

АНАЛИЗ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В ДИЛАТОННОЙ ГРАВИТАЦИИ

Воронцова Е.Г.

Кафедра математических методов современного естествознания

В дилатонной гравитационной модели получены решения фридмановского типа. Проведен анализ космологических параметров для сравнения данных решений с космологическими решениями ОТО.

In dilaton gravitational model the Friedman type solutions are obtained. The cosmological parameters are analyzed with respect to correlations of these solutions and cosmological solutions of GTR.

Ключевые слова: решение фридмановского типа, дилатонная гравитационная модель, космологические параметры.

Keywords: Friedman type solutions, cosmological parameters, dilaton gravitational model.

1. Космологические решения фридмановского типа. Система уравнений эволюции дилатонной гравитационной модели [1] с пылевидной материей имеет вид

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} + 2\phi_{;\mu\nu} &= \gamma e^{2\phi} T_{\mu\nu}, \\ R + 4(\nabla\phi)^2 &= \Lambda + 2\gamma e^{2\phi} T^\mu{}_\mu, \end{aligned} \quad (1)$$

где тензор энергии-импульса имеет вид

$$T^\mu{}_\nu = \begin{cases} \varepsilon_0/a^n, & \mu = \nu = 0, \\ 0, & \mu + \nu > 0, \end{cases} \quad (2)$$

$R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи $n+1$ -мерного псевдориманова многообразия (пространства-времени) $M_{1,n}$, $R = R^\mu{}_\mu$ — скалярная кривизна, γ — константа (при $n=3$), связанная с ньютоновской гравитационной постоянной G соотношением $\gamma = 8\pi G/c^4$, Λ — константа, являющаяся аналогом космологической постоянной в общей теории относительности (ОТО).

Для системы уравнений (1) находим космологические решения для однородной и изотропной Вселенной. Рассмотрены три модели с $M_{1,n} = R \times S_k^n$, где S_1^n — n -мерная сфера (замкнутая модель), S_{-1}^n — псевдосфера (открытая модель), $S_0^n \equiv R^n$ — плоское пространство (плоская модель). Многообразие S_k^n характеризуется масштабным фактором $a(t)$, в случае $k=1$ фактор a — радиус сферы S_1^n . Метрика на многообразии $M_{1,n} = R \times S_k^n$ задана в виде

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[(dx^1)^2 + c_k^2(x^1)(dx^2)^2 + \dots + c_k^2(x^1) \dots c_k^2(x^{n-1})(dx^n)^2], \quad (3)$$

$$\text{где } c_k(x) = \begin{cases} \cos x, & k = 1, \\ 1, & k = 0, \\ \cosh x, & k = -1. \end{cases}$$

Подстановка метрики (3) в уравнения дилатонной гравитации (1) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} -n\frac{\ddot{a}}{a} + 2\ddot{\phi} &= \gamma\frac{\varepsilon_0}{a^n}e^{2\phi}, \\ -\ddot{a} - (n-1)\frac{\dot{a}^2 + k}{a} + 2\dot{a}\dot{\phi} &= 0, \\ n(n-1)\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} + 4\dot{\phi}^2 - 4n\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a} &= \Lambda + 2\gamma\frac{\varepsilon_0}{a^n}e^{2\phi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Последнее уравнение играет роль уравнения связи в системе (4).

Для случая плоской Вселенной ($k = 0$) решение уравнений (4) получено аналитически и имеет вид

$$a(t) = a_0 \cdot \begin{cases} \left[\frac{\operatorname{th}(\sqrt{\Lambda}\tau/2)}{\operatorname{th}(\sqrt{\Lambda}\tau/2) + 2\sqrt{n\Lambda}/|\tilde{\mu}|} \right]^{\pm 1/\sqrt{n}}, & \Lambda > 0, \\ \left[\frac{|\tilde{\mu}|\tau}{|\tilde{\mu}|\tau + 4\sqrt{n}} \right]^{\pm 1/\sqrt{n}}, & \Lambda = 0, \\ \left[\frac{\operatorname{tg}(\sqrt{-\Lambda}\tau/2)}{\operatorname{tg}(\sqrt{-\Lambda}\tau/2) + 2\sqrt{-n\Lambda}/|\tilde{\mu}|} \right]^{\pm 1/\sqrt{n}}, & \Lambda < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\tilde{\mu} = 2\gamma\varepsilon_0 C$ — константа, $\tau = \pm(t - t_0) = |t - t_0|$. Соответствующая зависимость для дилатонного поля следует из выражения $e^{2\phi} = C\dot{a}a^{n-1}$. Данные решения переходят в решения для случая $T_{\mu\nu} = 0$ в пределе $\tilde{\mu} \rightarrow 0$.

Эволюцию во времени масштабного фактора $a = a(\tau)$ для решений (5) при различных значениях Λ иллюстрирует рис. 1. Здесь и ниже размерность $n = 3$; сплошные линии соответствуют решениям с пылевидной материей при значении $|\tilde{\mu}| = 1$, пунктирные линии — решениям без материи ($\tilde{\mu} = 0$).

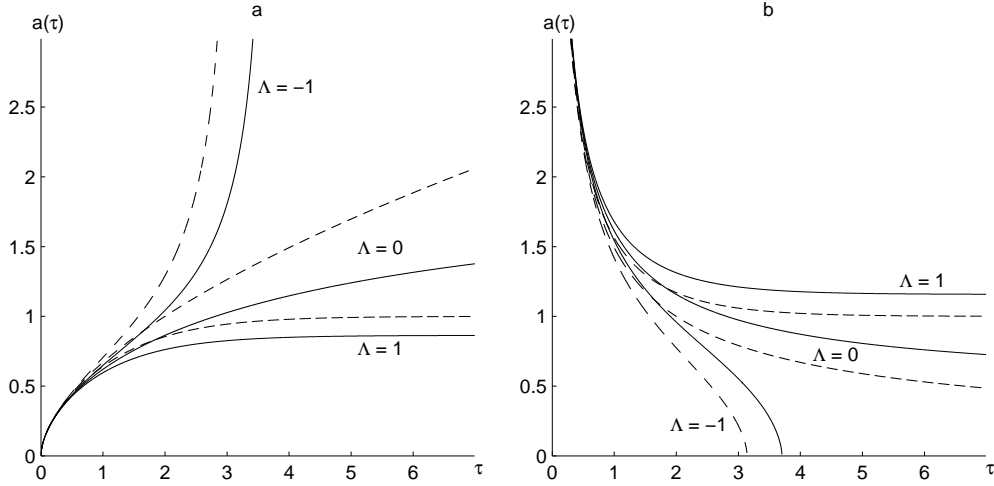


Рис. 1: Эволюция масштабного фактора для решений (5) при $k = 0$, $n = 3$ с $|\tilde{\mu}| = 1$ (сплошные линии) и $\tilde{\mu} = 0$ (пунктирные линии)

На рис. 1а представлены решения, которые подобно решениям Фридмана в ОТО имеют начальную сингулярность (обращение масштабного фактора в ноль)

с асимптотическим поведением

$$a \simeq \text{const} \cdot \tau^{1/\sqrt{n}}, \quad e^{2\phi} \simeq \text{const} \cdot \tau^{-1+\sqrt{n}}, \quad \tau \rightarrow +0. \quad (6)$$

Решения с данной особенностью (сингулярность типа «0») имеют место при всех значениях k , Λ и ε_0 .

Однако в отличие от ОТО в дилатонной гравитационной модели при всех значениях k , Λ и ε_0 имеются космологические решения, подобные показанным на рис. 1b и рис. 1a при $\Lambda < 0$. Начало или конец эволюции для них означает обращение a и ϕ в бесконечность за конечное время τ с асимптотикой

$$a \simeq \text{const} \cdot \tau^{-1/\sqrt{n}}, \quad e^{2\phi} \simeq \text{const} \cdot \tau^{-1-\sqrt{n}}, \quad \tau \rightarrow +0. \quad (7)$$

Такую особенность мы будем называть сингулярностью типа « ∞ ».

В случае пространств с кривизной $k = \pm 1$ при $\Lambda = 0$, $T_{\mu\nu} = 0$ получены решения системы (4) в параметрической форме

$$a = C_a |p - p_1|^{\frac{1}{2(\sqrt{n}-1)}} |p - p_2|^{\frac{-1}{2(\sqrt{n}+1)}}, \quad \phi = \phi_0 + \frac{\sqrt{n}}{4} \ln \left| \frac{p - p_1}{p - p_2} \right|. \quad (8)$$

Здесь $p = \ddot{\phi}/\dot{\phi}^2$, $p_1 = -\frac{2}{\sqrt{n}-1}$, $p_2 = \frac{2}{\sqrt{n}+1}$, C_a , ϕ_0 — константы. Время t связано с параметром p дифференциальным уравнением, численное интегрирование которого позволяет исследовать эти решения.

В случаях пространств с $k = \pm 1$ и $\Lambda \neq 0$, $T_{\mu\nu} = 0$ и $k = \pm 1$, $T_{\mu\nu} \neq 0$ при любых значениях Λ используется численное решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (4), так как явные аналитические решения имеются лишь в отдельных случаях.

В частности, в присутствии пылевидной материи ($T_{\mu\nu} \neq 0$) уравнения (4) после замены $e^{2\phi} = \dot{a}a^{n-1}\psi(t)$ были сведены к системе

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= w, & \frac{d\psi}{dt} &= k(n-1)\frac{\psi}{a\dot{a}}, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{w^2 - k(n-1)}{a} \pm \frac{w}{a} \sqrt{nw^2 - kn(n-1) + \Lambda a^2 + \mu w a \psi}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\mu = 2\gamma\varepsilon_0$ — константа, характеризующая плотность материи.

2. Анализ космологических параметров. Для сопоставления полученных в рамках дилатонной модели решений с космологическими решениями ОТО и данными наблюдений рассмотрим следующие космологические параметры — характеристики, которые используют для описания состояния Вселенной в каждый момент времени. Такими параметрами являются: параметр Хаббла, определяющий темп расширения, параметр замедления, определяющий скорость изменения темпа расширения, вклады различных компонент (барионной, нейтринной, темной энергии ...) в полную плотность нашей Вселенной, сама эта полная плотность [2], [3].

Рассмотрим случай $\Lambda = 0$ и определим следующие параметры:

1) параметр Хаббла

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (10)$$

2) параметр замедления

$$q(t) = -\frac{a(t)\ddot{a}(t)}{\dot{a}^2(t)}. \quad (11)$$

3) параметр плотности материи

$$\Omega(t) = \frac{\gamma\rho(t)}{3H^2(t)}. \quad (12)$$

Здесь γ — эйнштейновская гравитационная постоянная, $\rho(t)$ — плотность материи.

Значения данных параметров позволяет ответить на вопрос, какая из трех моделей Фридмана (открытая, замкнутая или плоская) (3), имеющих место в ОТО, реализуется в действительности.

Плоская модель Фридмана ($k = 0$) в рамках ОТО описывает необратимое расширение Вселенной для случая пылевидной материи с тензором энергии-импульса (2) [4], и соответствующее выражение для масштабного фактора $a(\tau)$ имеет вид в случае $n = 3$:

$$a(\tau) = \text{const} \cdot \tau^{2/3}. \quad (13)$$

Соответствующие выражения для замкнутой ($k = 1$) и открытой ($k = -1$) моделей Фридмана имеют вид

$$\begin{aligned} a &= a_0(1 - \cos \eta), & \tau &= a_0(\eta - \sin \eta), & k &= 1, \\ a &= a_0(\text{ch } \eta - 1), & \tau &= a_0(\text{sh } \eta - \eta), & k &= -1. \end{aligned} \quad (14)$$

В выражении (14) введено обозначение $a_0 = \text{const}$. При этом на начальной стадии расширения ($\tau \ll a_0$) для всех трех моделей выражения для $a(\tau)$ близки и имеют асимптотику (13).

В отличие от фридмановского решения (13), для дилатонной гравитации в случае $k = 0$, $\Lambda = 0$, $n = 3$ для решений (5) показатель степени равен $1/\sqrt{3}$, что довольно близко к $2/3$. Кроме того, в дилатонной гравитации существует в отличие от (13) ветвь решений (5) со знаком «-», которой соответствует знак «+» перед корнем в последнем из уравнений системы (9). В ОТО данные решения отсутствуют, при $\Lambda = 0$ уравнения Эйнштейна имеют вид

$$3\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \gamma\varepsilon. \quad (15)$$

Здесь ε — плотность энергии. Данное уравнение является уравнением 1-го порядка, в случае пылевидной материи $\gamma\varepsilon = 6a_0/a^3$ оно сводится к следующему виду:

$$\frac{da}{d\tau} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{6a_0}{a} - k}.$$

В отличие от ОТО в дилатонной гравитационной модели зависимость $a(\tau)$ определяется уравнениями вида (9), в которых знак перед корнем порождает две ветви решений с асимптотиками (6), (7) при $\tau \rightarrow 0$. Ветвь решений вида (7) с сингулярностью типа « ∞ » описывает расширение Вселенной до бесконечности за конечный промежуток времени τ (или сжатие от бесконечности до конечной величины a). Решения данного вида отсутствуют в ОТО.

Определим значения космологических параметров для найденных решений.

Для постоянной Хаббла в настоящее время, большинство исследователей принимает величину $H_0 = 75 \text{ км}/(\text{с}\cdot\text{Мпк})$ [5] (индекс «0» соответствует значениям космологических параметров в современную эпоху), соответственно обратная величина $\tau = H_0^{-1} = 1.3 \cdot 10^{10}$ лет — это «возраст» Вселенной (т.е. время, прошедшее с начала расширения, если бы оно шло с постоянной скоростью).

Для решений Фридмана параметр Хаббла (10) при $k = 0$ имеет вид $H(\tau) = \frac{2}{3\tau}$, а для дилатонной гравитации в случае $\Lambda = 0$ и отсутствия пылевидной материи

$$H(\tau) = \frac{1}{\sqrt{3}\tau}. \quad (16)$$

В обоих случаях имеет место степенной закон расширения и соответствующие выражения для параметра Хаббла различаются лишь числовым множителем. Для решений (5) с $k = 0$, $\Lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$ (с пылевидной материей) выражение (16) является асимптотикой при $\tau \rightarrow 0$ для решений с начальной сингулярностью типа «0».

Для случая замкнутой (открытой) Вселенной Фридмана (14) параметр Хаббла равен соответственно

$$H = a_0^{-1} \cdot \begin{cases} \frac{\sin \eta}{(1 - \cos \eta)^2}, & k = 1, \\ \frac{\text{sh } \eta}{a_0(1 - \text{ch } \eta)^2}, & k = -1. \end{cases}$$

В дилатонной гравитационной модели при $\Lambda = 0$ и $\mu = 0$ соответствующие решения получены в параметрическом виде (8), поэтому выражение для постоянной Хаббла имеет следующий вид:

$$H = \frac{2-p}{3\Theta} |p-p_1|^{\frac{-\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)}} |p-p_2|^{\frac{-\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}}, \quad k = \pm 1. \quad (17)$$

Здесь Θ — константа, связанная с постоянными в выражении (8).

В случае замкнутой модели ($k = 1$) допустимые значения параметра p лежат в интервале (p_1, p_2) , $p_1 = -2/(\sqrt{3}-1)$, $p_2 = 2/(\sqrt{3}+1)$. При этом значения параметра Хаббла (17) положительны и стремятся к $+\infty$ как в начальной сингулярности ($\tau \rightarrow 0$, $a \rightarrow 0$, $p \rightarrow p_1$), так и в конечной ($a \rightarrow +\infty$, $p \rightarrow p_2$). На некотором промежуточном этапе величина $H(\tau)$ достигает минимума (в точке $p = 5 - \sqrt{21}$), равного

$$H_{min} \approx \frac{0.196}{\Theta}. \quad (18)$$

при этом параметр замедления $q = -1$.

Сравнивая выражение (18) с известным на данный момент значением постоянной Хаббла [5] $H_0 = 75 \text{ км}/(\text{с}\cdot\text{Мпк})$, получим оценку для константы Θ , которая возникает в полученных решениях (8) как постоянная интегрирования:

$$\Theta \geq \frac{0.196}{H} \approx 3 \cdot 10^{17} \text{ с}.$$

По своему физическому смыслу константа Θ — примерное время жизни Вселенной в рамках дилатонной модели.

В случае открытой модели ($k = -1$) имеются две ветви решений. Для ветви с начальной сингулярностью типа «0» (6) величина H уменьшается по мере роста $a(\tau)$ от $+\infty$ до нуля (для $\Lambda \geq 0$). Для ветви решений с начальной сингулярностью типа « ∞ » (7) на начальном этапе эволюции, отвечающем сжатию, величина H отрицательна, обращается в нуль в точке максимального сжатия. На следующем этапе расширения постоянная Хаббла H положительна, возрастает неограниченно при $\Lambda < 0$ и стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ при $\Lambda \geq 0$.

Параметр замедления (11) для решений Фридмана (при $\Lambda = 0$) позволяет определить тип модели: для плоской модели $q_0 = 1/2$; для замкнутой Вселенной $q_0 > 1/2$; для открытой Вселенной $q_0 < 1/2$.

В дилатонной гравитационной модели выражение для параметра замедления (11) следует из уравнения (9)

$$q = -1 + \frac{2k}{H^2 a^2} \pm \sqrt{3 \left(1 - \frac{2k}{H^2 a^2} + 2\Omega e^{2\phi} \right) + \frac{\Lambda}{H^2}}. \quad (19)$$

Здесь константа $\mu = 2\gamma\varepsilon_0$ выражена через параметр плотности материи (12): $\mu = 6H^2 a^3 \Omega$.

В частном случае, когда $k = 0$, $\Lambda = 0$ возможные значения q имеют вид

$$q = -1 \pm \sqrt{3(1 + 2\Omega e^{2\phi})}.$$

Значение $q = -1 - \sqrt{3(1 + 2\Omega e^{2\phi})}$ соответствует сжатию плоской Вселенной. В то же время значение $q = -1 + \sqrt{3(1 + 2\Omega e^{2\phi})}$ соответствует расширению и может быть сопоставлено с данными наблюдений.

Оценка значения постоянной Хаббла определяется данными наблюдений красного смещения удаленных галактик и зависит лишь от совершенствования методов измерения расстояний до этих объектов в то время как параметр замедления q_0 может быть определен лишь косвенными методами.

В последнее время, появились данные [6], свидетельствующие о том, что расширение Вселенной происходит с ускорением, т.е. значение параметра q_0 отрицательно, что следует из анализа наблюдений за сверхновыми, расположенными на больших расстояниях и имеющими, соответственно, большое красное смещение, и сделанных авторами оценок для параметра плотности материи (12) и аналогичного параметра плотности для Λ -члена.

Важно отметить, что отрицательные значения параметра q (или q_0) в ОТО не реализуются в моделях Фридмана для решений (13) и (14) и возможны лишь при $\Lambda \neq 0$. В то же время в дилатонной гравитационной модели решения с $q < 0$ существуют и при $\Lambda = 0$ для всех значений k . В этом можно убедиться из анализа выражения (19).

Что касается параметра плотности (12), отметим, что в ОТО при $\Lambda = 0$ параметр плотности материи (12) определяет тип модели, так как уравнение Эйнштейна для моделей Фридмана (15) сводится к виду

$$k = \frac{H^2}{a^2} (\Omega - 1). \quad (20)$$

Следовательно, при $\Omega = 1$ (или, иначе говоря, при равенстве плотности материи критическому значению $\rho_{cr} = 3H_0^2/(8\pi G)$) реализуется плоская модель, при $\Omega > 1$ ($\rho > \rho_{cr}$) — замкнутая, при $\Omega < 1$ ($\rho < \rho_{cr}$) — открытая.

В дилатонной гравитационной модели соответствующее (20) выражение имеет вид:

$$k = \frac{2q - 1 \pm \sqrt{9 - 12q + 24\Omega e^{2\phi} + 4\Lambda/H^2}}{4} (Ha)^2. \quad (21)$$

Выбор типа модели (значения k) здесь не определяется однозначно даже при известных q , H , Ω и Λ , а зависит также от выбора ветви решения и величины $e^{2\phi}$.

Во все приведенные здесь формулы дилатонной модели параметр плотности материи (12) входит только в комбинации $\Omega e^{2\phi}$. Следовательно, в дилатонной гравитации величина Ω сама по себе не определяет характер космологического решения, в частности, значения k и q . Определяющую роль играет произведение параметра Ω на величину $e^{2\phi}$ — интенсивность дилатонного поля. Таким образом, можно заключить, что в дилатонной гравитационной модели возникает более широкий спектр решений по сравнению с ОТО.

Список литературы

- [1] Воронцова Е.Г., Шаров Г.С. Многомерные космологические решения фридмановского типа в дилатонной гравитации // Теоретич. и математич. физика. 2000. Т.123. №1. С.163-176.
- [2] А. А. Фридман. Мир как пространство и время. М.: Наука. 1965.
- [3] А. Д. Линде. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М.: Наука. 1981. 275 стр.
- [4] Л. Д. Ландау, И. М. Лифшиц. Теория поля. М.: Наука. 1984.
- [5] O. Lahav, A. R. Liddle. The Cosmological parameters 2005 // 26 pages, Article for The Review of Particle Physics 2006, astro-ph/0601168
- [6] A. G. Riess at al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant // Astron. J. 1998. V. 116. P. 1009–1038, astro-ph/9805201.