

**АСИМПТОТИЧЕСКИ-ПЛОСКИЕ РЕШЕНИЯ  
УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ ГРАВИТИРУЮЩЕГО  
СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ**

**Никонов В.В., Цирулев А.Н., Чемарина Ю.В.**

Кафедра математических методов современного естествознания

Развит новый метод исследования связанной системы уравнений Эйнштейна и динамического уравнения для гравитирующего нейтрального скалярного поля со сферической симметрией, моделирующего частицу темной материи. Получена полная классификация асимптотически-плоских решений для безмассовых скалярных полей и точное частицеподобное решение с горизонтом событий для поля с модельным потенциалом. Получены квадратурные формулы, дающие формальное решение обратной задачи.

The new method of investigation of the coupled system of the Einstein equations and dynamic equation for the gravitating neutral scalar field with spherical symmetry, modelled the dark matter particle, is developed. Total classification to asymptotically flat solutions for massless scalar fields and an exact particle-like solution for the field with a model potential are obtained. The quadrature formulae given formal solution to the inverse problem are obtained.

**Ключевые слова:** скалярное поле, точные решения, обратная задача.  
**Keywords:** scalar field, exact solutions, inverse problem.

**Введение.** Гравитирующие скалярные поля в настоящее время рассматриваются как основа для описания новой формы материи небарионного типа – холодной темной материи [1, 2, 3], существование которой надежно подтверждено астрономическими наблюдениями последних десяти лет. Ограничения сверху на интенсивность взаимодействия массивных частиц темной материи с известными частицами, полученные из наблюдений и прямых экспериментов по измерению ее годовой модуляции, показывают, что наиболее адекватно темная материя моделируется нейтральным (вещественным) скалярным полем, которое участвует только в гравитационном взаимодействии с минимальной связью. С математической точки зрения задача заключается в поиске частицеподобных решений связанной системы уравнений Эйнштейна и динамического уравнения для скалярного поля со сферической симметрией при дополнительных асимптотических условиях для метрических функций. Полное действие для такой системы можно записать в виде

$$\Sigma = \int \left( -\frac{1}{2}S + \mathcal{L}_\phi \right) \sqrt{|g|} d^4x, \quad \mathcal{L}_\phi = \varepsilon \langle d\phi, d\phi \rangle - V(\phi), \quad (1)$$

где используется геометрическая система единиц ( $G = 1, c = 1$ ), скобки  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначают скалярное произведение относительно метрики,  $S$  – скалярная кривизна,

$V(\phi)$  - потенциал самодействия. Параметр  $\varepsilon = \pm 1$  унифицирует действие для математических моделей с положительным и отрицательным кинетическим членом [4, 5].

К частицеподобным решениям уравнений Эйнштейна для скалярного поля относятся черные дыры и решения с нетривиальной топологией пространственно-временного многообразия, поскольку в других случаях они содержат голую сингулярность [6]. К настоящему времени известны лишь отдельные частицеподобные решения; в частности, в предыдущей работе авторов [7] численными методами получено топологически нетривиальное решение с физически выделенным потенциалом. Для безмассового скалярного поля, когда  $V = 0$ , уравнения существенно упрощаются и найдены семейства точных асимптотически-плоских решений [8, 9, 10, 11], однако даже в этом случае полный анализ проблемы отсутствует.

Целью данной работы является исследование математических моделей сферически-симметричных частицеподобных конфигураций гравитирующего нейтрального скалярного поля, согласованных с действием (1). Мы развиваем принципиально новый подход, основанный на выделении из полной системы двух независимых уравнений, инвариантных относительно выбора калибровочных условий. Эти уравнения определяют характер решения и позволяют выделить семейства решений для черных дыр, топологических ручек и частицеподобных конфигураций с единственно возможной (в сферически-симметричном случае) топологией пространства-времени  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \# \mathbb{R}P^3$ . Такой подход позволяет провести полную классификацию решений с безмассовым полем, получить квадратурные формулы для исследования нелинейной обратной задачи и найти отдельные точные решения для полей с потенциалом.

**1. Редукция системы уравнений и постановка задачи.** Нестационарную систему уравнений Эйнштейна для действия (1) с тензором энергии-импульса

$$T = 2\varepsilon d\phi \otimes d\phi - (\varepsilon \langle d\phi, d\phi \rangle - V) g$$

и метрикой сферически-симметричного пространства-времени

$$g = A^2 dt \otimes dt - B^2 dr \otimes dr - C^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi), \quad (2)$$

удобно записать, следуя работам [12, 13], в ортонормированном базисе векторных полей

$$e_0 = \frac{1}{A} \partial_t, \quad e_1 = \frac{1}{B} \partial_r, \quad e_2 = \frac{1}{C} \partial_\theta, \quad e_3 = \frac{1}{C \sin \theta} \partial_\varphi,$$

и дуальном базисе 1-форм

$$e^0 = A dt, \quad e^1 = B dr, \quad e^2 = C d\theta, \quad e^3 = C \sin \theta d\varphi,$$

где метрические функции  $A, B, C$  и поле  $\phi$  зависят только от переменных  $r$  и  $t$ .

В нашем случае полная система уравнений и уравнения поля  $\square\phi + (\varepsilon/2)V'_\phi = 0$  содержит только четыре независимых уравнения

$$-2 \frac{C_{(1)(1)}}{C} + 2 \frac{B_{(0)}C_{(0)}}{BC} - \frac{C_{(1)}^2 - C_{(0)}^2 - 1}{C^2} = \varepsilon(\phi_{(1)}^2 + \phi_{(0)}^2) + V, \quad (3)$$

$$-2 \frac{C_{(0)(0)}}{C} + 2 \frac{A_{(1)}C_{(1)}}{AC} + \frac{C_{(1)}^2 - C_{(0)}^2 - 1}{C^2} = \varepsilon(\phi_{(1)}^2 + \phi_{(0)}^2) - V, \quad (4)$$

$$-2\frac{C_{(0)(1)}}{C} + 2\frac{B_{(0)}C_{(1)}}{BC} \equiv -2\frac{C_{(1)(0)}}{C} + 2\frac{A_{(1)}C_{(0)}}{AC} = 2\varepsilon\phi_{(0)}\phi_{(1)}, \quad (5)$$

$$\phi_{(0)(0)} - \phi_{(1)(1)} + \phi_{(0)}\frac{(BC^2)_{(0)}}{BC^2} - \phi_{(1)}\frac{(AC^2)_{(1)}}{AC^2} + \frac{\varepsilon}{2}V'_\phi = 0, \quad (6)$$

где, как обычно, индекс в круглых скобках означает производную по направлению соответствующего базисного поля, например,  $\phi_{(1)} \equiv e_1\phi = (1/B)\partial_r\phi$ . Два оставшихся нетривиальных уравнения Эйнштейна совпадают и являются следствием уравнений (3) – (5) в силу тождества Бианки и консервативности тензора энергии-импульса.

В асимптотической области пространство-время является слоением подмногообразий с топологией  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ , естественным образом параметризованных значением функции  $C$ , которое определяет метрические свойства на соответствующем подмногообразии независимо от выбора калибровочных условий. Черные дыры и частицеподобные конфигурации без горизонта событий соответствуют, вообще говоря, стационарным решениям, для которых метрические функции  $A$ ,  $B$  и поле  $\phi$  являются функциями от  $C = C(t, r)$ , но вне горизонта (для черных дыр) или вне топологической особенности (для топологической ручки или пространства-времени с топологией  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \# \mathbb{RP}^3$ ) метрическая функция  $C$  может быть выбрана в качестве радиальной координаты и решение в этой области является статическим. Поэтому функция  $f = -\langle dC, dC \rangle \equiv C_{(1)}^2 - C_{(0)}^2$  для стационарных решений также зависит только от  $C$ . Для исследования асимптотически-плоских сферически-симметричных частицеподобных конфигураций гравитирующих полей различных типов, в том числе полей Янга-Миллса, мы выделяем уравнения для функции  $f$  и полевых функций (в нашем случае  $\phi$ ) из полной системы уравнений. Прежде всего отметим, что при любой калибровке производные функций  $A$ ,  $B$ ,  $\phi$  и  $f$  вдоль базисных полей  $e_0, e_1$ , выражаются через производные от функции  $C$ ; в частности,

$$\phi_{(0)} = \phi'_C C_{(0)}, \quad \phi_{(1)} = \phi'_C C_{(1)}, \quad f_{(0)} = f'_C C_{(0)}, \quad f_{(1)} = f'_C C_{(1)}, \quad (7)$$

поэтому уравнение (6) можно записать в виде

$$\phi''_C (C_{(0)}^2 - C_{(1)}^2) + \phi'_C \left( C_{(0)(0)} - C_{(1)(1)} + C_{(0)}\frac{(BC^2)_{(0)}}{BC^2} - C_{(1)}\frac{(AC^2)_{(1)}}{AC^2} \right) + \frac{\varepsilon}{2}V'_\phi = 0, \quad (8)$$

Подставим выражения для  $B_{(0)}/B$  и  $A_{(1)}/A$  из (5) в уравнения (3) и (4), и умножим полученные уравнения на  $C^2C_1$  и  $C^2C_0$  соответственно. После перехода к производным по  $C$  согласно (7), мы приходим к уравнению для  $f$  и  $\phi$ , как функций от переменной  $C$ . Далее, разность уравнений (3) и (4) дает равенство

$$C_{(0)(0)} - C_{(1)(1)} + C_{(0)}\frac{(BC^2)_{(0)}}{BC^2} - C_{(1)}\frac{(AC^2)_{(1)}}{AC^2} = \frac{C_{(1)}^2 - C_{(0)}^2 - 1}{C^2} + CV,$$

поэтому уравнение (8) для поля также можно переписать в терминах только  $f$  и  $\phi$ .

Уравнения, определяющие характер решения, выделенные указанным способом из полной системы (4) – (6), имеют вид

$$Cf'_C + \left(1 + C^2\phi'^2\right)f - 1 + C^2V = 0, \quad (9)$$

$$f\phi_c'' + \frac{1}{C}\phi_c'(1+f-C^2V) - \frac{\varepsilon}{2}V_\phi' = 0. \quad (10)$$

Математическая модель массивной частицы холодной темной материи должна удовлетворять естественному требованию: частица проявляет себя только посредством ее гравитационного поля, которое в ньютоновском пределе, т. е. при достаточно больших значениях  $C$ , совпадает с гравитационным полем частицы обычного вещества. Другими словами, асимптотика метрики должна быть шварцшильдовой, а несложный анализ уравнений показывает, что это возможно только при условии аналитичности  $\phi$  на бесконечности. Поэтому, мы заранее исключаем иную асимптотику, например,  $\phi \sim \exp(-kC)/C$ ,  $C \rightarrow \infty$ , которая соответствует сингулярным плоским решениям уравнения Клейна-Гордона-Фока.

Таким образом, наиболее общая постановка задачи для подсистемы (9), (10) содержит лишь асимптотические условия

$$f = 1 - \frac{2m}{C} + O\left(\frac{1}{C^2}\right), \quad \phi = \phi(\infty) + \frac{p}{C} + O\left(\frac{1}{C^2}\right), \quad V = O\left(\frac{1}{C^4}\right), \quad C \rightarrow \infty, \quad (11)$$

где  $m, \phi(\infty)$  – вещественные постоянные, а условие для  $V$  получено посредством прямой подстановки первых двух условий в уравнения.

Следующим шагом после решения задачи (9), (10), (11) является разделение всех решений на четыре семейства, описывающих, соответственно, черные дыры, пространственно-временные многообразия с топологической особенностью, регулярные частицеподобные конфигурации и голые сингулярности, не имеющие, как принято считать, физического смысла. Равенство  $f = 0$  может достигаться или на горизонте событий, где 1-форма  $dC = C_{(0)}e^0 + C_{(1)}e^1$  изотропна,  $dC$  и  $f'_C$  не равны нулю, или на топологической особенности, где  $dC = 0$ . В последнем случае  $f = 0$  или в точках горловины топологической ручки, или – для частицеподобных решений – на подмногообразии с топологией  $\mathbb{R} \times \mathbb{RP}^2$  [6]. Если  $f > 0$  для всех  $C > 0$ , то мы имеем либо регулярное решение ( $f(0) = 1, \phi'_C(0) = 0$ ) на  $\mathbb{R}^4$ , либо голую сингулярность ( $f \rightarrow \infty$  при  $C \rightarrow 0$ ).

Далее, для полного определения метрики и поля, необходимо выбрать калибровку, найти решение  $C(t, r)$  уравнения

$$C_{(1)}^2 - C_{(0)}^2 = f(C), \quad (12)$$

а также решить уравнение (5). Исключением является выбор статической калибровки, когда  $C$  выбирается в качестве радиальной координаты,  $C_{(0)} \equiv 0$  и уравнение (5) выполняется тождественно. В этом случае необходимо решать уравнение (4), которое становится независимым.

Нетрудно проверить, в основном посредством рассуждений в обратном порядке, что система уравнений (9), (10), (12) и (5) (или (4) – в статической калибровке) для *стационарных* решений эквивалентна исходной системе (3) – (6).

**2. Статическая калибровка и координаты типа Крускала.** Для некоторых типичных калибровок решения для функции  $A$  удается получить в виде квадратуры. В частности, выбор в асимптотической области статических координат и замена производных согласно формулам  $A_{(0)} = A'_C C_{(0)}$ ,  $A_{(1)} = A'_C C_{(1)}$  и (12), приводит уравнение (4) к виду

$$fC(\ln A^2)'_C + f - 1 = \varepsilon\phi_c'^2 C^2 f - C^2 V.$$

Решения этого уравнения, согласованные с асимптотикой (11), дает квадратура

$$A^2 = \frac{1}{C} \exp \left\{ \int_{\infty}^C (1/(fC) + F - CV/f) dC \right\}, \quad (13)$$

где функция  $F(C)$  определяется интегралом

$$F = \int_{\infty}^C \varepsilon \phi_C'^2 C dC. \quad (14)$$

Отметим, что функция  $F(C)$  инвариантна относительно преобразований координат  $t, r$  и используется ниже для произвольных калибровочных условий. Напротив, метрическая функция  $A^2$  в (13), также заданная формулой без явной зависимости от координат, не является калибровочно инвариантной, поскольку условие  $C = C(r)$  или, эквивалентно,  $C_{(0)} \equiv 0$  определяет вид уравнения, из которого квадратура получена. Тем не менее, инвариантность относительно преобразований только радиальной координаты все еще остается, поэтому метрическая функция  $B(r)$  может быть, в принципе, выбрана произвольно. Естественный класс калибровочных условий выделяется асимптотикой  $B \sim 1, r \rightarrow \infty$  (при этом  $C \sim r$ ).

Стационарная калибровка, эффективно используемая при исследовании решений с горизонтом событий, задает координаты типа Крускала и характеризуется условиями

$$A = B, \quad C = C(\tau), \quad \tau(t, r) = r^2 - t^2.$$

Используя выражения

$$C_{(0)} = -\frac{2t}{A} C_{\tau}', \quad C_{(1)} = \frac{2r}{A} C_{\tau}', \quad \frac{C_{(0)(1)}}{C_{(0)}C_{(1)}} = \frac{C_{\tau}''}{C_{\tau}'^2} - \frac{A'_C}{A}$$

для производных по координатам, приведем уравнения (12) и (5) к виду

$$4\tau C_{\tau}'^2 = fA^2, \quad (\ln A^2)'_C = (\ln A^2)'_C + \varepsilon \phi_C'^2 C. \quad (15)$$

Интегрируя систему уравнений (15), получим соотношения

$$\exp \left\{ k \int (e^{-F}/f) dC \right\} = \tau, \quad A^2 = (f/\tau) e^{2F}, \quad (16)$$

где квадратура неявно определяет функцию  $C(\tau)$ , а постоянная интегрирования  $k$  однозначно определяется из требования аналитичности  $C(\tau)$  на горизонте событий. С другой стороны, решения (16) являются автомодельными относительно переменной  $\tau = r^2 - t^2$  и, следовательно, инвариантны относительно преобразований  $r' - t' = (r - t)^{k/2}, r' + t' = (r + t)^{k/2}, k \neq 0$ , которые, вместе со сдвигами и масштабными преобразованиями координат, исчерпывают свободу выбора стационарной калибровки типа Крускала.

**3. Классификация решений для безмассового скалярного поля.** При отсутствии самодействия поля, когда  $V(\phi) = 0$ , система уравнений (9), (10) приводится к виду

$$f'_{\xi} + (1 + \varepsilon \phi_{\xi}'^2) f - 1 = 0, \quad f \phi_{\xi}'' + \phi_{\xi}' = 0, \quad \xi = \ln(C). \quad (17)$$

Исключая из этих уравнений  $f$ , получим уравнение относительно  $\phi$ , для которого первый интеграл имеет вид

$$\phi''_{\xi} = \varepsilon\phi'_{\xi}{}^3 - 2\alpha\phi'_{\xi}{}^2 - \phi'_{\xi}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

Уравнение (18) легко интегрируется и позволяет провести полную классификацию асимптотически плоских решений для безмассового случая. Отметим, что такая классификация, полученная независимо от выбора калибровочных условий, в литературе отсутствует.

Далее мы полагаем  $\alpha \geq 0$ , не теряя общности, поскольку уравнения (17) не меняются при  $\phi \rightarrow -\phi$ , а уравнение (18) инвариантно относительно преобразования  $(\phi, \alpha) \rightarrow (-\phi, -\alpha)$ . В зависимости от комбинации знаков  $\varepsilon$  и  $\alpha^2 + \varepsilon$  существуют три семейства решений, согласованных с асимптотикой (11).

1)  $\varepsilon = 1$ . Однопараметрическое семейство решений найдено в [8, 9] в другой форме для конкретной калибровки, однако, анализ уравнений (17), (18) показывает, что других решений нет. Все решения в этом случае содержат голые сингулярности и поэтому не представляют существенного интереса.

2)  $\varepsilon = -1$ ,  $\alpha^2 - 1 \geq 0$ . Решения системы (17) и квадратура (13) неявно определяют  $\phi, f$  и  $A$  как функции  $C$  по следующим формулам:

$$e^{\alpha\phi} \operatorname{sh}(\sqrt{\alpha^2 - 1}\phi - \delta) = -\sqrt{\alpha^2 - 1}/C, \quad \delta = \operatorname{arsh}(\sqrt{\alpha^2 - 1}), \quad (19)$$

$$f = \operatorname{sh}^2(\sqrt{\alpha^2 - 1}\phi)/(\alpha^2 - 1), \quad (20)$$

$$A = e^{\alpha(\phi - \phi(\infty))}, \quad \phi(\infty) = \delta/\sqrt{\alpha^2 - 1}. \quad (21)$$

При  $\alpha = 1$  решение имеет вид

$$e^{\phi}(\phi - 1) = -1/C, \quad f = \phi^2, \quad A = e^{(\phi - 1)}$$

и может быть получено очевидным предельным переходом в (19) – (21) или непосредственно; это решение является промежуточным между семействами решений.

Левая часть уравнения (19) имеет минимум при  $\phi = 0$ , а значит и  $C$  достигает минимального значения. Вследствие масштабной инвариантности уравнений (17), постоянная интегрирования в этом уравнении без потери общности выбрана так, чтобы минимальное значение  $C$  равнялось 1. Как видно из (20), при этом и функция  $f$  достигает минимума:  $f(1) = 0$ . Последнее условие означает, что горизонт событий отсутствует, а полученные решения представляют топологические ручки, несимметричные относительно горловины [9].

Для определенности выберем конкретные калибровочные условия, полагая  $B \equiv 1$  и  $C \sim r$ ,  $r \rightarrow \infty$ . Тогда  $C(0) = 1$ ,  $\phi(0) = 0$ ,  $r^*(\alpha) < r < \infty$ , где  $r^*(\alpha) < 0$ ; заметим, что  $C$  неограниченно возрастает при  $r \rightarrow r^*(\alpha) + 0$  (рис. 1).

3)  $\varepsilon = -1$ ,  $\alpha^2 - 1 < 0$ . Все решения определяются соотношениями

$$e^{\alpha\phi} \sin(\sqrt{1 - \alpha^2}\phi - \delta) = -\sqrt{1 - \alpha^2}/C, \quad f = \cos^2(\sqrt{1 - \alpha^2}\phi)/(1 - \alpha^2),$$

$$A = e^{\alpha(\phi - \phi(\infty))}, \quad \delta = \arccos(\sqrt{1 - \alpha^2}), \quad \phi(\infty) = \delta/\sqrt{1 - \alpha^2}.$$

Анализ решений качественно не отличается от предыдущего случая за исключением решения с  $\alpha = 0$ . При  $0 < \alpha < 1$  пространственно-временное многообразие

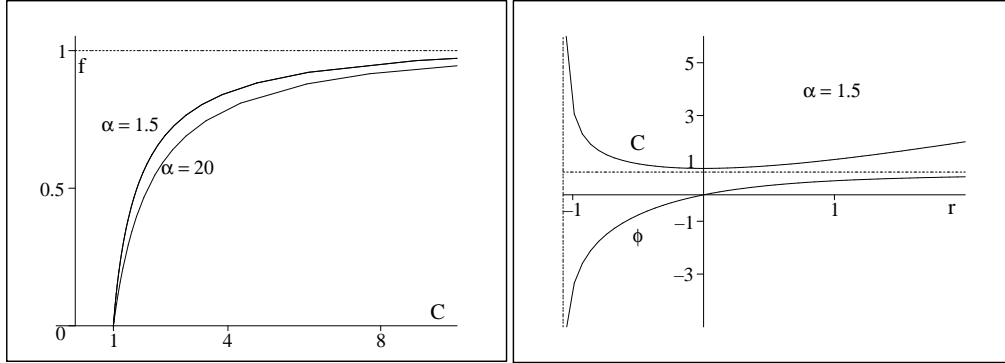


Рис. 1: Функции  $f(C)$ ,  $C(r)$  и  $\phi(r)$

также является асимметричной топологической ручкой, однако  $\phi$  остается конечным при всех  $C$ .

При  $\alpha = 0$  топология не определяется решением однозначно и пространство-время может быть либо топологической ручкой, симметричной относительно горловины, либо быть гомеоморфным  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \# \mathbb{R}^3$ ; это решение в статической калибровке легко может быть получено непосредственно из исходной системы уравнений Эйнштейна и обсуждалось в предыдущей работе [7].

**4. Обратная задача.** Умножив уравнение (10) на  $\phi'_C$  и исключив из него  $V$  и  $V'_C$  с помощью (9), получим условие связи

$$C^2 f''_C + 3\chi f'_C + 2(C\chi'_C + \chi^2 - 1)f + 2 = 0, \quad \chi = C^2 \phi'^2_C, \quad (22)$$

между  $f$  и  $\phi$ , которое выполняется для любого решения системы (9), (10), независимо от формы потенциала (в том числе и при  $V = 0$ ). Рассматривая (22) как уравнение относительно  $f$ , заметим, что функция  $f = C^2 e^{-2F}$  является частным решением соответствующего однородного уравнения, поэтому общее решение уравнения (22) имеет вид

$$f = C^2 e^{-2F} \left\{ a + 6m \int_{\infty}^C \frac{e^F}{C^4} dC - 2 \int_{\infty}^C Q \frac{e^F}{C^4} dC \right\}, \quad (23)$$

где  $F(C)$  и  $Q(C)$  определены соответственно соотношением (14) и

$$Q = \int e^F dC, \quad Q = C + o(1), \quad C \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Постоянная  $a$  может быть отличной от нуля для космологических решений. Далее мы рассматриваем только асимптотически плоские решения, для которых условие  $a = 0$  необходимо, причем выбор постоянной интегрирования для функции  $Q(C)$  уже согласован с асимптотикой (11).

Смысл полученной квадратуры состоит в том, что она дает формальное решение обратной задачи для уравнений (9), (10). Действительно, подставив в квадратуру произвольную гладкую и монотонную (или кусочно монотонную, но в этом

случае необходимо удовлетворить дополнительным условиям сшивки для потенциала) функцию  $\phi(C)$ , мы получим  $f(C)$ , а затем из (9) найдем

$$V(C) = \frac{1}{C^2} \left( 1 - f - C^2 \phi_c'^2 f - C f_c' \right). \quad (25)$$

Таким образом мы полностью восстановим потенциал  $V(\phi)$ . В качестве примера получим точное (модельное) решение для гравитирующего скалярного поля с помощью описанной процедуры.

Выбирая

$$\phi = \operatorname{arsh}(p/C),$$

найдем  $e^F = C/\sqrt{C^2 + p^2}$ ,  $Q = \sqrt{C^2 + p^2}$ , так что интегралы в квадратуре (23) легко вычисляются и результаты можно записать в виде

$$f = \left( 1 + \frac{p^2}{C^2} \right) \left\{ 1 + 3m \left( \frac{C^2}{p^3} \operatorname{arsh} \frac{p}{C} - \frac{\sqrt{C^2 + p^2}}{p^2} \right) \right\}, \quad (26)$$

$$V = \frac{3m}{p^3} (3 \operatorname{sh} \phi \operatorname{ch} \phi - \phi (2 \operatorname{sh}^2 \phi + 3)).$$

Построенная модель описывает черную дыру с двумя свободными параметрами – массой  $m$  и «скалярным зарядом»  $p$  (рис. 2).

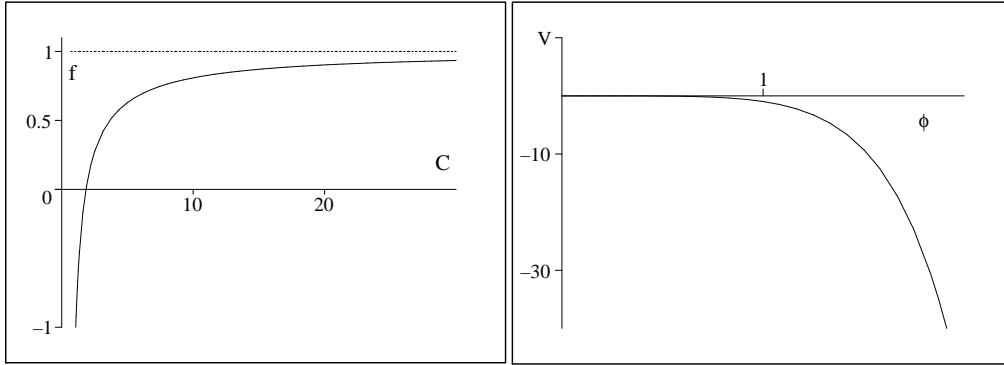


Рис. 2: Функции  $f(C)$  и  $V(\phi)$

При наличии потенциала определяющие уравнения перестают быть масштабно инвариантными. В данном решении потенциал  $V(\phi)$  является четной функцией и не меняется при замене  $p$  на  $-p$ . Черным дырам соответствуют решения с положительной гравитационной массой, а при  $m < 0$  мы получаем голую сингулярность. Простой анализ показывает, что значение  $C$  на горизонте событий монотонно возрастает с ростом  $m$  и может быть любым положительным числом; чтобы его получить, необходимо численно решить уравнение  $f = 0$ . Например, при  $m = 1$  получим  $C \approx 1.847459 p$ .

Поведение данного решения указывает на физическую содержательность и разнообразие интерпретаций моделей с вещественным гравитирующим скалярным полем, причем главной проблемой становится выбор потенциала модели. Действительно, квадратура позволяет получить самые разнообразные точные решения.



Например, выбирая  $F = \ln \{(c^2 + k^2)/(c^2 + 1)\}$ , что для  $\phi$  дает неполный эллиптический интеграл 1-го рода, мы получим для всех  $0 < k < 1$  семейство решений, которые являются черными дырами для  $m > 0$  и регулярными решениями для  $m = 0$ .

Отметим, что до сих пор не было известно никаких точных решений для гравитирующего нейтрального скалярного поля с потенциалом.

**Заключение.** Математические модели частиц темной материи, основанные на безмассовом скалярном поле, обладают свойствами, которые, по-видимому, трудно согласовать как с основными концепциями квантовой теории, так и с имеющимися экспериментальными данными. Во-первых, безмассовые частицеподобные решения существуют только для полей с отрицательным кинетическим членом. В классической теории нарушение слабого энергетического условия не приводит к противоречиям, однако в квантовой теории поля оно приводит к расходимостям в процессах рождения пар в поле такой частицы. Во-вторых, безмассовые частицы не имеют и гравитационной массы, определяемой по ньютоновской асимптотике гравитационного взаимодействия, проявляя при этом скорее свойства гравитационного отталкивания, чем притяжения. Тем не менее, безмассовые решения могут представлять интерес в других ситуациях, моделируя так называемую «экзотическую» материю [3, 4, 14]. С другой стороны, квазичастицы гравитирующего вещественного скалярного поля с потенциалом, представляемые только решениями с горизонтом событий, обладают всеми предполагаемыми свойствами темной материи. Представленное выше решение с модельным потенциалом зависит от двух свободных параметров, а в асимптотической области его свойства определяются только одним параметром – гравитационной массой. Интересно отметить, что эти выводы в целом соответствуют работам [3, 14, 15], в которых приводятся совершенно иные, в основном эмпирические, аргументы.

Перспективы дальнейшего исследования гравитирующих скалярных полей с потенциалом на основе развитого подхода, связаны, в первую очередь, с решением обратной задачи. Необходимо найти выделенные по свойствам решений потенциалы или классы потенциалов, исследовать поведение решений под горизонтом событий, выяснить тип сингулярности и возможность существования двух или более горизонтов, как в моделях с дилатоном. Другим направлением исследований является применение квадратурных формул, полученных в данной работе для формального решения обратной задачи, в решении космологических задач со скалярным полем [15], которые имеют сходную математическую постановку.

### Список литературы

- [1] Bento M.C., Bertolami O., Sen A.A. The revival of the unified dark energy – dark matter model//Phys. Rev. 2004. D70, 083519.
- [2] Sahni V. Dark matter and dark energy//2004. arXiv: astro-ph/0403324.
- [3] Bilic N., Tupper G.B., Viollier R.D. Unificatin of dark matter and dark energy: the inhomogeneous Chaplygin gas// Phys. Lett. 2002, B535. P. 17 – 23.
- [4] Barcelo C., Visser M. Scalar fields, energy conditions and transversable wormholes// Class.Quant.Grav. 2000, B466. P. 3843 – 3861.

- [5] Morris M.S., Thorn K.S. Wormholes in space-time and their use for interstellar travels// Am. J. Phys., 1988. V. 56. P. 395 – 402.
- [6] Visser M. Lorentzian wormholes: from Einstein to Hawking. AIP Press, NY, 1995.
- [7] Никонов В.В., Цирулев А.Н., Чемарина Ю.В. Спектральная краевая задача для гравитирующего скалярного поля в пространстве-времени с топологией  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \# \mathbb{R}P^3$  // Вестник ТвГУ, сер. "Прикладная математика 2006. №4(21). С. 106 – 113.
- [8] Фишер И.З. Поле скалярного мезона с учетом гравитационных эффектов// ЖЭТФ, 1948. Т. 18. С. 636 – 640. arXiv: gr-qc/9911008.
- [9] Bronnikov K.A. Scalar-tensor theory and scalar charge// Acta. Phys. Pol., 1973. V. B4. P. 251 – 266.
- [10] Wiman M. Static spherically symmetric scalar field in general relativity// Phys. Rev. D, 1981. V. 24. P. 839 – 841.
- [11] Volkov M.S., Galt'tsov D.V. Gravitating non-Abelian solutions and black holes with Yang-Mills fields// Phys.Rep. 1999. V.319, P.1-83.
- [12] Tsirulev A.N. Gravitational fields with Yang-Mills curvature// Proc. 15th Int. Conf. "High Energy Physics and Quantum Field Theory Moscow, 2001. P.382-384.
- [13] Tsirulev A.N. Curvature decomposition and the Einstein-Yang-Mills equations// Part. Nucl. JINR. 2004. V. 1. N12(119). P. 99 – 102.
- [14] Sushov S. Wormholes supported by a phantom energy// Phys. Rev. 2005. D70, 043520.
- [15] Bertacca D. *et al.* Unified dark matter in scalar field cosmologies//2007. arXiv: astro-ph/0703259.