УДК 519.2

О ПОВЕДЕНИИ ПЛОТНОСТЕЙ МНОГОМЕРНЫХ УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ПОКАЗАТЕЛЕМ $\alpha = 1$ [1]

Архипов С.В.
Кафедра математической статистики и эконометрики
Sergey.V.Arkhipov@gmail.com

В статье рассмотрен случай квазиустойчивых случайных векторов с характеристическим показателем $\alpha = 1$. Получен уточненный вид соответствующих им характеристических функций, позволяющий вычислить старший член разложения функций плотности.

In the article case of quasistable random vectors with characteristic quantity $\alpha = 1$ is considered. More accurate form of corresponding characteristic functions proposed, which allowes computing leading term of density function decomposition.

Ключевые слова: квазиустойчивый случайный вектор, характеристическая функция.
Keywords: quasistable random vector, characteristic function.

Введение. Случайный вектор $X \in R^n$, имеющий функцию распределения $G(x)$, называется квазиустойчивым, если для любых его независимых копий X_1 и X_2 и для $\forall b_1, b_2 > 0$ существуют такие $b > 0$ и $a \in R^n,\ a \neq 0$, что

$$b_1 X_1 + b_2 X_2 \stackrel{\mathrm{d}}{=} bX + a.$$

Самым типичным представителем X является квазиустойчивое распределение с характеристическим показателем $\alpha = 1$, функции распределения $G(x)$ которого не имеют явного представления. Удалось описать соответствующие им характеристические функции $\mathfrak{g}(t)$, которые специфицируются конечной мерой $M(d\xi)$ на единичной сфере и постоянным вектором $\gamma \in R^n$. Ниже будет получен уточненный вид $\mathfrak{g}(t)$, позволяющий вычислить старший член разложения функций плотности. Сформулируем основной результат работы:

Теорема. *Пусть спектральная мера $M(d\xi)$ имеет плотность $\mu(\xi) \in L_1(S^{n-1})$. Тогда функция плотности многомерного квазиустойчивого распределения с $\alpha = 1$ может быть представлена в виде*

$$g(|x|\xi) = \frac{\mu(\xi)}{|x|^{n+1}} + r_2(x), \quad x \neq 0,$$

где $r_2(x)$ — остаточный член.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ. Грант 06-01-00626.

Описание характеристических функций квазиустойчивых законов с $\alpha = 1$ начнем с одномерного случая. Отправной точкой для получения их вида служит следующее соотношение:

$$\mathfrak{g}(t) = \exp\left\{ it\gamma + \int_0^\infty \psi(t,x)\frac{C_1}{x^2}dx + \int_{-\infty}^0 \psi(t,x)\frac{C_2}{x^2}dx \right\}, \tag{1}$$

где $C_1, C_2 \geq 0$, $\gamma \in R$.

Наиболее часто (см. [2], [4], [7]) используется представление Леви-Хинчина, в котором ядро имеет вид

$$\psi(t,x) = e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}. \tag{2}$$

В.Феллер в [6] использовал соотношение (1), в котором

$$\psi(t,x) = e^{itx} - 1 - it \cdot \sin(x). \tag{3}$$

П.Леви (1972) находил представление характеристической функции, полагая

$$\psi(t,x) = e^{itx} - 1 - itx \cdot 1_{[-1,1]}(x). \tag{4}$$

В результате вычислений (1) с функциями (2) и (4) появляется дополнительный сдвиг $\exp(it\gamma_1)$, причем константа γ_1 явно не вычислялась. Когда $\psi(t,x)$ имеет вид (3), то $\gamma_1 = 0$. Получим значение γ_1 для ядра преобразования (4). Без ограничения общности можно считать $\gamma = 0$. Выпишем отдельно интеграл для положительной полуоси

$$I = \int_0^1 (e^{itx} - 1 - itx)\frac{C_1}{x^2}dx + \int_1^\infty (e^{itx} - 1)\frac{C_1}{x^2}dx. \tag{5}$$

Некоторые сведения из теории обобщенных функций. Для вычисления (5) применим известный результат из теории обобщенных функций. Сначала введем несколько определений.

Пусть S — пространство быстро убывающих функций на R^n. Элементами пространства S являются функции $\varphi(x) \in C^\infty(R^n)$, удовлетворяющие следующему условию: для любых мультииндексов $k = (k_1, ..., k_n)$ и $l = (l_1, ..., l_n)$ существует число $C_{kl} < \infty$ такое, что $\forall x = (x_1, ..., x_n)$

$$\left| x^k \cdot \partial_x^l \varphi(x) \right| \leq C_{kl},$$

где $x^k = x_1^{k_1} \cdot ... \cdot x_n^{k_n}$ и $\partial_x^l = \dfrac{\partial^{|l|}}{\partial x_1^{l_1} ... \partial x_n^{l_n}}$.

Определение. Пространство линейных непрерывных функционалов

$$f : S(R^n) \to C$$

называется пространством медленно растущих обобщенных функций и обозначается $S'(R^n)$.

Обобщенная функция f называется регулярной, если она определяется по правилу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Важным понятием теории обобщенных функций является регуляризация функций. Проблема регуляризации состоит в определении такого функционала $f \in S'$, что

$$(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(R^n \backslash x_0),$$

где x_0-точка, в которой имеется неинтегрируемая особенность. В этом случае говорят, что функционал f регуляризует расходящийся интеграл $\int f_0(x)dx$.

Регуляризация степенных функций описана в [1], гл.I,п.1.7. Случай целых отрицательных значений показателя степени является особенным. Регуляризованное значение функционала, соответствующее функции, равной C_1/x^2, $x > 0$ и 0 при $x \le 0$, выглядит следующим образом:

$$\left(\frac{C_1}{x_+^2}, \varphi\right) = \int_0^1 (\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0))\frac{C_1}{x^2}dx + \int_1^\infty (\varphi(x) - \varphi(0))\frac{C_1}{x^2}dx. \tag{6}$$

Определим преобразование Фурье обобщенных функций. Пусть $\varphi(x) \in S$. Обозначим ее преобразование Фурье:

$$\psi(t) = F[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\varphi(x)dx$$

и соответственно, обратное преобразование Фурье:

$$\varphi(x) = F^{-1}[\psi(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\psi(t)dt.$$

В пространстве S преобразования F и F^{-1} являются автоморфизмами.

Определение. Пусть $f \in S'$. Тогда равенство

$$(f,\varphi) = \frac{1}{2\pi}(Ff,\psi) \quad \forall\varphi \in S$$

определяет обобщенную функцию

$$\tilde{f} = Ff \in S',$$

которая называется преобразованием Фурье распределения $f \in S'$.

Вычислим преобразование Фурье C_1/x_+^2 :

$$\int\limits_0^1 \overline{(\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0))}\frac{C_1}{x^2}dx + \int\limits_1^\infty \overline{(\varphi(x)-\varphi(0))}\frac{C_1}{x^2}dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty \overline{(e^{-ixt}-1+ixt)\psi(t)}dt\frac{C_1}{x^2}dx + \int\limits_1^\infty \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty \overline{(e^{-ixt}-1)\psi(t)}dt\frac{C_1}{x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int\limits_0^1 (e^{itx}-1-itx)\frac{C_1}{x^2}dx + \int\limits_1^\infty (e^{itx}-1)\frac{C_1}{x^2}dx\right\}\psi(t)dt.$$

Откуда видно, что I из (5) совпадает с преобразованием Фурье обобщенной функции C_1/x_+^2. В [1], гл.II,п.2.4 получены явные выражения этого преобразования

$$F\frac{C_1}{x_+^2} = -\frac{\pi}{2}C_1 t - i(1+\Gamma'(1))C_1 t - iC_1 t\cdot\ln(t+i0) \tag{7}$$

и, аналогично,

$$F\frac{C_2}{x_-^2} = -\frac{\pi}{2}C_2 t - i(1+\Gamma'(1))C_2 t - iC_2 t\cdot\ln(t-i0), \tag{8}$$

где

$\ln(t\pm i0) = \ln|t| \pm i\pi\theta(-x)$, $\theta(x)$ — функция Хевисайда,

$\Gamma'(1) = \mathbf{C}$ — константа Эйлера,

C_2/x_-^2 —обобщенная функция, соответствующая функции $C_2/\left|x\right|^2$ при $x<0$ и 0, когда $x\geq 0$.

Используя соотношения (7), (8), после преобразований получим

$$F\left(\frac{C_1}{x_+^2}+\frac{C_2}{x_-^2}\right) = -\frac{\pi}{2}(C_1+C_2)\left|t\right| - i(1+\mathbf{C})(C_1-C_2)t - i(C_1-C_2)t\cdot\ln\left|t\right|.$$

О представлении характеристических функций в R^1. Введем обозначение для второй характеристики

$$h(t) = \ln(\mathfrak{g}(t)).$$

Из полученного выше, имеем

$$\left(\frac{C_1}{x_+^2}+\frac{C_2}{x_-^2},\varphi\right) = \frac{1}{2\pi}\left(F\left(\frac{C_1}{x_+^2}+\frac{C_2}{x_-^2}\right),\psi\right) = \frac{1}{2\pi}(h,\psi).$$

Следовательно, характеристическая функция устойчивых распределений имеет вид

$$\mathfrak{g}(t) =$$
$$= \exp\left\{-\frac{\pi}{2}(C_1+C_2)\left|t\right| - i(1+\mathbf{C})(C_1-C_2)t - i(C_1-C_2)t\cdot\ln\left|t\right|\right\}. \tag{9}$$

Замечание. Если $C_1 = C_2$, тогда

$$\mathfrak{g}(t) = \exp\left\{-\frac{\pi}{2}(C_1 + C_2)\,|t|\right\}$$

является характеристической функцией строго устойчивых распределений (а, именно, распределения Коши).

Если положить, как обычно, $\lambda = \frac{\pi}{2}(C_1 + C_2)$, $\beta = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}$, то () преобразуется в соотношение

$$\mathfrak{g}(t) = \exp\left\{-\lambda\left(|t| + i(1 + \mathbf{C})\frac{2}{\pi}\beta \cdot t + i\frac{2}{\pi}\beta \cdot t \cdot \ln|t|\right)\right\}, \tag{10}$$

которое отличается от используемых ранее форм множителем $\exp(it\gamma_1)$, $\gamma_1 = (1 + \mathbf{C}) \cdot 2/\pi \cdot \beta$, отвечающим за сдвиг. Форма (9) более предпочтительна, чем (10). Преимущество (9) состоит в том, что в ней показатель экспоненты совпадает с преобразованием Фурье обобщенных функций C_1/x_+^2 и C_2/x_-^2. Рассматривая функцию плотности устойчивого распределения $g(x)$ как обобщенную функцию над пространством S, можно получить разложение

$$(g, \varphi) = \frac{1}{2\pi}(e^h, \psi) = \frac{1}{2\pi}(1 + h + r_2^*, \psi) = \frac{1}{2\pi}(1, \psi) + \frac{1}{2\pi}(h, \psi) + \frac{1}{2\pi}(r_2^*, \psi) =$$
$$= (\delta, \varphi) + \left(\frac{C_1}{x_+^2} + \frac{C_2}{x_-^2}, \varphi\right) + (F^{-1}r_2^*, \varphi),$$

где δ — дельта-функция, $r_2^*(t)$ — остаточный член в разложении $\exp(h(t))$. Откуда видно, что старший член разложения функции $p(x)$ равен $\frac{C_1}{x^2}$, когда $x > 0$ и $\frac{C_2}{x^2}$, когда $x < 0$.

В.М. Золотарев в [5] получил разложения $g(x)$ для $x \to \infty$ и $0 < \beta \le 1$.

О представлении характеристических функций в R^n. Перейдем к рассмотрению многомерного случая. Характеристическая функция может быть получена из нескольких представлений, среди которых выберем соответствующее (4), положив в нем $\gamma = 0$:

$$\mathfrak{g}(t) = \exp\left\{\int\limits_{S^{n-1}}\left(\int\limits_0^1 (e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x))\frac{1}{|x|^2}d|x| + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int\limits_1^\infty (e^{i(t,x)} - 1)\frac{1}{|x|^2}d|x|\right) M(d\xi)\right\}. \tag{11}$$

Далее предположим, что $M(d\xi)$ имеет плотность $\mu(\xi) \in L_1(S^{n-1})$. Так же как в одномерном случае показатель экспоненты в (11) совпадает (в смысле S'–дистрибуций) с преобразованием Фурье регуляризованной обобщенной функции $p.f.\frac{\mu(\xi)}{|x|^{n+1}}$, определяемой следующим образом

$$(p.f.\frac{\mu(\xi)}{|x|^{n+1}}, \varphi) = \int\limits_{R^n}\left(\varphi(x) - \varphi(0) - 1_{(|x|<1)}(x) \cdot \sum_{j=1}^n x_j\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right)(0)\right)\frac{\mu(\xi)}{|x|^{n+1}}dx.$$

Отметим, что при $x \neq 0$ обобщенная функция $p.f.\dfrac{\mu(\xi)}{|x|^{n+1}}$ совпадает с обычной функцией $\dfrac{\mu(\xi)}{|x|^{n+1}}$. Вычислим ее преобразование Фурье.

$$\int\limits_{S^{n-1}}\int\limits_{0}^{1}\overline{(\varphi(x)-\varphi(0)-1_{(|x|<1)}(x)\cdot\sum_{j=1}^{n}x_j\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right)(0))}\frac{1}{|x|^2}d|x|\mu(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{S^{n-1}}\int\limits_{1}^{\infty}\overline{(\varphi(x)-\varphi(0))}\frac{1}{|x|^2}d|x|\mu(\xi)d\xi=$$

$$\int\limits_{S^{n-1}}\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n}\overline{(e^{-i(x,t)}-1+i(x,t))\psi(t)}dt\frac{1}{|x|^2}d|x|\mu(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{S^{n-1}}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n}\overline{(e^{-i(x,t)}-1)\psi(t)}dt\frac{1}{|x|^2}d|x|\mu(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\left\{\int\limits_{R^n}\int\limits_{S^{n-1}}\int\limits_{0}^{1}(e^{i(x,t)}-1-i(x,t))\frac{1}{|x|^2}d|x|\mu(\xi)d\xi\psi(t)dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{R^n}\int\limits_{S^{n-1}}\int\limits_{1}^{\infty}(e^{i(x,t)}-1)\frac{1}{|x|^2}d|x|\mu(\xi)d\xi\psi(t)dt\right\}=$$

Перестановку интегралов можно обосновать с помощью теоремы Фубини. Затем разобьем интеграл по S^{n-1} на два интеграла по полусферам $S^{n-1}_{\pm}(t)=\{\xi:\xi\in S^{n-1},(t,\xi)\gtrless 0\}$ и продолжим преобразования, воспользовавшись формулой (7):

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\left\{\int\limits_{R^n}\int\limits_{S^{n-1}_{+}(t)}\int\limits_{0}^{1}\left(e^{i(x,t)}-1-i(x,t)\right)\frac{1}{|x|^2}d|x|\mu(\xi)d\xi\psi(t)dt+\right.$$

$$+\int\limits_{R^n}\int\limits_{S^{n-1}_{+}(t)}\int\limits_{1}^{\infty}\left(e^{i(x,t)}-1\right)\frac{1}{|x|^2}d|x|\mu(\xi)d\xi\psi(t)dt+$$

$$+\int\limits_{R^n}\int\limits_{S^{n-1}_{-}(t)}\int\limits_{0}^{1}\left(e^{i(x,t)}-1-i(x,t)\right)\frac{1}{|x|^2}d|x|\mu(\xi)d\xi\psi(t)dt+$$

$$+\int\limits_{R^n}\int\limits_{S_-^{n-1}(t)}\int\limits_1^\infty\left(e^{i(x,t)}-1\right)\frac{1}{|x|^2}d|x|\mu(\xi)d\xi\psi(t)dt\Bigg\}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n}\int\limits_{S^{n-1}}\left(-\frac{\pi}{2}\,|(t,\xi)|-i(1+\mathbf{C})(t,\xi)-i(t,\xi)\ln|t,\xi|\right)\mu(\xi)d\xi\psi(t)dt.$$

Из приведенной выше цепочки следует, что

$$\left(p.f.\frac{\mu(\xi)}{|x|^{n+1}},\varphi\right)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\left(\int\limits_{S^{n-1}}\left(-\frac{\pi}{2}\,|(t,\xi)|-i(1+\mathbf{C})(t,\xi)-i(t,\xi)\ln|t,\xi|\right)\mu(\xi)d\xi,\psi\right) \tag{12}$$

Значит характеристическая функция многомерных устойчивых распределений имеет следующее представление:

$$\mathfrak{g}(t)=\exp\Bigg\{i(t,\gamma)-\frac{\pi}{2}\int\limits_{S^{n-1}}|(t,\xi)|\,\mu(\xi)d\xi-i(1+\mathbf{C})\int\limits_{S^{n-1}}(t,\xi)\mu(\xi)d\xi-$$
$$-i\int\limits_{S^{n-1}}(t,\xi)\ln|(t,\xi)|\,\mu(\xi)d\xi\Bigg\}. \tag{13}$$

Замечание. Формула (13) остается справедливой, если плотность спектральной меры сосредоточена в точках на сфере, т.е.

$$\mu(\xi)=\sum_{j=1}^{L}C_j\delta(\xi-\xi_j).$$

Доказательство теоремы. Запишем формулу обращения для функций плотности многомерных устойчивых распределений в терминах обобщенных функций:

$$(g,\varphi)=\frac{1}{(2\pi)^n}(\mathfrak{g}(t),\psi)$$

Затем представим характеристическую функцию по формуле Тейлора. Тогда

$$(g,\varphi)=\frac{1}{(2\pi)^n}(1+\ln(\mathfrak{g}(t))+r_2^*,\psi)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}(1,\psi)+\frac{1}{(2\pi)^n}(\ln(\mathfrak{g}(t)),\psi)+\frac{1}{(2\pi)^n}(r_2^*,\psi).$$

Откуда, после применения $F^{-1}1=\delta$ и (12), получаем

$$(g,\varphi)=\delta+\left(p.f.\frac{\mu(\xi)}{|x|^{n+1}},\varphi\right)+(r_2,\varphi), \tag{14}$$

где

$$r_2 = F^{-1}[r_2^*].$$

Поскольку полученным обобщенным функциям соответствуют локально интегрируемые функции, то из (14) следует

$$g(|x|\xi) = \frac{\mu(\xi)}{|x|^{n+1}} + r_2(x), \quad x \neq 0.$$

Список литературы

[1] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: ГИФМЛ, т.1, 1959

[2] Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.: ГИТТЛ, 1949.

[3] Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. М.: Наука, 1972.

[4] Лукач Е. Характеристические функции. М.: Наука, 1989.

[5] Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983.

[6] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. М.: Мир, 1971.

[7] Хинчин А.Я. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.:ОНТИ, 1938.