УДК 517.8

# СПЕКТР СОСТОЯНИЙ ЗАМКНУТОЙ СТРУНЫ, НАГРУЖЕННОЙ МАССИВНЫМИ ТОЧКАМИ

**Шаров Г.С.**
Кафедра функционального анализа и геометрии

Исследуется динамика замкнутой релятивистской струны с $n$ массивными точками. Эта модель описывает возбужденные состояния экзотических адронов. Описаны ротационные состояния данной струнной модели, спектр их частот, физические характеристики, траектории Редже.

Dynamics of the closed relativistic string with $n$ point-like masses is considered. This model describes excited states of exotic hadrons. The rotational states of this string model are described and their spectrum of frequencies, physical parameters, Regge trajectories are studied.

**Ключевые слова:** замкнутая струна, траектории Редже.
**Keywords:** closed string, Regge trajectories.

**Введение.** В различных струнных моделях мезонов, барионов и других (экзотических) адронов релятивистская струна моделирует сильное взаимодействие между кварками на больших расстояниях и механизм конфайнмента [1]-[3]. Струнные модели естественным образом описывают линейные или квазилинейные траектории Редже для возбужденных состояний адронов — зависимость углового момента от квадрата энергии. Эта особенность струнных моделей была использована для описания глюболов (связанных состояний глюонов) и других экзотических адронов [4] – [6].

В настоящей работе в качестве модели экзотического адрона рассмотрим замкнутую релятивистскую струну с натяжением $\gamma$, нагруженную $n$ точечными массами $m_1, m_2, \dots m_n$. В случае $n = 3$ данная система выступает как модель бариона с тремя кварками [1, 7], при $n = 2$ она моделирует глюбол с двумя валентными кварками [5], при $n = 1$ — такое адронное состояние как глюламп [8].

Динамика этой модели определяется действием, обобщающим случаи [5] – [7]

$$S = -\gamma \int\limits_{\Omega} \sqrt{-g}\, d\tau d\sigma - \sum_{i=1}^{n} m_i \int \sqrt{\dot{x}_i^2(\tau)}\, d\tau. \qquad (1)$$

Здесь $g$ — определитель индуцированной метрики $g_{ab} = \eta_{\mu\nu}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$ на мировой поверхности струны $X^\mu(\tau,\sigma)$ в пространстве Минковского $R^{1,3}$ с метрическии тензором $\eta_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(1; -1; -1; -1)$; $\Omega = \{(\tau,\sigma) : \tau_1 < \tau < \tau_2,\ \sigma_0(\tau) < \sigma < \sigma_n(\tau)\}$; уравнения $x_i^\mu(\tau) = X^\mu(\tau, \sigma_i(\tau))$, $i = 0, 1, \dots, n$ определяют траектории массивных точек, причем при $i = 0$ и $i = n$ они описывает одну и ту же траекторию $n$-ой точки

$$X^\mu(\tau^*, \sigma_n(\tau^*)) = X^\mu(\tau, \sigma_0(\tau)) \qquad (2)$$

на мировой поверхности, имеющей форму трубки. Два параметра $\tau$ и $\tau^*$, входящие в условие замыкания мировой поверхности (2), связаны соотношением $\tau^* = \tau^*(\tau)$ [7].

С помощью варьирования действия (1) [7, 6] получаем уравнения движения

$$\frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \sigma^2} = 0 \tag{3}$$

и краевые условия ($i = 1, \dots, n-1$)

$$m_i \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{x}_i^\mu(\tau)}{\sqrt{\dot{x}_i^2(\tau)}} + \gamma \Big[ X'^\mu + \dot{\sigma}_i(\tau) \dot{X}^\mu \Big] \Big|_{\sigma=\sigma_i-0} - \gamma \Big[ X'^\mu + \dot{\sigma}_i(\tau) \dot{X}^\mu \Big] \Big|_{\sigma=\sigma_i+0} = 0, \tag{4}$$

$$m_n \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{x}_0^\mu(\tau)}{\sqrt{\dot{x}_0^2(\tau)}} + \gamma \Big[ X'^\mu\big(\tau^*(\tau), 2\pi\big) - X'^\mu(\tau, 0) \Big] = 0. \tag{5}$$

имеющие указанный вид при выполнении условий ортонормальности

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0 \tag{6}$$

и условий

$$\sigma_0(\tau) = 0, \qquad \sigma_n(\tau) = 2\pi. \tag{7}$$

Здесь $\dot{X}^\mu \equiv \partial_\tau X^\mu$, $X'^\mu \equiv \partial_\sigma X^\mu$; использовано скалярное произведение $\langle a, b \rangle = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$.

Система уравнений (2) – (7) полностью описывает движение замкнутой релятивистской струны с $n$ точечными массами в пространстве $\mathcal{M}$. Равенства (6), (7) не ограничивают общность при описании произвольных движений системы.

**1. Ротационные состояния.** Найдем решения системы (2) – (7), описывающие ротационное движение системы — равномерное вращение. Эти решения получены как обобщения аналогичных решений в работах [5] – [7] и могут быть представлены в виде

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + e_0^\mu (a_0 \tau + b_0 \sigma) + u(\sigma) \cdot e^\mu(\omega\tau) + \tilde{u}(\sigma) \cdot \acute{e}^\mu(\omega\tau). \tag{8}$$

Здесь векторы $e_0$, $e_1$, $e_2$, $e_3$ образуют ортонормированный базис в $R^{1,3}$,

$$e^\mu(\omega\tau) = e_1^\mu \cos\omega\tau + e_2^\mu \sin\omega\tau, \qquad \acute{e}^\mu(\omega\tau) = -e_1^\mu \sin\omega\tau + e_2^\mu \cos\omega\tau$$

— два единичных вектора, вращающихся в плоскости $e_1$, $e_2$; величины

$$\sigma_i(\tau) = \sigma_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \qquad \tau^* - \tau = \tau_0 \equiv 2\pi\theta = \text{const}, \tag{9}$$

$$\frac{\gamma}{m_i} \sqrt{\dot{X}^2(\tau, \sigma_i)} = Q_i = \text{const}, \qquad i = 1, 2, \dots, n \tag{10}$$

являются константами. Функция

$$u(\sigma) = \begin{cases} A_1 \cos\omega\sigma + B_1 \sin\omega\sigma, & \sigma \in [0, \sigma_1], \\ A_2 \cos\omega\sigma + B_2 \sin\omega\sigma, & \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2], \\ \dots \\ A_n \cos\omega\sigma + B_n \sin\omega\sigma, & \sigma \in [\sigma_{n-1}, 2\pi], \end{cases}$$

и подобная ей $\tilde{u}(\sigma) = \tilde{A}_i \cos\omega\sigma + \tilde{B}_i \sin\omega\sigma$, $\sigma \in [\sigma_{i-1}, \sigma_i]$ непрерывны, но их производные имеют разрывы на линиях $\sigma = \sigma_i$ (позициях масс $m_i$).

Непрерывность функций $u(\sigma)$ и $\tilde{u}(\sigma)$ при $\sigma = \sigma_i$ приводит к равенствам

$$\mathcal{A}_i \cos\omega\sigma_i + \mathcal{B}_i \sin\omega\sigma_i = \mathcal{A}_{i+1} \cos\omega\sigma_i + \mathcal{B}_{i+1} \sin\omega\sigma_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \tag{11}$$

в которых использованы матричные обозначения

$$\mathcal{A}_i = \begin{pmatrix} A_i \\ \tilde{A}_i \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B}_i = \begin{pmatrix} B_i \\ \tilde{B}_i \end{pmatrix}, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{12}$$

Выражение (8) для ротационного состояния является решением уравнения (3) и должно удовлетворять условиям (2), (4) – (7). Краевые условия (4) с учетом равенств (10) принимают вид

$$\ddot{X}(\tau, \sigma_i) + Q_i \Big[ X'^{\mu}(\tau, \sigma_i - 0) - X'^{\mu}(\tau, \sigma_i + 0) \Big] = 0, \qquad i = 1, \dots, n-1.$$

Подставив в них выражение (8), получим равенства для столбцов (12)

$$\mathcal{A}_{i+1} S_i - \mathcal{B}_{i+1} C_i = \mathcal{A}_i (S_i + h_i C_i) + \mathcal{B}_i (h_i S_i - C_i), \quad i = 1, \dots, n-1. \tag{13}$$

Здесь мы обозначили константы

$$h_i = \frac{\omega}{Q_i}, \quad C_i = \cos\omega\sigma_i, \quad S_i = \sin\omega\sigma_i, \quad C \equiv C_n = \cos 2\pi\omega, \quad S \equiv S_n = \sin 2\pi\omega.$$

Из системы (11), (13) можно выразить амплитудные коэффициенты $\mathcal{A}_{i+1}$, $\mathcal{B}_{i+1}$, функций $u$ и $\tilde{u}$ на отрезке $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ (отрезок струны между массами $m_i$ и $m_{i+1}$) через коэффициенты этих функций на отрезке $[\sigma_{i-1}, \sigma_i]$:

$$\mathcal{A}_{i+1} = (1 + h_i C_i S_i)\, \mathcal{A}_i + h_i S_i^2 \mathcal{B}_i, \qquad \mathcal{B}_{i+1} = -h_i C_i^2 \mathcal{A}_i + (1 - h_i C_i S_i)\, \mathcal{B}_i, \quad 1 \le i < n. \tag{14}$$

Подставив выражение (8) в условие замыкания (2) и в $n$-ое краевое условие (5), получим уравнение

$$b_0 = -\operatorname{th} a_0, \tag{15}$$

и с учетом равенств (9), (10) — два уравнения для амплитуд,

$$M_\theta (C\mathcal{A}_n + S\mathcal{B}_n) = \mathcal{A}_1, \qquad M_\theta (-S\mathcal{A}_n + C\mathcal{B}_n) = h_n \mathcal{A}_1 + \mathcal{B}_1,$$

сводящиеся к виду

$$\mathcal{A}_1 = M_\theta (C\mathcal{A}_n + S\mathcal{B}_n), \qquad \mathcal{B}_1 = M_\theta \Big[ -(S + h_n C)\, \mathcal{A}_n + (C - h_n S)\, \mathcal{B}_n \Big]. \tag{16}$$

В этих матричных уравнениях и ниже используется матрица

$$M_\theta = \begin{pmatrix} C_\theta & -S_\theta \\ S_\theta & C_\theta \end{pmatrix}.$$

Система матричных уравнений (14), (16) является однородной системой относительно амплитуд $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$ и сводится после исключения амплитуд с $i = 2,\ 3, \dots, n$ к виду

$$M_1 \mathcal{A} = M_2 \mathcal{B}, \qquad M_3 \mathcal{A} = M_4 \mathcal{B}, \tag{17}$$

где матрицы $M_k$ — линейные комбинации $M_\theta$ единичной матрицы $I$.

Условие существования нетривиальных решений систем (14), (16) или (17) — равенство $\det(M_1M_4 - M_2M_3) = 0$. Это уравнение сводится к виду

$$2(C_\theta - C) + S\sum_{i=1}^n h_i - \sum_{i<j} h_ih_j \sin\omega(\sigma_j - \sigma_i)\cdot\sin\omega(2\pi - \sigma_j + \sigma_i) +$$
$$+\sum_{i<j<k} h_ih_jh_k \sin\omega(\sigma_j-\sigma_i)\cdot\sin\omega(\sigma_k-\sigma_j)\cdot\sin\omega(2\pi-\sigma_k+\sigma_i) - \dots - (-1)^i\prod_{i=1}^n h_is_i = 0, \tag{18}$$

где $s_i = \sin\omega(\sigma_i - \sigma_{i-1})$. Оно связывает неизвестные (на данный момент) значения параметров $\omega$, $\theta$, $\sigma_i$, $Q_i$.

Другие ограничения на значения этих параметров находим с помощью подстановки выражения (8) в условия ортонормальности (6):

$$\omega^2(A_i^2 + B_i^2 + \tilde{A}_i^2 + \tilde{B}_i^2) = a_0^2(1+\theta^2), \qquad i = 1,\dots,n; \tag{19}$$
$$\omega^2(\tilde{A}_iB_i - A_i\tilde{B}_i) = a_0^2\theta, \qquad i = 1,\dots,n. \tag{20}$$

Из двух уравнений (20) только одно независимо, например, с $i = 1$. Если оно выполнено, то из уравнений (14) следует выполнение остальных. В то же время уравнения (19) независимы. Ниже мы используем первое из них и их разности, преобразованные с учетом (14):

$$C_i(h_iC_i+2S_i)(A_i^2+\tilde{A}_i^2)+S_i(h_iS_i-2C_i)(B_i^2+\tilde{B}_i^2) = 2(C_i^2-S_i^2-h_iC_iS_i)(A_iB_i+\tilde{A}_i\tilde{B}_i). \tag{21}$$

При выполнении условия (18) два уравнения (17) равносильны. Это позволяет выразить столбец $\mathcal{B}_1$ через $\mathcal{A}_1$ (последний можно выбрать произвольно):

$$\tilde{B}_1 = \frac{-C_*A_1 + S_\theta\tilde{A}_1}{S_*}, \qquad \tilde{B}_1 = -\frac{S_\theta A_1 + C_*\tilde{A}_1}{S_*}. \tag{22}$$

Здесь выражения

$$C_* = C - C_\theta - h_1C_1(SC_1 - S_1C - h_2s_2s_3) - h_2C_2s_3,$$
$$S_* = S - h_1S_1(SC_1 - S_1C - h_2s_2s_3) - h_2S_2s_3$$

приведены для случая $n = 3$, переход к $n = 2$ обеспечивается равенством $s_3 = 0$.

Величины (22) должны удовлетворять уравнениям (19) – (21), порожденным условиями ортонормальности (6). Если подставить выражения в первые уравнения (19), (20), мы получим два уравнения, сводящиеся к виду

$$\frac{\omega^2S_\theta}{S_*}(A_1^2 + \tilde{A}_1^2) = a_0^2\theta, \tag{23}$$

$$\frac{1+\theta^2}{\theta} = \frac{C_*^2 + S_*^2 + S_\theta^2}{S_*S_\theta}. \tag{24}$$

Во втором из уравнений исключены амплитудные множители $A_1^2 + \tilde{A}_1^2$ и $a_0^2$, оно позволяет находить значения параметров $\omega$ (безразмерных частот) и $\theta$. В случае $n = 2$ уравнение (24) имеет вид

$$\frac{1+\theta^2}{\theta} = \frac{2S + (h_1+h_2)\,C - h_1h_2C_1S_2}{S_\theta}.$$

Для определения значений $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ систему уравнений (18), (24) следует пополнить $n-1$ уравнениям (21) после подстановки в них выражений (22). Процедура численного решения указанной системы уравнений описана в работах [5] – [7].

Если значения параметров $\omega$, $\theta$, $\sigma_i$ удовлетворяют этим уравнениям, то выражение (8) является решением системы (2) – (7) и описывают равномерное вращение замкнутой струны, имеющей форму объединения отрезков гипоциклоиды соединенных под ненулевыми углами в массивных точках. Эта форма – сечение $t = t_0 = \mathrm{const}$ мировой поверхности (8). Гипоциклоида — траектория точки окружности радиуса $r$, катящейся внутри неподвижной окружности большего радиуса $R$. В случае ротационных состояний (8) отношение радиусов окружностей

$$\frac{r}{R} = \frac{1 - |\theta|}{2}.$$

При этом $|\theta| < 1$, что следует также из принципа причинности.

Данное объединения отрезков гипоциклоиды вращается в плоскости $e_1, e_2$ с угловой скоростью $\Omega = \omega/a_0$. Массивные точки движутся со скоростями $v_i$ по окружностям радиусов $v_i/\Omega$. Указанные параметры связаны состношениями

$$a_0 = \frac{m_1 Q_1}{\gamma\sqrt{1 - v_1^2}} = \cdots = \frac{m_n Q_n}{\gamma\sqrt{1 - v_n^2}}, \qquad v_n^2 = \theta\frac{S_*}{S_\theta}. \tag{25}$$

Вращающаяся гипоциклоида может иметь точки возврата, которые движутся со скоростью света. Существуют различные топологические типы решений (8), различающиеся числом и расположением точек возврата. В основу классификации этих решений положим подход, использованный ранее для описания различных топологических состояний струнной модели бариона «треугольник» [7]. А именно, при фиксированных значениях параметров $\gamma$, $a_0$ для заданного топологического типа решения (8) рассмотрим предел $m_i \to 0$.

Анализ уравнений (18) – (25) показывает, что в рассматриваемом пределе $m_i \to 0$ величины $Q_i$ стремятся к бесконечности, а значения параметров $2\omega$ и $2\omega\theta = \tau_0\omega/\pi$ стремятся к целым числам, для которых мы введем следующие обозначения:

$$n_1 = \Bigl|\lim_{m_i\to 0} 2\omega\Bigr|, \qquad n_2 = \lim_{m_i\to 0}\frac{\tau_0\omega}{\pi} = \lim_{m\to 0} 2\theta\omega. \tag{26}$$

В силу неравенства $|\theta| < 1$ и условия (18), приводящего к равенству $(-1)^{n_1} = (-1)^{n_2}$ ($n_1$ и $n_2$ имеют одинаковую четность), лишь следующие значения параметров (26) допустимы:

$$n_1 \ge n; \qquad n_2 = n_1 - 2,\ \ n_1 - 4,\ \ldots\ -(n_1 - 2). \tag{27}$$

Набор целых чисел $n_1$, $n_2$, ограниченных условиями (27), не определяет однозначно топологический тип ротационных состояний (8), но описывает форму струны в пределе $m_i \to 0$ с учетом кратности прохождения кривой при изменении $\sigma$ от 0 до $2\pi$ — гипоциклоиду с $n_1$ точками возврата. По своему геометрическому смыслу Параметр $n_2$ характеризует форму данной гипоциклоиды (например, для $n_1 = 5$ при $n_2 = 3$ получается криволинейный пятиугольник, а $n_2 = 1$ соответствует звезда).

**2. Энергия, угловой момент и траектории Редже.** Возможные приложения найденных решений для рассматриваемой модели связаны с описанием внутренних степеней свободы элементарных частиц с заданным набором квантовых чисел и физических характеристик. Вычислим важнейшие из них – энергию $E$ и угловой момент $J$ ротационных состояний (8).

Для произвольного состояния замкнутой релятивистской струны, нагруженной $n$ точечными массами они определяются с помощью следующих интегралов (токов Нётер) [6, 7]:

$$P^\mu = \int\limits_{\mathcal{C}} p^\mu(\tau,\sigma)\,d\sigma + \sum_{i=1}^n p_i^\mu(\tau), \tag{28}$$

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = \int\limits_{\mathcal{C}} \Big[X^\mu(\tau,\sigma)\,p^\nu(\tau,\sigma) - X^\nu(\tau,\sigma)\,p^\mu(\tau,\sigma)\Big]\,d\sigma + \sum_{i=1}^n (x_i^\mu p_i^\nu - x_i^\nu p_i^\mu), \tag{29}$$

где $x_i^\mu(\tau) = X^\mu\big(\tau,\sigma_i(\tau)\big)$ и $p_i^\mu(\tau) = m_i\dot x_i^\mu(\tau)\big/\sqrt{\dot x_i^2(\tau)}$ координаты и импульс массивной точки, $\mathcal{C}$ – любой замкнутый контур, охватывающий трубкообразную мировую поверхность струны. are Линии $\tau = \mathrm{const}$ на мировой поверхности (8) не замкнуты в случае $\tau_0 \ne 0$ ($\theta \ne 0$). Поэтому в качестве контура $\mathcal{C}$ в интегралах (28), (29) нужно использовать другие линии, например, $\tau - \theta\sigma = \mathrm{const}$ (то есть $t = \mathrm{const}$).

Вычисление интегралов (28), (29) удобно проводить, сделав замену координат $\tilde\tau = \tau - \theta\sigma$, $\tilde\sigma = \sigma - \theta\tau$, при которой сохраняются условия ортонормальности (6). В ортонормальной калибровке (6) $p^\mu(\tau,\sigma) = \gamma\dot X^\mu(\tau,\sigma)$.

Если мы подставим выражения (8) в уравнения (28), то получим следующее выражение для импульса:

$$P^\mu = e_0^\mu E, \qquad E = 2\pi\gamma a_0(1-\theta^2) + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\sqrt{1-v_i^2}}. \tag{30}$$

В выражении для углового момента (29) после вычислений остается лишь ненулевая $z$-компонента:

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = j_3^{\mu\nu} J, \qquad J = \frac{\gamma a_0^2}{2\omega}\left[2\pi(1-\theta^2) + \sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{Q_i}\right]. \tag{31}$$

Здесь $j_3^{\mu\nu} = e_1^\mu e_2^\nu - e_1^\nu e_2^\mu = e^\mu \acute e^\nu - e^\nu \acute e^\mu$.

Соотношения (30), (31) задают неявную зависимость $J = J(E^2)$ классического углового момента (31) от квадрата энергии для ротационного состояния (8) определенного топологического типа. Если фиксирован топологический тип, определяемый числами $n_1$, $n_2$, а также значения $m_i$ и $\gamma$, то состояния (8) образуют однопараметрическое множество. В качестве параметра данного множества можно использовать любую переменную из следующего набора: $\omega$, $\theta$, $a_0$, $E$, $J$ и др. Остальные параметры выражаются через один заданный с помощью формул (18) – (25).

График получающейся при этом зависимости $J = J(E^2)$ (траектория Редже) зависит от выбранного топологического типа ротационного состояния, но для всех значений $n_1$, $n_2$ он имеет квазилинейный вид и, в частности, прямолинейную асимптотику при $E \to \infty$.

В ультрарелятивистском пределе $E \to \infty$ скорости $v_i$ стремятся к скорости света: $v_i \to 1-0$, а $\omega$ и $\theta$ — к предельным значениям (26). Подставляя в уравнения (18), (24), (25), (30), (31) выражения с малыми параметрами $\varepsilon_i = \sqrt{1-v_i^2}$, $2\omega = n_1 - \varepsilon_\omega$, $n_1\theta = n_2 - \varepsilon_\theta$, получим в пределе $J \to \infty$, $E \to \infty$ следующее асимптотическое соотношение для ротационного состояния (8) определенного типа $(n_1, n_2)$:

$$J \simeq \alpha' E^2 + \alpha_1 E^{1/2}, \qquad E \to \infty,$$

где

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi\gamma}\,\frac{n_1}{n_1^2 - n_2^2}, \qquad \alpha_1 = -\frac{\sqrt{2}\,n_1}{3\sqrt{\pi}\gamma(n_1^2 - n_2^2)^{3/4}}\sum_{i=1}^{n} m_i^{3/2}.$$

Это соотношение близко к линейному, но наклон траектории $\alpha'$ для этой модели отличается от значения Намбу $\alpha' = 1/(2\pi\gamma)$ множителем $\chi = n_1/(n_1^2 - n_2^2)$. В частности, для треугольной конфигурации с $n_1 = 3$, $n_2 = 1$ этот множитель $\chi = 3/8$, что соответствует траекториям Редже для глюболов и экзотических адронов [4, 8].

Автор признателен РФФИ за поддержку в рамках проекта 05-02-16722.

## Список литературы

[1] Шаров Г.С. Струнные модели бариона и траектории Редже // Ядерная физика. 1999. Т. 62. №10. С. 1831.

[2] Sharov G.S. Quasirotational motions and stability problem in dynamics of string hadron models // Physical Review D. 2000, V. 62, №9, P. 094015, hep-ph/0004003.

[3] Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. Т. 1, 2. М.: Мир, 1990.

[4] Pando Zayas L.A., Sonnenschein J., Vaman D. Regge Trajectories Revisited in the Gauge/String Correspondence // Nucl. Phys. B. 2004, V. 682, P. 3, hep-th/0311190.

[5] Sharov G.S. String models of glueball and Regge trajectories / hep-ph/0612277.

[6] Миловидов А.Е., Шаров Г.С. Замкнутые релятивистские струны в пространствах с нетривиальной геометрией // Теоретич. и математич. физика. 2005. Т. 142. №1. С. 72-82.

[7] Sharov G.S. String baryonic model «triangle»: Hypocycloidal solutions and the Regge trajectories // Physical Review D. 1998 V. 58. №11. P. 114009.

[8] Mathieu V., Semay C., Brau F. Casimir scaling, glueballs and hybrid gluelumps // Eur. Phys. J. A. 2006, V. 27 P. 225, hep-ph/0511210