ВЕРОЯТНОСТНО-ВОЗМОЖНОСТНЫЕ МОДЕЛИ

УДК 519.248:[33+301]

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ В МНОГОМЕРНОЙ МОДЕЛИ КОЛЛЕКТИВНОГО РИСКА[1]

Смирнов М.В., Хохлов Ю.С.
Кафедра математической статистики и эконометрики

В настоящей работе известное представление Гербера вероятности разорения в одномерной коллективной модели риска обобщается на случай многомерной модели риска. На основе этого результата получена некоторая оценка для вероятности разорения для случая, когда величины исков имеют показательные распределения.

In this paper famous Gerber's representation of ruin probability in one-dimensional collective risk is generalized for the case of multi-dimensional risk model. Using this result some estimate for ruin probability in the case of claims with exponential distributions is obtained.

Ключевые слова: многомерная коллективная модель риска, вероятность разорения.
Keywords: multivariate collective risk model, ruin probability.

Введение. Данная работа содержит результат, который можно применить в области управления финансовыми рисками в страховании. В актуарной математике всегда большое значение уделялось оценкам вероятности разорения страховщика, как в случае статической модели, так и динамической. В том и другом случае рассматривались одномерные модели, в которых предполагалось, что иски имеют независимый характер, это упрощало получение оценки вероятности разорения. В нашей работе мы получили оценку вероятности разорения для многомерной модели коллективного риска. Данная модель позволяет учесть зависимость между исками различных направлений страхования, которыми занимается страховая компания, а оценка вероятности разорения учитывает агрегированный риск разорения страховщика.

1. Многомерная модель коллективного риска. Страховая компания занимается тем, что компенсирует ущерб от страхового случая. Для этой цели из взносов страхователей создается страховой фонд. Предполагается, что страховая компания ведет свою деловую деятельность по нескольким направлениям страхования, причем для осуществления своей деятельности страховщик имеет начальный капитал, который распределен между каждым направлением. Деятельность данной организации можно представить с помощью многомерной модели коллективного риска, описанной в работе [1] (смотри также [3]). Очень часто иски, поступающие по разным направлениям страхования, имеют зависимый характер, что,

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 05-01-00583, 06-01-00626

соответственно, отражается на процессе изменения величины остатка страхового резерва. Процесс изменения остатка капитала страховщика можно представить соотношением

$$u(t) = u + c \cdot t - S(t) \ , \tag{1}$$

где

$u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$ – векторный процесс изменения остатка капитала страховщика;

$u = (u_1, \ldots, u_m)$ – начальный капитал страховщика, распределенный между направлениями страхования;

$c = (c_1, \ldots, c_m)$ – вектор интенсивности поступления премий по каждому направлению страховой деятельности;

$S(t) = (S_1(t), \ldots, S_m(t))$ – суммарные выплаты по каждому направлению, поступившие к моменту времени t;

m – число направлений страховой деятельности.

Прежде, чем перейти к результатам, полученным в рамках данной работы, обсудим ключевые особенности многомерной модели коллективного риска. В рамках данной модели, предполагается, что каждому направлению страховой деятельности соответствует свой страховой контракт. Страховой полис может включать несколько контрактов разного типа. Поэтому оговоренный в нем страховой случай, вообще говоря, может приводить к выплатам по разным типам контрактов. Для описания такой ситуации вводится многомерный индекс $i = (i_1, \ldots, i_m)$, состоящий из нулей и единиц, где $i_k = 1$, если были выплаты по контракту k-го типа, и равно 0 в противном случае. Обозначим через I множество всех возможных значений индекса i.

Далее, пусть $(N^{(i)}(t), t \geqslant 0)$ обозначает число исков, поступивших к моменту времени t и имеющих структуру, соответствующую индексу i. В классической модели риска $N^{(i)}(t)$ есть процесс Пуассона с параметром $\lambda^{(i)} \geqslant 0$. Для описания величины выплат рассмотрим последовательность случайных векторов $\{X_j^{(i)}, j \geqslant 1\}$, которые независимы для различных j, но компоненты которых для фиксированного j могут быть зависимы.

Случайный процесс $N(t) = \sum_{i \in I} N^{(i)}(t)$ показывает общее число исков, поступивших к моменту времени t. Это процесс Пуассона с параметром $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda^{(i)}$. Введем вспомогательную последовательность $\{\varepsilon_j, j \geqslant 1\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями во множестве индексов I, распределение которых задается по правилу $P(\varepsilon_j = i) = \lambda^{(i)}/\lambda$. Тогда величину выплат по вновь поступившему иску можно представить в виде

$$X_j = \sum_{i \in I} X_j^{(i)} \cdot I(\varepsilon_j = i) \ ,$$

где $I(A)$ есть индикатор события A. Векторный процесс суммарного иска можно определить теперь по формуле

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j \ . \tag{2}$$

Нетрудно показать, что производящая функция моментов для $S(t)$ имеет вид

$$M_{S(t)}(r) = \exp\{\lambda \cdot t \cdot (M_X(r) - 1)\} \ , \tag{3}$$

где $r = (r_1, \ldots, r_m)$, а

$$M_X(r) = \sum_{i \in I} M_{X^{(i)}}(r) \cdot \frac{\lambda^{(i)}}{\lambda} \tag{4}$$

есть производящая функция моментов вектора X.

2. Вероятность разорения. Поскольку в работе используется понятие «разорение», важно понимать, что означает данный термин. Анализ различных справочных источников показал, что термин «разорение» не имеет универсального и однозначного определения. Кроме того, разорение обычно ассоциируется с банкротством компании, поэтому в рамках данной работы мы вправе дать собственное определение разорению. Под разорением мы будем понимать такую ситуацию, когда хотя бы одно из подразделений страховой организации не сможет исполнить свои обязательства, т.е. не сможет выплатить компенсацию за ущерб, который был вызван страховым случаем. Это может случиться тогда, когда капитал по одному или нескольким направлениям станет отрицательным. С экономической точки зрения это означает, что имеющегося в наличии капитала недостаточно для выплаты компенсации за ущерб, т.е. размер иска в момент его поступления превышает остаток капитала сложившийся до этого момента. Поэтому капитал в момент поступления иска, рассчитываемый как разница предыдущего остатка и поступившего иска принимает отрицательное значение. (В данном случае имеется в виду капитал по одному из направлений страхования). Как было сказано ранее, в привычном понимании термин «разорение» ассоциируется с банкротством компании. На практике часто бывает так, что по некоторым направлениям капитал стал отрицательным, но с пересмотром результатов по компании в целом оказывается, что суммарный капитал остался положительным, и это будет служить гарантом исполнения обязательств страховщика. Такая ситуация может устраивать страхователя, но не страховщика как собственника. Для страховщика важно, чтобы каждое направление деятельности не было убыточным и не существовало за счет других, поскольку наиболее эффективная и конкурентоспособная компания строит свою деятельность таким образом, чтобы ни одна из отраслей не работала за счет другой. Поэтому важно, чтобы капитал по каждому из направлений страхования оставался положительным, это и будет характеризовать надежность и качество работы страховой компании. Таким образом, мы определяем момент разорения как такой момент времени t, когда впервые хотя бы один из остатков принял отрицательное значение, т.е.

$$T = \inf_{t \geqslant 0} \left(\min_{k=1,\ldots,m} u_k(t) < 0 \right) . \tag{5}$$

Наиболее важной характеристикой для нас является вероятность разорения, т.е. вероятность того, что момент разорения в конечном итоге наступит:

$$\psi(u) = P(T < \infty) . \tag{6}$$

Одним из основных результатов нашей работы является следующая теорема, позволяющая найти вероятность разорения в многомерной модели коллективного риска.

Теорема 1. *В многомерной модели коллективного риска для вероятности разорения справедлива формула*

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{M\left(e^{-Ru(T)}|T < \infty\right)} \ , \tag{7}$$

где $u = (u_1, \ldots, u_m)$ *– начальный капитал страховщика, а вектор* $R = (R_1, \ldots, R_m)$*, есть решение с положительными компонентами уравнения*

$$\lambda + c \cdot r = \lambda \cdot M_X(r) \ , \tag{8}$$

где λ *характеризует интенсивность поступления исков;* $c = (c_1, \ldots, c_m)$ *– вектор, описывающий скорость поступления премий по каждому направлению;* $M_X(r)$ *– производящая функция моментов случайного вектора исков* X*.*

Доказательство. Для доказательства теоремы рассмотрим двумерный случай, т.е. когда $m = 2$ и, соответственно, $X = (X^1, X^2)$. Доказательство для случая произвольного $m \geqslant 2$ проводится аналогично.

Остаточный процесс $u(t) = u + ct - S(t)$ состоит из двух зависимых компонент

$$u_1(t) = u_1 + c_1 t - S_1(t) \ , \ u_2(t) = u_2 + c_2 t - S_2(t) \ ,$$

где u_1, u_2 есть начальные капиталы первого и второго направления; c_1, c_2 – интенсивности поступления премий в единицу времени по первому и второму направлениям деятельности; $S_1(t), S_2(t)$ – суммарные иски по первому и второму типам контрактов, поступившие к моменту времени t. Последние величины определяются по правилу:

$$S_1 = \sum_{j=1}^{N_1(t)} X_j^1 \ , \ S_2 = \sum_{j=1}^{N_2(t)} X_j^2 \ ,$$

где $N_1(t) = N^{(10)}(t) + N^{(11)}(t)$ – считающий процесс появления исков по контрактам первого типа к моменту времени t, $N_1(t) = N^{(10)}(t) + N^{(11)}(t)$ – считающий процесс появления исков по контрактам второго типа к моменту времени t. Определим так же процесс $N(t) = N^{(10)}(t) + N^{(01)}(t) + N^{(11)}(t)$, т.е. считающий процесс появления любых исков к моменту времени t. Тогда процесс суммарного иска $S(t) = \sum\limits_{j=1}^{N(t)} X_j$ имеет сложное распределение Пуассона с параметром $\lambda \cdot t$.

Пусть $t > 0$ и вектор $r = (r_1, \ldots, r_m)$ имеет положительные компоненты. Тогда

$$M\left(e^{-r \cdot u(t)}\right) = M\left(e^{-ru(t)}|T \leqslant t\right) \cdot P(T \leqslant t) + M\left(e^{-ru(t)}|T > t\right) \cdot P(T > t) \ . \tag{9}$$

Так как

$$U(t) = u + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j = u + ct - S(t) \ ,$$

где $S(t)$ имеет сложное распределение Пуассона, то

$$M\left(e^{-r \cdot u(t)}\right) = e^{-ru - rct + \lambda t[M_X(r) - 1]} \ . \tag{10}$$

Представим величину $u(t)$ в виде

$$u(t) = u(T) + [u(t) - u(T)] = u(T) + c \cdot (t - T) - [S(t) - S(T)] \ .$$

При фиксированном $T = t^{'} \leqslant t$ величины $u(t^{'})$ и $S(t) - S(t^{'})$ независимы и $S(t) - S(t^{'})$ имеет сложное распределение Пуассона с параметром $\lambda \cdot (t - t^{'})$. Используя формулу полного математического ожидания, для первого слагаемого разложения (9) получаем следующее выражение

$$M(\exp(-r \cdot u(t)) \cdot \exp\{-r \cdot c \cdot (t - T) + \lambda \cdot (t - T) \cdot (M_X(r) - 1)\}|T \leqslant t) \times P(T \leqslant t) \ .$$

Пусть $R > 0$ есть решение уравнения (8). Тогда из соотношений (9), (10) и последнего результата получаем, что

$$e^{-R \cdot u} = M(\exp(-R \cdot u(T))|T \leqslant t) \cdot P(T \leqslant t) + M(\exp(-R \cdot u(t)|T > t) \cdot P(T > 0) \ .$$

При $t \to \infty$ первое слагаемое сходится к

$$M(\exp(-R \cdot u(T)|T < \infty) \cdot \psi(u) \ . \tag{11}$$

Покажем теперь, что второе слагаемое сходится к нулю. Положим $\alpha_1 = c_1 - \lambda \cdot m_{11} > 0$, $\alpha_2 = c_2 - \lambda \cdot m_{12} > 0$, $\beta_1^2 = \lambda \cdot m_{21} > 0$, $\beta_2^2 = \lambda \cdot m_{22} > 0$, где m_{ik} – i-й момент случайной величины X^k, $k = 1, 2$. Используя производящую функцию моментов с.в. $u(t)$, можно показать, что

$$M(u(t)) = u + \alpha \cdot t \ , \ D(u_k(t)) = \beta_k^2 \cdot t \ ,$$

где $u = (u_1, u_2)^T$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$, $\beta^2 = (\beta_1^2, \beta_2^2)^T$. Величина $u_i + \alpha_i \cdot t - \beta_i \cdot t^{2/3} > 0$, $i = 1, 2$, для достаточно больших t. Более того она стремится к ∞ при $t \to \infty$. С учетом этого получаем

$$M(e^{-R \cdot u(t)}|T > t) \cdot P(T > t) =$$

$$= M(e^{-R \cdot u(t)}|T > t, 0 \leqslant u_1(t) \leqslant u_1 + \alpha_1 \cdot t - \beta_1 \cdot t^{2/3}, 0 \leqslant u_2(t) \leqslant u_2 + \alpha_2 \cdot t - \beta_2 \cdot t^{2/3}) \times$$
$$P(T > t, 0 \leqslant u_1(t) \leqslant u_1 + \alpha_1 \cdot t - \beta_1 \cdot t^{2/3}, 0 \leqslant u_2(t) \leqslant u_2 + \alpha_2 \cdot t - \beta_2 \cdot t^{2/3}) +$$
$$+ M(e^{-R \cdot u(t)}|T > t, 0 \leqslant u_1(t) \leqslant u_1 + \alpha_1 \cdot t - \beta_1 \cdot t^{2/3}, u_2(t) > u_2 + \alpha_2 \cdot t - \beta_2 \cdot t^{2/3}) \times$$
$$P(T > t, 0 \leqslant u_1(t) \leqslant u_1 + \alpha_1 \cdot t - \beta_1 \cdot t^{2/3}, u_2(t) > u_2 + \alpha_2 \cdot t - \beta_2 \cdot t^{2/3}) +$$
$$+ M(e^{-R \cdot u(t)}|T > t, u_1(t) > u_1 + \alpha_1 \cdot t - \beta_1 \cdot t^{2/3}, 0 \leqslant u_2(t) \leqslant u_2 + \alpha_2 \cdot t - \beta_2 \cdot t^{2/3}) \times$$
$$P(T > t, u_1(t) > u_1 + \alpha_1 \cdot t - \beta_1 \cdot t^{2/3}, 0 \leqslant u_2(t) \leqslant u_2 + \alpha_2 \cdot t - \beta_2 \cdot t^{2/3}) +$$
$$+ M(e^{-R \cdot u(t)}|T > t, u_1(t) > u_1 + \alpha_1 \cdot t - \beta_1 \cdot t^{2/3}, u_2(t) > u_2 + \alpha_2 \cdot t - \beta_2 \cdot t^{2/3}) \times$$
$$P(T > t, u_1(t) > u_1 + \alpha_1 \cdot t - \beta_1 \cdot t^{2/3}, u_2(t) > u_2 + \alpha_2 \cdot t - \beta_2 \cdot t^{2/3}) \ .$$

Рассмотрим каждое слагаемое в отдельности.

Первое слагаемое

$$M(e^{-R \cdot u(t)}|T > t, 0 \leqslant u_1(t) \leqslant u_1 + \alpha_1 \cdot t - \beta_1 \cdot t^{2/3}, 0 \leqslant u_2(t) \leqslant u_2 + \alpha_2 \cdot t - \beta_2 \cdot t^{2/3}) \times$$
$$P(T > t, 0 \leqslant u_1(t) \leqslant u_1 + \alpha_1 \cdot t - \beta_1 \cdot t^{2/3}, 0 \leqslant u_2(t) \leqslant u_2 + \alpha_2 \cdot t - \beta_2 \cdot t^{2/3}) \leqslant$$

$$\leqslant P(|u_1(t) - M(u_1(t))| > \beta_1 \cdot t^{2/3}) \leqslant \frac{D(u_1(t))}{\beta_1^2 \cdot t^{4/3}} = \frac{\beta_1^2 \cdot t}{\beta_1^2 \cdot t^{4/3}} = t^{-1/3} \ ,$$

т.е. стремится к нулю при больших t.

Второе слагаемое

$$M(e^{-R\cdot u(t)}|T > t, 0 \leqslant u_1(t) \leqslant u_1 + \alpha_1 \cdot t - \beta_1 \cdot t^{2/3}, u_2(t) > u_2 + \alpha_2 \cdot t - \beta_2 \cdot t^{2/3})\times$$
$$P(T > t, 0 \leqslant u_1(t) \leqslant u_1 + \alpha_1 \cdot t - \beta_1 \cdot t^{2/3}, u_2(t) > u_2 + \alpha_2 \cdot t - \beta_2 \cdot t^{2/3}) \leqslant$$
$$\leqslant \exp(-R_2(u_2 + \alpha_2 \cdot t - \beta_2 \cdot t^{2/3})) \ ,$$

также сходится к нулю при больших t. Третье слагаемое оценивается аналогично второму.

Четвертое слагаемое

$$M(e^{-R\cdot u(t)}|T > t, u_1(t) > u_1 + \alpha_1 \cdot t - \beta_1 \cdot t^{2/3}, u_2(t) > u_2 + \alpha_2 \cdot t - \beta_2 \cdot t^{2/3})\times$$
$$P(T > t, u_1(t) > u_1 + \alpha_1 \cdot t - \beta_1 \cdot t^{2/3}, u_2(t) > u_2 + \alpha_2 \cdot t - \beta_2 \cdot t^{2/3}) \leqslant$$
$$\exp[-R_1(u_1 + \alpha_1 \cdot -\beta_1 \cdot t^{2/3}) - R_2(u_2 + \alpha_2 \cdot -\beta_2 \cdot t^{2/3})]$$

сходится к нулю при больших t.

Теорема доказана. □

3. Оценка вероятности разорения. В качестве примера использования доказанной выше теоремы мы оценим вероятность разорения для случая, когда векторы исков имеют показательные распределения. А именно, $X^{(10)}$ имеет одномерное показательное распределение с параметром β_1, $X^{(01)}$ имеет одномерное показательное распределение с параметром β_2, $X^{(11)} = (X_1^{(11)}, X_2^{(11)})$ имеет двумерное показательное распределением Маршала-Олкина с параметрами β_{11}, β_{22} и β_{12}. Хвост последнего распределения задается по формуле

$$\begin{aligned} \bar{F}^{(11)}(x_1, x_2) &:= P(X_1^{(11)} > x_1, X_2^{(11)} > x_2) \\ &= \exp\{-\beta_{11}x_1 - \beta_{22}x_2 - \beta_{12}\max(x_1, x_2)\} \ . \end{aligned} \qquad (12)$$

Данное распределение обладает свойством независимости остаточного времени жизни компонент от их возраста. Кроме того, для данного распределения справедливо неравенство

$$\bar{F}^{(11)}(x_1 + y_1, x_2 + y_2|y_1, y_2) :=$$

$$P(X_1^{(11)} > x_1 + y_1, X_2^{(11)} > x_2 + y_2|X_1^{(11)} > y_1, X_2^{(11)} > y_2) \geqslant \bar{F}^{(11)}(x_1, x_2) \ . \qquad (13)$$

Данное неравенство легко вытекает из соотношения

$$\max(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \leqslant \max(x_1 + y, x_2 + y),$$

где $y = \max(y_1, y_2)$.

В дальнейшем мы предполагаем, что между параметрами показательных распределений, упомянутых выше, имеет место следующее соотношение: $\beta_1 = \beta_{11} + \beta_{12}$, $\beta_2 = \beta_{22} + \beta_{12}$. В этом случае компоненты векторов X_j в формуле (2) будут иметь одномерные показательные распределения с параметрами β_1 и β_2.

Производящая функция моментов вектора исков $X = (X_1, X_2)$ представляется в виде

$$M_X(r) = \frac{\lambda^{(10)}}{\lambda} \cdot M_{X^{(10)}}(r) + \frac{\lambda^{(01)}}{\lambda} \cdot M_{X^{(01)}}(r) + \frac{\lambda^{(11)}}{\lambda} \cdot M_{X^{(11)}}(r) \ , \qquad (14)$$

где

$$M_{X^{(11)}}(r) = \frac{(\beta - r_1 - r_2) \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 + \beta_{11} \cdot r_1 \cdot r_2}{(\beta - r_1 - r_2) \cdot (\beta - r_1) \cdot (\beta_2 - r_2)} \ , \qquad (15)$$

$$M_{X^{(10)}}(r) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - r_1} \ , \ M_{X^{(01)}}(r) = \frac{\beta_2}{\beta_2 - r_1} \ . \qquad (16)$$

Решение уравнения (8) будем искать в виде $r = (r_1^*, r_2^*)$, где $r_1^* = \beta_1 \cdot r^*$, $r_2^* = \beta_2 \cdot r^*$, $r^* \in R^1$. В этом случае уравнение (8) превращается в некоторое квадратное уравнение относительно r^*, которое при условиях $c_1 > \lambda_1/\beta_1$, $c_2 > \lambda_2/\beta_2$, имеет положительное решение.

Чтобы воспользоваться формулой (7), нам необходимо найти оценку снизу для знаменателя в этой формуле. Пусть $A^{(i)}$ есть событие, состоящее в том, что в момент наступления разорения поступил иск со структурой i. По формуле полного математического ожидания мы имеем

$$M\left(e^{-R\cdot u(T)} | T < \infty\right) = \sum_{i \in I} M\left(e^{-R\cdot u(T)} | A^{(i)}, T < \infty\right) \cdot P(A(i)).$$

Отсюда следует, что

$$M\left(e^{-R\cdot u(T)} | T < \infty\right) \geqslant M\left(e^{-R\cdot u(T)} | A^{(11)}, T < \infty\right) \cdot P(A^{(11)}). \qquad (17)$$

В нашей модели $P(A^{(11)} = \lambda^{(11)}/\lambda$. Далее,

$$M\left(e^{-R\cdot u(T)} | A^{(11)}, T < \infty\right) \geqslant M\left(e^{-R\cdot u(T)} \cdot I(B^{(11)}) | A^{(11)}, T < \infty\right) \ , \qquad (18)$$

где $B^{(11)} = (u_1(T) < 0, u_2(T) < 0)$. Последнее математическое ожидание можно записать в виде

$$M\left(e^{-R\cdot u(T)} \cdot I(B^{(11)}) | A^{(11)}, T < \infty\right) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{R\cdot x} dF_{-u(T)}(x_1, x_2) \ . \qquad (19)$$

Известна следующая формула Юнга интегрирования по частям в двумерном пространстве:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty G(x_1, x_2) dF(x_1, x_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{F}(x_1, x_2) dG(x_1, x_2) \ ,$$

где $G(x_1, x_2)$ – некоторая функция, которая имеет конечную и положительную вариацию на каждом конечном квадрате и $G(x_1, 0) = G(0, x_2) = 0$ для любых $x_1, x_2 \geqslant 0$ (см. [4]). Пусть

$$G(x_1, x_2) = (1 - e^{R_1 x_1})(1 - e^{R_2 x_2}) \ .$$

На том множестве, где мы интегрируем,

$$\bar{F}_{-u(T)}(x_1, x_2) = P(-u_1(T) > x_1, -u_2(T) > x_2) =$$

$$P(X_1^{(11)} > x_1 + y_1, X_2^{(11)} > x_2 + y_2) \geqslant P(X_1^{(11)} > x_1, X_2^{(11)} > x_2) = \bar{F}(x_1, x_2)\ ,$$

где y_1, y_2 есть значения компонент процесса риска непосредственно перед разорением. Тогда

$$\int_0^\infty \int_0^\infty G(x_1, x_2) dF_{-u(T)}(x_1, x_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{F}_{-u(T)}(x_1, x_2) dG(x_1, x_2) \geqslant$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \bar{F}^{(11)}(x_1, x_2) dG(x_1, x_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty G(x_1, x_2) dF^{(11)}(x_1, x_2)\ .$$

Для выбранной функции $G(x_1, x_2)$ отсюда получаем

$$1 - M_{-u_1(T)}(R_1) - M_{-u_2(T)}(R_2) + M_{-u(T)}(R_1, R_2) \geqslant$$

$$1 - M_{X_1^{(11)}}(R_1) - M_{X_1^{(11)}}(R_2) + M_{X^{(11)}}(R_1, R_2)\ .$$

Так как $\bar{F}_{-u_k(T)}(x_k) \geqslant \bar{F}_{X_k^{(11)}}(x_k)$, то аналогично можно показать, что

$$M_{-u_k(T)}(R_k) \geqslant M_{X_k^{(11)}}(R_k)\ ,\ k = 1, 2. \tag{20}$$

Это дает нам следующую оценку

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{R_1 \cdot x_1 + R_2 \cdot x_2} dF_{-u(T)}(x_1, x_2) = M_{-u(T)}(R_1, R_2) \geqslant M_{X^{(11)}}(R_1, R_2)\ . \tag{21}$$

С учетом соотношений (17)-(21) и формулы (7) окончательно получаем, что вероятность разорения $\psi(u)$ допускает следующую оценку

$$\psi(u) \leqslant \frac{e^{-R \cdot u} \cdot \lambda}{M_{X^{(11)}}(R) \cdot \lambda^{(11)}}\ ,$$

где $R = (R_1, R_2)$ есть решение уравнения (8).

Данный показатель можно рассматривать, как критерий надежности работы страховщика, в который входят как параметры начальный капитал и страховые сборы (в неявном виде через параметр R). Поэтому при планировании деятельности страховой компании можно правильным образом задать параметры так, чтобы снизить риск разорения. Иными словами, успешная деятельность страховщика, в рамках данной модели, зависит от тарифной политики и от достаточности капитала. Кроме того, успешная деятельность страховщика зависит от правильной диверсификации капитала, т.е. от того каким образом распределен капитал между направлениями страхования. Данное обстоятельство вытекает из определения момента разорения.

Список литературы

[1] Иванова Н.Л., Хохлов Ю.С. Многомерная модель коллективного риска. – Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2005, № 3. С. 35-43.

[2] Asmussen, S. Ruin Probabilities. World Scientific, Singapore, 2000.

[3] Lindskog F. and McNeil A.J. Common Poisson Shock Models: Application to Insurance and Credit Risk Modeling. ASTIN Bulletin, 2003, 33(2), p. 209-238.

[4] Young, W.H. On multiple integration by parts and the second theorem of the mean."Proc. London Math. Soc., Series 2, 1917, 16, 273-93.