Существует расширенная формула, которая для каждого $x_\mathfrak{h}$ выделяет в точности один атом $f(y_\mathfrak{h})$ из леммы 5.*

Доказательство. Формула

$$x_\mathfrak{h} < y_\mathfrak{h} \leqslant 4_\mathfrak{h}^{x_\mathfrak{h}} \wedge (\forall z_\mathfrak{h})(z_\mathfrak{h} \leqslant x_\mathfrak{h} \to f(z_\mathfrak{h}) \neq f(y_\mathfrak{h}))$$

выделяет все такие атомы $f(y_\mathfrak{h})$. После этого из них достаточно взять, например, минимальный, что легко записывается с помощью формулы. ■

Теорема 5. *Свойство* (9) *может быть записано в системе $\mathfrak{L}_\sqsubseteq$ в виде расширенной формулы.*

Доказательство. Записываем формулу из леммы 4 и формулу, означающую согласованность порядков $\leqslant_\mathfrak{h}$ состояния и $\leqslant$ универсума.

Далее, для каждого $x_\mathfrak{h}$ — произвольного элемента $R_\mathfrak{h}$ (кроме $0_\mathfrak{h}$, $1_\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}_\mathfrak{h}$) формула из леммы 6 выделяет уникальный атом $f(y_\mathfrak{h})$. А то, что количество этих атомов нечетно, записать, очевидно, легко: нужно взять множество атомов, содержащее их через один и посмотреть, что в это множество максимальный и минимальный атомы попадут (или не попадут) одновременно. ■

Таким образом, нами доказаны следующие теоремы:

Теорема 6. *В автоматной системе $\mathfrak{L}_\sqsubseteq$ коллапса к порядку нет.*

Доказательство. Следует из теорем 4 и 5. ■

Теорема 7. *Существуют дискретно упорядоченные универсумы с разрешимой теорией, которые увеличивают выразительную силу языка логики предикатов с порядком. Более того, такие универсумы есть среди обогащений арифметики Пресбургера.*

Доказательство. Следует из теоремы 6 и работы [13]. ■

Результат, доказанный нами для системы $\mathfrak{L}_\sqsubseteq$, может быть обобщен на более широкий круг теорий.

Теорема 8. *Пусть в теории T сигнатуры Σ линейный порядок является дискретным и полным и имеются две формулы $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ и $\psi(\bar{x}, \bar{z})$, которые обладают следующими свойствами.*

1. *Длина набора $\bar{x}$ в обеих формулах одинакова.*

2. *Существует определимое в теории T множество H, и для любых $\bar{y}_1 \neq \bar{y}_2$ существует $\bar{x} \in H$, для которого*

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}_1) \not\equiv \phi(\bar{x}, \bar{y}_2).$$

3. *Для любого конечного $K \subseteq H$ и любого $L \subseteq K$ существует $\bar{z}_{KL}$, для которого*
$$(\forall \bar{x} \in K)(\bar{x} \in L \leftrightarrow \psi(\bar{x}, \bar{z}_{KL})).$$

Тогда теория T не обладает свойством коллапса к порядку.

Доказательство. Доказательство является повторением доказательства для теории системы $\mathfrak{L}_{\sqsubseteq}$. Главное отличие: теперь элементы состояния базы данных $\mathfrak{D}_{\mathfrak{h}}$ будут кодироваться в универсуме не отдельными его элементами, а их наборами длины $|\bar{y}|$.

Роль атомов будут выполнять элементы множества H. Благодаря свойству 2 и полному упорядочению, мы для каждого элемента состояния базы данных сможем выделить уникальный атом, а благодаря свойству 3 — определить четность выделенного множества атомов. ∎

7. Обобщения теории $T_{\sqsubseteq}$. Теперь рассмотрим обобщение системы $\mathfrak{L}_{\sqsubseteq}$. В системе $\mathfrak{L}_{\sqsubseteq}$ атомы образуют множество
$$U = \{2^i : i \in \omega\}.$$

Если мы возьмем любое бесконечное подмножество $U^* \subseteq U$, то можем определить отношение $\sqsubseteq^*$:
$$x \sqsubseteq^* y \iff x \sqsubseteq y \wedge x \in U^*.$$

Если существует константа n такая, что для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — подряд идущих атомов U, хотя бы один из них входит в U^*, то такое множество атомов U^* и соответствующее ему отношение $\sqsubseteq^*$ назовем *плотными*, в противном случае — *редкими*.

Теорема 9. *Если отношение $\sqsubseteq^*$ плотно, то в системе $(\omega, 0, 1, \leqslant, +, \sqsubseteq^*)$ коллапса к порядку нет.*

Доказательство. Достаточно показать, что отношение $\sqsubseteq$ в этом случае выражается через $\sqsubseteq^*$. В самом деле,
$$x \sqsubseteq y \iff (x \sqsubseteq^* y) \vee (2x \sqsubseteq^* 2y) \vee (4x \sqsubseteq^* 4y) \vee \cdots \vee (2^n x \sqsubseteq^* 2^n y).$$
∎

Теорема 10. *Если отношение $\sqsubseteq^*$ является редким, то система $(\omega, 0, 1, \leqslant, +, \sqsubseteq^*)$ обладает свойством коллапса к порядку.*

Остаток данного параграфа будет посвящен доказательству теоремы 10 и следствий из нее.

Мы покажем, что система $(\omega, 0, 1, \leqslant, +, \sqsubseteq^*)$ имеет I-сводимые элементарные расширения. Коллапс к порядку в этом случае будет следовать из работы [3]. Также мы с помощью этой системы опровергнем предположение из работы [10].

В силу редкости отношения $\sqsubseteq^*$, для любого $\mathfrak{p} \in \omega$ существует такое $n \in \omega$, что ни одно из чисел $2^{n+1}, 2^{n+1}, \ldots, 2^{n+\mathfrak{p}}$ не принадлежит U^*. Поэтому все числа $k \times 2^n$ для $k = 1, \ldots, 2^{\mathfrak{p}}$ не включают ни одного атома из U^*. Следовательно, выбирая достаточно большие $\mathfrak{p}$, для любой константы $\mathfrak{q}$ мы можем получать сколь угодно большие последовательности чисел вида $\mathfrak{q}^k \times \mathfrak{q}! \times 2^n$, $k = 1, \ldots, K$, не включающие атомов из U^*. Пусть $I_K^{\mathfrak{q}}$ — такая последовательность из K элементов, причем максимальный ее элемент $\mathfrak{q}^K \times \mathfrak{q}! \times 2^n$ не меньше чем в $\mathfrak{q}$ раз меньше ближайшего атома из U^* большего $\mathfrak{q}^K \times \mathfrak{q}! \times 2^n$.

Пусть

$$\mathfrak{L}_{\mathfrak{q}} = (\omega, 0, 1, \leqslant, +, \sqsubseteq^*, \sqsubseteq, I_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{q}}).$$

Рассмотрим $\mathfrak{L}^*$ — ультрапроизведение всех систем $\mathfrak{L}_{\mathfrak{q}}$ по какому-нибудь неглавному ультрафильтру над ω. Пусть

$$\mathfrak{L}^* = (A, 0, 1, \leqslant_{\mathfrak{L}}, +_{\mathfrak{L}}, \sqsubseteq^*{}_{\mathfrak{L}}, \sqsubseteq_{\mathfrak{L}}, J).$$

Элементы множества J обладают следующими свойствами:

1. любая линейная комбинация s элементов J с рациональными коэффициентами делится на все натуральные числа без остатка;

2. для каждых элементов $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in J$ если $\mathsf{x} < \mathsf{y}$, то $\mathfrak{a}x < \mathsf{y}$ для любого натурального $\mathfrak{a}$, то есть J термально изолировано;

3. для любой линейной комбинации s элементов J с рациональными коэффициентами и любого $\mathsf{y} \in A$ выполнено $\neg \mathsf{y} \sqsubseteq^* s$.

4. для любой линейной комбинации s элементов J с рациональными коэффициентами и любого атома $\mathsf{y} \in A$, не превосходящего наибольший элемент U^* меньший J, выполнено $\neg \mathsf{y} \sqsubseteq s$.

Существует

$$(\mathfrak{B}', I') = (B, 0, 1, \leqslant_{\mathfrak{B}}, +_{\mathfrak{B}}, \sqsubseteq^*{}_{\mathfrak{B}}, \sqsubseteq_{\mathfrak{B}}, I')$$

элементарное расширение системы $\mathfrak{L}^*$ и множество $I \subseteq I'$ такие, что множество I является неразличимым и упорядочено по типу действительных чисел, а система $\mathfrak{B}'$ является $|I|^+$-насыщенной. Продемонстрируем, что система

$$(\mathfrak{B}, I) = (B, 0, 1, \leqslant_{\mathfrak{B}}, +_{\mathfrak{B}}, \sqsubseteq^*{}_{\mathfrak{B}}, I)$$

является I-сводимой.

Для удобства введем следующее обозначение: если a — атом, то

$$x \equiv y \pmod{a}$$

означает

$$(\forall z)(z \sqsubseteq z \wedge z < a \to (z \sqsubseteq x \leftrightarrow z \sqsubseteq y)).$$

Если a — обычное натуральное число, то это отношение действительно является сравнением по модулю a.

Прежде всего отметим несколько элементарных свойств системы $(\omega, 0, 1, \leqslant, +, \sqsubseteq^*, \sqsubseteq)$. В силу их элементарности, они будут иметь место и во всех элементарных ее расширениях.

Свойство 1. *Пусть $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{l}$ произвольные натуральные константы, $a \in U$ — атом и $c - b \geqslant 2\mathfrak{k}!\mathfrak{l}a$. Тогда для любого d имеется $e \in [b; c]$ такое, что*

$$\alpha d \equiv \alpha e \pmod{2a}$$

для любого рационального α со знаменателем не больше $\mathfrak{k}$, и $e \equiv d \pmod{\mathfrak{l}}$.

Свойство 2. *Пусть a, b, c — произвольные фиксированные элементы системы, причем b — атом. Пусть k, l — фиксированные натуральные числа. Пусть β_i и γ_i — фиксированные рациональные числа. Пусть m_i — произвольные элементы системы, для которых*

$$(e \sqsubseteq (m_i - 1)) \not\equiv (e \sqsubseteq m_i)$$

для некоторого атома $e \geqslant b$. Пусть r_i — произвольные числа, не превосходящие a. Тогда для суммы

$$s(\bar{m}, \bar{r}) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i m_i + \sum_{i=1}^{l} \gamma_i r_i$$

существуют наборы $\bar{r}^*$ и $\bar{m}^*$, на которых s принимает наименьшее значение не меньшее c. Точно так же существуют наборы $\bar{r}_*$ и $\bar{m}_*$, на которых s принимает наибольшее значение, не превосходящее c.

Выберем произвольную формулу $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ и зафиксируем произвольный набор $\bar{\mathsf{y}} \in |\mathfrak{B}|$. Нам требуется найти набор $\bar{\mathsf{d}} \in I$, длина которого не зависит от $\bar{\mathsf{y}}$, такой, что истинность $\phi(\bar{\mathsf{x}}, \bar{\mathsf{y}})$ при $\bar{\mathsf{x}} \in I$ целиком зависит от расположения элементов $\bar{\mathsf{x}}$ относительно $\bar{\mathsf{d}}$.

Пусть формула ϕ имеет приведенный вид и содержит N кванторов.

Пусть g — наибольший атом $U^*_{\mathfrak{B}}$, меньший всех элементов I, а G — наименьший атом $U^*_{\mathfrak{B}}$, больший всех элементов I. Найдем h — элемент $\mathfrak{B}$, который будет меньше всех элементов I, но больше всех ag для любого $\mathsf{a} \in \omega$. Он существует в силу $|I|^+$-насыщенности системы $\mathfrak{B}$.

Пусть M — множество элементов m системы $\mathfrak{B}$ таких, что для некоторого атома $\mathsf{a} \geqslant \mathsf{G}$ включение $\mathsf{a} \sqsubseteq_{\mathfrak{B}} (\mathsf{m} - 1)$ не эквивалентно $\mathsf{a} \sqsubseteq_{\mathfrak{B}} \mathsf{m}$. Очевидно, что среди последовательности I ни одного элемента m нет. С помощью R будем обозначать множество элементов r системы $\mathfrak{B}$ меньших или равных h.

Лемма 7. *Никакая линейная комбинация элементов $\mathsf{m}_i \in \mathsf{M}$ и $\mathsf{r}_i \in \mathsf{R}$ с рациональными коэффициентами не лежит «внутри» I, то есть между его двумя элементами.*

Доказательство. В самом деле, любая линейная комбинация элементов $\mathsf{m}_i \in \mathsf{M}$ равна 0 или по модулю не меньше чем $\frac{\mathsf{G}}{\mathsf{a}}$ для некоторого натурального a. Если допустить, что $\frac{\mathsf{G}}{\mathsf{a}} < \mathsf{x}$ для некоторого $\mathsf{x} \in I$, то получим, что

$$\mathsf{G} \leqslant \mathsf{a}\frac{\mathsf{G}}{\mathsf{a}} + \mathsf{a} < \mathsf{ax} + \mathsf{a}.$$

Но так как I термально изолировано, то $\mathsf{ax} + \mathsf{a} < \mathsf{x}'$ для любого $\mathsf{x}' \in I$, $\mathsf{x}' > \mathsf{x}$, что противоречит выбору G. Следовательно, любая линейная комбинация элементов m превосходит все элементы I в бесконечное число раз.

Аналогично, любая линейная комбинация элементов $\mathsf{r}_i \in \mathsf{R}$ меньше всех элементов I в бесконечное число раз. В противном случае мы получили бы $\mathsf{ah} > \mathsf{x}$ для некоторого натурального a и $\mathsf{x} \in I$. Но тогда для любого $\mathsf{x}' \in I$, $\mathsf{x}' < \mathsf{x}$ будем иметь

$$\mathsf{x}' < \frac{\mathsf{x}}{\mathsf{a}} \leqslant \frac{\mathsf{ah}}{\mathsf{a}} = \mathsf{h},$$

что противоречит выбору h.

Поэтому сумма линейных комбинаций m_i и r_i не может оказаться «внутри» I. ∎

Так как множество I упорядочено по типу действительных чисел, то для любого элемента a системы $\mathfrak{B}$, лежащего «внутри» I, существует или наибольший элемент I не больше a, или наименьший элемент I не меньше a (но не оба сразу). Этот элемент множества I будем называть *ближайшим* к a.

Лемма 8. *Пусть $\mathsf{s} \in |\mathfrak{B}|$ лежит «внутри» I, и d является ближайшим к s элементом I. Тогда для любого рационального положительного α элемент d будет ближайшим к $\alpha\mathsf{s}$.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\alpha < 1$, ситуация $\alpha > 1$ рассматривается аналогично.

Предположим, что d' — ближайший к $\alpha\mathsf{s}$ элемент I, и $\mathsf{d}' < \mathsf{d}$. Так как порядок на I плотный, то существуют $\mathsf{d}_1, \mathsf{d}_2 \in I$, для которых $\mathsf{d}' < \mathsf{d}_1 < \mathsf{d}_2 < \mathsf{d}$. Тогда $\alpha\mathsf{s} < \mathsf{d}_1$, иначе было бы $\mathsf{d}' < \mathsf{d}_1 \leqslant \alpha\mathsf{s}$, и d' — не ближайший к $\alpha\mathsf{s}$ элемент. Следовательно,

$$\mathsf{s} = \frac{1}{\alpha}\alpha\mathsf{s} < \frac{1}{\alpha}\mathsf{d}_1 < \mathsf{d}_2 < \mathsf{d}.$$

Следовательно, d не может быть ближайшим к s элементом I. Противоречие. ∎

Лемма 9. *Для фиксированных $\mathsf{z}_1, \ldots, \mathsf{z}_n$ для любой суммы вида*

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \mathsf{z}_i + \sum \beta_i \mathsf{m}_i + \sum \alpha_i \mathsf{r}_i. \tag{11}$$

с произвольными рациональными коэффициентами $\delta_i, \beta_i, \alpha_i$ и произвольными $\mathsf{m}_i \in \mathsf{M}$ и $\mathsf{r}_i \in \mathsf{R}$ существует не более n элементов множества I, которые являются ближайшими к каким-либо суммам вида (11).

Доказательство. Индукцией по n покажем, что для каждого n_0 существует не более одного элемента $\mathsf{d} \in I$, который является ближайшим к некоторой сумме вида (11) при $n = n_0$ и не является ближайшим ни к какой сумме (11) при $n < n_0$.

Если $n = 0$, то сумма (11) имеет вид

$$\sum \beta_i \mathsf{m}_i + \sum \alpha_i \mathsf{r}_i.$$

Но такая сумма не может лежать «внутри» I, согласно лемме 7. Следовательно, ближайших к ним элементов I не существует

Пусть для $n = 1, \ldots, n_0 - 1$ построены элементы $\mathsf{d}_1, \ldots, \mathsf{d}_{n_0-1} \in I$, и это — все элементы I, которые можно получить для $n = 1, \ldots, n_0 - 1$. Рассмотрим две суммы

$$S = \sum_{i \leqslant n_0} \delta_i \mathsf{z}_i + \sum \beta_i \mathsf{m}_i + \sum \alpha_i \mathsf{r}_i$$

и

$$S' = \sum_{i \leqslant n_0} \delta'_i \mathsf{z}_i + \sum \beta'_i \mathsf{m}'_i + \sum \alpha'_i \mathsf{r}'_i.$$

Предположим, что значение обеих из них лежит «внутри» I, и ближайшие к ним элементы множества I различны: d и d' соответственно. Предположим, что ни один из не встречается среди $\mathsf{d}_1, \ldots, \mathsf{d}_{n_0-1}$, и, для определенности, что $\mathsf{d} > \mathsf{d}'$. Так как $\delta'_{n_0} \neq 0$, то, умножив вторую сумму на $\frac{\delta_{n_0}}{\delta'_{n_0}}$ и вычитая результат из первой суммы, получим сумму

$$S - \frac{\delta_{n_0}}{\delta'_{n_0}} S' = \sum_{i \leqslant n_0-1} \delta''_i \mathsf{z}_i + \sum \beta''_i \mathsf{m}''_i + \sum \alpha''_i \mathsf{r}''_i.$$

Заметим, что, согласно лемме 8, d' — ближайший к $\frac{\delta_{n_0}}{\delta'_{n_0}} S'$ элемент I. Поэтому, если $\mathsf{d}'', \mathsf{d}''' \in I$, $\mathsf{d}' < \mathsf{d}'' < \mathsf{d}''' < S$, то

$$\frac{\delta_{n_0}}{\delta'_{n_0}} S' < \mathsf{d}'' < \frac{\mathsf{d}'''}{\mathfrak{a}} < \frac{S}{\mathfrak{a}}$$

для любой константы $\mathfrak{a}$ в силу термальной разделенности I. Поэтому получаем неравенство

$$\frac{\mathfrak{a}-1}{\mathfrak{a}} S < S - \frac{\delta_{n_0}}{\delta'_{n_0}} S' < \frac{\mathfrak{a}+1}{\mathfrak{a}} S.$$

Согласно лемме 8, d является ближайшим элементом I к крайним частям неравенства. Но тогда d является ближайшим и к его середине. Это противоречит тому, что d не встречается среди $\mathsf{d}_1, \ldots, \mathsf{d}_{n_0-1}$. ∎

Построим последовательность наборов $\bar{\mathsf{d}}^1, \bar{\mathsf{d}}^2, \ldots, \bar{\mathsf{d}}^{2^{N+2}}$ из I следующим образом. Если какая-то линейная комбинация элементов $\bar{\mathsf{y}}$, $\mathsf{m}_i \in \mathsf{M}$ и $\mathsf{r}_i \in \mathsf{R}$ с рациональными коэффициентами лежит «внутри» I, то включаем в набор $\bar{\mathsf{d}}^1$ ближайший к ней элемент I. Длина $\bar{\mathsf{d}}^1$, таким образом, не превосходит $|\bar{y}|$. Набором $\bar{\mathsf{d}}^2$ будут ближайшие элементы I для линейных комбинаций $\bar{\mathsf{y}}$, $\bar{\mathsf{d}}^1$, $\mathsf{m}_i \in \mathsf{M}$ и $\mathsf{r} \in \mathsf{R}$. Длина $\bar{\mathsf{d}}^2$ не превосходит $2|\bar{y}|$. Набором $\bar{\mathsf{d}}^3$ будут ближайшие элементы I к линейным комбинациям $\bar{\mathsf{y}}$, $\bar{\mathsf{d}}^1$, $\bar{\mathsf{d}}^2$, $\mathsf{m}_i \in \mathsf{M}$ и $\mathsf{r}_i \in \mathsf{R}$ и т.д., пока не построим все 2^{N+2} наборов. Набор $\bar{\mathsf{d}}$ будет содержать все элементы наборов $\bar{\mathsf{d}}^1, \bar{\mathsf{d}}^2, \ldots, \bar{\mathsf{d}}^{2^{N+2}}$. Длина $\bar{\mathsf{d}}$, таким образом, не превосходит

$$\sum_{i=1}^{2^{N+2}} 2^i |\bar{y}|,$$

то есть не зависит от конкретных $\bar{\mathsf{y}}$.

Теперь наша задача — доказать, что при $\bar{\mathsf{x}} \in I$ истинность формулы $\phi(\bar{\mathsf{x}}, \bar{\mathsf{y}})$ определяется исключительно положением $\bar{\mathsf{x}}$ относительно $\bar{\mathsf{d}}$. Рассмотрим два набора $\bar{\mathsf{x}}^1$ и $\bar{\mathsf{x}}^2$, которые лежат в I и имеют одинаковый порядковый тип над $\bar{\mathsf{d}}$. Покажем, что в игре Эренфойхта с N ходами для систем $(\mathfrak{B}, \bar{\mathsf{x}}^1, \bar{\mathsf{y}})$ и $(\mathfrak{B}, \bar{\mathsf{x}}^2, \bar{\mathsf{y}})$ повторитель имеет выигрышную стратегию. Это докажет, что системы не различаются никакой приведенной формулой с N кванторами, в частности, формулой ϕ.

Определим f — частичное отображение $\mathfrak{B}$ в себя, для которого будут выполняться следующие условия:

- f сохраняет порядок;
- $f(\mathsf{m}) = \mathsf{m}$ для любого $\mathsf{m} \in \mathsf{M}$;

- $f(\mathsf{r}) = \mathsf{r}$ для любого $\mathsf{r} \in \mathsf{R}$;
- $f(\bar{\mathsf{y}}) = \bar{\mathsf{y}}$;
- $f(\bar{\mathsf{d}}) = \bar{\mathsf{d}}$;
- $f(\bar{\mathsf{x}}^1) = \bar{\mathsf{x}}^2$;
- образ I есть I;
- для всех остальных аргументов f не определено.

Очевидно, что такое отображение существует, так как I упорядочено по типу действительных чисел, и наборы $\bar{\mathsf{x}}^1$ и $\bar{\mathsf{x}}^2$ одинаково расположены относительно $\bar{\mathsf{d}}$.

Лемма 10. *Отображение f сохраняет все линейные неравенства с рациональными коэффициентами, в которых количество слагаемых не превосходит 2^{N+2}.*

Доказательство. Допустим, что это не так, и существует неравенство

$$\gamma + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathsf{x}_i + \sum \beta_i \mathsf{z}_i \geqslant 0,$$

которое при отображении f перестает выполнятся. Здесь с помощью букв z обозначены какие-то элементы не из I, а с помощью x — из I. Отметим, что для любых $\mathsf{z} \notin I$, $\mathsf{z} \in \operatorname{dom} f$ выполнено $f(\mathsf{z}) = \mathsf{z}$.

Без ограничения общности можно считать, что

$$\mathsf{x}_1 > \mathsf{x}_2 > \cdots > \mathsf{x}_k,$$

причем $k \leqslant 2^{N+2}$. Имеем

$$\gamma + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(\mathsf{x}_i) + \sum \beta_i \mathsf{z}_i < 0.$$

Получаем, что

$$-\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathsf{x}_i \leqslant \gamma + \sum \beta_i \mathsf{z}_i < -\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(\mathsf{x}_i).$$

Заметим, что крайние элементы этого неравенства должны иметь один и тот же знак, так как их знак определяется исключительно знаком коэффициента при x_1. Это следует из термальной разделенности множества I. Без ограничения общности считаем, что все элементы этого неравенства положительны, иначе можно аналогичным образом рассмотреть противоположное неравенство для противоположных сумм. Отсюда делаем вывод, что значение

$$\gamma + \sum \beta_i \mathsf{z}_i$$

лежит «внутри» I, и существует ближайший к нему элемент d_{i_1}, который входит в набор $\bar{\mathsf{d}}^1$. Докажем, что $\mathsf{x}_1 = \mathsf{d}_{i_1}$.

Предположим, что $\mathsf{x}_1 \neq \mathsf{d}_{i_1}$. Возможно два случая: $\mathsf{x}_1 < \mathsf{d}_{i_1}$ или $\mathsf{x}_1 > \mathsf{d}_{i_1}$. Рассмотрим первый из них, второй рассматривается точно так же.

Так как $\mathsf{x}_1 \in I$, d_{i_1} входит в набор $\bar{\mathsf{d}}$, и отображение f не меняет положения элементов I относительно $\bar{\mathsf{d}}$, то $f(\mathsf{x}_1) < \mathsf{d}_{i_1}$. Поскольку порядок на I плотный, то между $f(\mathsf{x}_1)$ и d_{i_1} существует бесконечно много элементов I. Пусть e — один из них. В силу термальной разделенности I будем иметь

$$\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| f(\mathsf{x}_i) < \mathsf{e} < \mathsf{d}_{i_1}.$$

Получаем

$$\gamma + \sum \beta_i \mathsf{z}_i < -\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(\mathsf{x}_i) \leqslant \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| f(\mathsf{x}_i) < \mathsf{e} < \mathsf{d}_{i_1}.$$

Но из последнего следует, что d_{i_1} не может быть ближайшим к

$$\gamma + \sum \beta_i \mathsf{z}_i$$

элементом I.

Следовательно, $\mathsf{x}_1 = f(\mathsf{x}_1) = \mathsf{d}_{i_1}$. Повторив те же самые рассуждения для суммы

$$\gamma + \sum \beta_i \mathsf{z}_i + \alpha_1 \mathsf{d}_{i_1},$$

мы установим, что $\mathsf{x}_2 = \mathsf{d}_{i_2}$, который принадлежит набору $\bar{\mathsf{d}}^2$ и т.д. Таким образом, получим, что все элементы x являются элементами набора $\bar{\mathsf{d}}$, при отображении f они не меняются, что противоречит тому, что неравенство меняет знак.

∎

Лемма 11. *Для любой линейной комбинации s элементов из $\operatorname{dom} f$ с рациональными коэффициентами выполняется*

$$s \equiv f(s) \pmod{2\mathsf{g}}.$$

Доказательство. Для элементов не из I это выполняется, так как f оставляет элементы неподвижными. Для элементов I — в силу построения I. ∎

Полагаем, $f_0 = f$. Пусть сделано i ходов игры, в результате чего получено отображение f_i — продолжение f на некоторые элементы $\mathsf{a}_0, \ldots, \mathsf{a}_{i-1}$ системы $\mathfrak{B}$. По индукционному предположению считаем, что f_i сохраняет линейные неравенства для элементов $\operatorname{dom} f_i$ с не более чем 2^{N-i+2} элементами. Кроме того, считаем, что для любой линейной комбинации s элементов из $\operatorname{dom} f_i$ выполнено

$$s \equiv f_i(s) \pmod{2\mathsf{g}}$$

и выполнено

$$\mathsf{a}_i \equiv f(\mathsf{a}_i) \pmod{\mathfrak{l}}$$

для любого натурального $\mathfrak{l}$.

Пусть $i+1$-м ходом разрушитель выбирает некоторый элемент a_i, который еще не входит в $\operatorname{dom} f_i$. Рассмотрим всевозможные неравенства для a_i вида

$$q \leqslant \mathsf{a}_i \leqslant t,$$

где q и t — линейные комбинации не более чем $2^{N-i+1}-1$ элементов $\operatorname{dom} f_i$.

Найдем элемент b_i, который будет удовлетворять:

A) всем неравенствам вида $f_i(q) \leqslant \mathsf{b}_i \leqslant f_i(t)$;

B) условиям
$$\delta\mathsf{a}_i \equiv \delta\mathsf{b}_i \pmod{2\mathsf{g}}$$
для любого рационального δ;

C) условиям $\mathsf{a}_i \equiv \mathsf{b}_i \pmod{\mathfrak{l}}$ для любого натурального $\mathfrak{l}$.

Включим пару $(\mathsf{a}_i, \mathsf{b}_i)$ в f_{i+1}.

Лемма 12. *Элемент b_i, удовлетворяющий всем этим условиям, существует.*

Доказательство. Чтобы показать, что такой b_i действительно существует посмотрим, как устроены ограничивающие суммы.

Пусть
$$q = \gamma + \sum_i \alpha_i \mathsf{z}_i + \sum_i \beta_i \mathsf{m}_i + \sum_i \gamma_i \mathsf{r}_i,$$

где $\mathsf{m}_i \in \mathsf{M}$, $\mathsf{r}_i \in \mathsf{R}$, а z_i — элементы $\operatorname{dom} f_i$ не из $\mathsf{M} \cup \mathsf{R}$. Согласно свойству 2 существуют наборы $\bar{\mathsf{r}}_* \in \mathsf{R}$ и $\bar{\mathsf{m}}_* \in \mathsf{M}$, на которых сумма

$$\sum_i \beta_i \mathsf{m}_i + \sum_i \gamma_i \mathsf{r}_i$$

принимает наибольшее значение, не превосходящее

$$\mathsf{a}_i - (\gamma + \sum_i \alpha_i \mathsf{z}_i).$$

Таким образом, количество различных q определяется количеством всевозможных сумм вида
$$\gamma + \sum_i \alpha_i \mathsf{z}_i.$$

Но их — континуально много, так как континуально много различных z_i, а рациональных коэффициентов — счетно много. Точно также получаем, что количество различных t тоже можно считать континуально большим. Итак, мы имеем континуальную, конечно совместную систему неравенств A)

$$f_i(q) \leqslant \mathsf{b}_i \leqslant f_i(t).$$

Система конечно совместна, так как противное означало бы, что

$$f_i(q) > f_i(t)$$

и $q \leqslant t$. Данное неравенство содержит меньше 2^{N-i+2} слагаемых, что противоречит тому, что f_i сохраняет такие неравенства.

Теперь, если для всех q и t выполняется $q + \mathsf{h} \leqslant t$, то $f_i(q) + \mathsf{h} \leqslant f_i(t)$. Заметим, что $f_i(t) - f_i(q) > 2\mathfrak{k}!\mathfrak{l}\mathsf{g}$ для любых $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{l}$. Тогда, согласно свойству 1, между $f_i(q)$ и $f_i(t)$ имеется элемент, удовлетворяющий любому конечному множеству условий Б) и В).

В этом случае система условий конечно совместна и содержит континуально много элементов. Но наша система $\mathfrak{B}$ является $|I|^+$-насыщенной, поэтому данное множество формул реализуется на некотором элементе b_i.

Если же для некоторых q и t выполнено $q+\mathsf{h} > t$, то $t-q = \mathsf{r}$ для некоторого $\mathsf{r} \in \mathsf{R}$. Данное равенство эквивалентно паре неравенств, каждое из которых содержит не более $2^{N-i+2}-1$ слагаемых. Следовательно, $f_i(t) = f_i(q)+\mathsf{r}$. Поэтому в качестве b_i годится $f_i(q) + (\mathsf{a}_i - q)$. ∎

Рассмотрим f_N — конец игры. Согласно построению, f_N сохраняет все неравенства с $2^2 = 4$ слагаемыми. В частности, сохраняются все неравенства (а потому и равенства) видов $u + v \leqslant w$ и $u + v \geqslant w$. Все неравенства выполняются или не выполняются в обеих системах одновременно, поэтому нужно только доказать, что одновременно выполняются или не выполняются включения $\mathsf{a}_i \sqsubseteq^* \mathsf{a}_j$. Предположим, например, что $\mathsf{a}_i \sqsubseteq^* \mathsf{a}_j$ выполняется в первой системе.

Первый случай — a_i больше всех элементов множества I. Тогда для a_j существует $\mathsf{m}' \in \mathsf{M}$ — наибольший из $\mathsf{m} \leqslant \mathsf{a}_j$ такой, что $\mathsf{a}_i \not\sqsubseteq \mathsf{m}' - 1$. Точно так же существует $\mathsf{m}'' \in \mathsf{M}$ — наименьший из $\mathsf{m} > \mathsf{a}_j$ такой, что $\mathsf{a}_i \not\sqsubseteq \mathsf{m}''$. Для любого $\mathsf{z} \in [\mathsf{m}'; \mathsf{m}'')$ выполнено $\mathsf{a}_i \sqsubseteq^* \mathsf{z}$. Имеем $\mathsf{m}', \mathsf{m}'', \mathsf{a}_j \in \operatorname{dom} f_N$. Но f_N сохраняет неравенства, поэтому $f_N(\mathsf{a}_j) \in [\mathsf{m}'; \mathsf{m}'')$ и $\mathsf{a}_i \sqsubseteq^* f_N(\mathsf{a}_j)$. Далее, очевидно, $\mathsf{a}_i = \mathsf{m}'' - \mathsf{m}'$, поэтому $f_N(\mathsf{a}_i) = \mathsf{m}'' - \mathsf{m}' = \mathsf{a}_i$. Получаем $f_N(\mathsf{a}_i) \sqsubseteq^* f_N(\mathsf{a}_j)$.

Если a_i меньше всех элементов I, то $\mathsf{a}_i \in \mathsf{R}$ и $\mathsf{a}_i = f_N(\mathsf{a}_i)$. Но f_N сохраняет все разряды, не превосходящие g, в частности, a_i.

Теорема 10, таким образом, доказана.

Заметим, что хотя теория систем $(\omega, 0, 1, \leqslant, +, \sqsubseteq^*)$ сводима и обладает свойством коллапса к порядку, но в ней не существует никакого бесконечного множества, на котором не было бы независимой формулы, тем более, определимого.

Теорема 11. *В системе* $(\omega, 0, 1, \leqslant, +, \sqsubseteq^*)$ *на каждом бесконечном множестве есть независимая формула.*

Доказательство. Пусть I — произвольное бесконечное в $(\omega, 0, 1, \leqslant, +, \sqsubseteq^*)$ множество. Пусть $f(\mathsf{x})$ — наименьший элемент, больший или равный x, для которого выполнено $f(\mathsf{x}) \sqsubseteq^* f(\mathsf{x})$. Ясно, что f — определимая в системе $(\omega, 0, 1, \leqslant, +, \sqsubseteq^*)$ функция. Выберем в множестве I бесконечное подмножество $J = \{\mathsf{a}_0, \mathsf{a}_1, \dots\}$ следующим образом: a_0 — наименьший элемент I, а a_{i+1} — наименьший элемент I, больший $f(\mathsf{a}_i)$. Тогда, очевидно, формула $f(x) \sqsubseteq^* y$ способна выделить из J любое конечное подмножество. ∎

Теоремы 10 и 11 опровергают гипотезу из [10], которая утверждает, что для коллапса к порядку необходимо, чтобы существовало определимое бесконечное множество, на котором не было бы независимой формулы.

Заключение. Мы опровергли по два предположения из работ [11] и [9]. Однако, мы видим, что построенная нами формула содержит многоместные отношения базы данных, и это существенно используется в доказательствах. Поэтому представляет интерес исследование выразительной силы языка первого порядка в системе $\mathfrak{L}_{\sqsubseteq}$, когда сигнатура базы данных содержит лишь одноместные предикатные символы, в частности, один одноместный предикат. Как известно, такое ограничение может играть решающую роль в некоторых случаях.

Вопрос 1. *Существуют ли разрешимые обогащения арифметики Пресбургера, в которых возможно выразить четность количества элементов любого конечного множества?*

Еще один интересующий нас вопрос заключается в следующем.

Вопрос 2. *Существуют ли разрешимые расширения семеновских обогащений арифметики Пресбургера, в которых нет коллапса к порядку? В частности, существуют ли такие расширения для системы* $(\omega, 0, 1, <, +, 2^x)$*?*

Как известно (см. [2]), в самих семеновских обогащениях коллапс к порядку имеется. С другой стороны, одновременное обогащение арифметики Пресбургера экспонентой 2^x и отношением $\sqsubseteq$ приводит к неразрешимой теории, эквивалентной элементарной арифметике.

Мы опровергли гипотезу из [10]. Остается открытым вопрос:

Вопрос 3. *Существуют ли несводимые теории, обладающие свойством коллапса к порядку?*

Благодарности. Мы хотим выразить благодарность профессору Михаилу Абрамовичу Тайцлину за обсуждение статьи и ценные советы и Алексею Сняткову за внимательное ознакомление с первой частью настоящей статьи и указанные неточности.

Список литературы

[1] Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. — М.: Мир, 1994.

[2] Дудаков С.М. Трансляционный результат для расширений арифметики Пресбургера одноместной функцией, согласованной со сложением. // Матем.заметки, том 76, №3, 2004. С.362–371.

[3] Дудаков С.М. Трансляционная теорема для теорий I-сводимых алгебраических систем. // Изв. РАН. Серия матем., том 68, №5, 2004. С.67–90.

[4] Дудаков С.М. Разрешимая теория без трансляционной теоремы. // Вестник Тверского государственного университета, серия «Прикладная математика», № 6(12). — Тверь: Тверской государственный университет, 2005. С.23–26.

[5] Дудаков С.М., Тайцлин М.А. Трансляционные результаты для языков запросов в теории баз данных. // Успехи математических наук, №61:2(368), 2006. С.2–65.

[6] Кейслер Г., Чен Ч.Ч. Теория моделей. — М.: Мир, 1997.

[7] Семенов А.Л. О некоторых расширениях арифметики сложения натуральных чисел. // Изв. АН СССР, серия матем., том 43, № 5, 1979. С.1175–1195.

[8] Семенов А.Л. Логические теории одноместных функций на натуральном ряде. // Изв. АН СССР, том 47, №3, 1983. С.623–658.

[9] Тайцлин М.А. Трансляционные результаты в теории баз данных. // Сложные системы: обработка информации, моделирование и оптимизация, Тверь, 2002. С.5–23.

[10] Baldwin J., Benedikt M. Stability theory, permutations of indiscernibles, and embedded finite models. // Trans. Amer. Math. Soc., V.352(11), 2000. P.4937–4969.

[11] Belegradek O.V., Stolboushkin A.P., Taitslin M.A. Extended order-generic queries. // Annals of Pure and Applied Logic, V.97(1–3), 1999. P.85–125.

[12] Benedikt M., Dong G., Libkin L., Wong L. Relational expressive power of constraint query languages. // Proc. 15th ACM Symp. on Principles of Database Systems, 1996. P.5–16.

[13] Blumensath A., Graedel E. Automatic structures. // Proc. 15th IEEE Symp. on Logic in Computer Science, 2000. P.51–62.

[14] Codd E.F. A relational model for large shared data banks. // Communications of the ACM, V.13, 1970. P.377–387.

[15] Codd E.F. Relational completeness of data base sublanguages. // Database Systems (ed. Rustin R.), Prentice-Hall, 1972. P.33–64.