УДК 519.95

О ВЗВЕШЕННОЙ СУММЕ ВЗАИМНО T_W-СВЯЗАННЫХ НЕЧЕТКИХ ВЕЛИЧИН

Солдатенко И.С.
Кафедра информационных технологий

В предлагаемой статье развивается исчисление взаимно T_W-связанных нечетких величин (для случая слабой треугольной нормы T_W). Получены методы идентификации функции распределения возможностей взвешенной T_W-суммы для случаев, когда все левые и/или правые формы нечетких величин (L, R)-типа одинаковы, и когда они различны, формулы для расчета границ ее α-уровневых множеств.

Calculus of mutually T_W-related fuzzy variables in the case of weak triangular norm T_W is developed. Identification method of possibility distribution function of weighted T_W-sum is proposed for fuzzy variables of (L, R)-type with same and different shapes as well as formulas for computation of its α-level sets' boundaries.

Ключевые слова: взвешенная сумма, слабая t-норма T_W, T-сумма.
Keywords: weighted sum, weak t-norm T_W, T-sum.

Введение. Под взвешенной суммой нечетких величин понимается возможностная функция следующего вида:

$$f(\lambda, \gamma) = \lambda_1 A_1(\gamma) \oplus_T \lambda_2 A_2(\gamma) \oplus_T \ldots \oplus_T \lambda_n A_n(\gamma) \quad (1)$$

где $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in E^n_+$ (неотрицательный октант n-мерного Евклидова пространства), $A_j(\gamma)$ — нечеткие (возможностные) величины, понимаемые как $A_j(\cdot) : \Gamma \to E^1$, где Γ — элемент возможностного пространства $(\Gamma, \mathbb{P}(\Gamma), \pi)$ [13, 16, 1], $\oplus_T$ — операция суммирования по соответствующей t-норме T.

Взвешенные суммы такого вида используются в задачах возможностной оптимизации при определении моделей критериев и ограничений. К настоящему моменту хорошо изученным является случай, когда в качестве t-нормы выступает $T_M(x, y) = \min(x, y)$, которая моделирует условие невзаимодействия (минисвязанности, T_M-связанности) возможностных величин. Для этой t-нормы хорошо развито исчисление нечетких величин, широко используемое в возможностной оптимизации.

Для разработки методов решения задач возможностной оптимизации и ряда приложений теории возможностей, важным условием является умение аналитически находить функцию распределения возможностей взвешенных сумм вида (1), а также α-уровневые множества, необходимые для перехода к детерминированным эквивалентным аналогам для ряда постановок задач.

Нахождение функции распределения возможностей взвешенной суммы нечетких величин основывается на так называемом *исчислении возможностей* — наборе правил выполнения основных арифметических и простейших алгебраических операций над нечеткими величинами (сложение, вычитание, умножение нечеткого числа на четкое число).

В предлагаемой статье развивается исчисление взаимно T_W-связанных нечетких величин для случая слабой треугольной нормы T_W. Получены методы идентификации функции распределения возможностей взвешенной T_W-суммы вида (1) для случаев, когда все левые и/или правые формы нечетких величин $A_j(\gamma)$ одинаковы, и когда они различны, и формула для расчета границ ее α-уровневых множеств.

В первой части данной статьи приводится математический аппарат теории возможностей, необходимый для дальнейших рассуждений.

Вторая часть посвящена треугольным нормам (t-нормам). В ней также дано определение взаимно T-связанных возможностных переменных и T-суммы нечетких величин.

В третьей части рассматривается взвешенная T_W-сумма, основанная на слабой t-норме T_W. Доказываются два следствия, позволяющие установить функцию распределения возможностей взвешенной T_W-суммы нечетких величин с одинаковыми левыми (правыми) формами и T_W-суммы нечетких величин, у которых функции представления формы разные. Доказывается лемма, позволяющая найти границы α-уровневых множеств взвешенной T_W-суммы.

В заключительной четвертой части приводятся примеры определения функции распределения возможностей взвешенной T_W-суммы нечетких величин и границ ее α-уровневого множества.

1. Элементы теории возможностей. Для начала введем необходимые определения и понятия из теории возможностей [13, 16, 1, 2].

Пусть имеется множество Γ (модельное множество), $\gamma \in \Gamma$ — его элементы, $\mathbb{P}(\Gamma)$ — множество всех подмножеств множества Γ.

Определение 1. *Возможностной мерой $\pi : \Gamma \to E^1$ называется функция множества, обладающая следующими свойствами:*

1. $\pi(\oslash) = 0,\ \pi(\Gamma) = 1,$

2. $\pi\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sup_{i\in I} \pi(A_i), \forall A_i \in \mathbb{P}(\Gamma), \forall I.$

Определение 2. *Тройка $(\Gamma, \mathbb{P}(\Gamma), \pi)$ называется возможностным пространством.*

Пусть $(\Gamma, \mathbb{P}(\Gamma), \pi)$ есть возможностное пространство.

Определение 3. *Возможностная (нечеткая) величина — это вещественная функция*

$$A(\cdot) : \Gamma \to \mathbb{E}^1,$$

возможные значения которой характеризуются ее распределением возможностей $\mu_A(x)$:

$$\mu_A(x) = \pi\{\gamma \in \Gamma : A(\gamma) = x\}, \forall x \in \mathbb{E}^1 \tag{2}$$

$\mu_A(x)$ — возможность того, что A может принять значение x.

Определение 4. *Носителем возможностной величины A называется четкое подмножество:*

$$supp(A) = \{x \mid \mu_A(x) > 0\}, x \in \mathbb{E}^1 \tag{3}$$

Определение 5. *Для любой возможностной переменной A и любого $\alpha \in [0,1]$, α-уровневым множеством A^α называется:*

- $A^\alpha = \{x \in \mathbb{E}^1 \mid \mu_A(x) \geqslant \alpha\}$, *для* $\alpha \in (0,1]$,
- $A^\alpha = cl(supp(A))$, *для* $\alpha = 0$,

где $cl(supp(A))$ — замыкание носителя возможностной переменной A.

Определение 6. *Возможностная переменная A называется выпуклой, если ее функция распределения является квазивогнутой:*

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}, \lambda \in [0,1], x_1, x_2 \in \mathbb{E}^1 \tag{4}$$

Как правило, возможностные переменные на числовой прямой, которые характеризуются строго унимодальными, квазивогнутыми, полунепрерывными сверху функциями распределения и ограниченными носителями, называются *нечеткими числами*. При этом если функция принадлежности не является строго унимодальной, то возможностная переменная называется *нечетким интервалом.*

Известен следующий результат [16]. Пусть $g : \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^1$ и существует g^{-1}, A — возможностная переменная, определенная на возможностном пространстве $(\Gamma, \mathbb{P}(\Gamma), \pi)$. Тогда $B = g(A)$ называется функцией возможностной величины. При этом B — возможностная величина с распределением:

$$\mu_{g(A)}(x) = \begin{cases} \sup\limits_{u:g(u)=x} \mu_A(u) = \mu_A(g^{-1}(x)) & \forall x \in \mathbb{E}^1 \\ 0 & g^{-1}(t) = \varnothing, \forall t \in \mathbb{E}^1 \end{cases} \tag{5}$$

Для моделирования нечетких чисел и нечетких интервалов часто пользуются так называемыми нечеткими величинами (L,R)-типа [5, 6, 4].

Определение 7. *(L,R)-функциями, или функциями представления формы, называются невозрастающие, полунепрерывные сверху, определенные на неотрицательной части числовой прямой функции, обладающие следующими свойствами:*

1. $L(0) = R(0) = 1$,
2. $L(t), R(t) < 1 \quad \forall t > 0$,
3. $\lim\limits_{t\to\infty} L(t) = \lim\limits_{t\to\infty} R(t) = 0$.

Определение 8. *Возможностная величина A называется возможностной величиной (L,R)-типа, если ее распределение имеет вид:*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right), & x < a, \\ 1, & a \leqslant x \leqslant b, \\ R\left(\dfrac{x-b}{\beta}\right), & x > b. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь [a, b] — есть интервал толерантности A; a и b — соответственно, нижнее и верхнее модальные значения; α и β — коэффициенты нечеткости, позволяющие управлять нечеткостью, или «размытостью», возможностной величины.

Будем обозначать нечеткие интервалы следующим кортежом: $A = (a, b, \alpha, \beta)_{LR}$.

Если $a = b$, то нечеткий интервал сводится к *нечеткому числу*: $A = (a, \alpha, \beta)_{LR}$.

Пример 1. *Если в качестве функций представления левой и правой форм взять линейную функцию:* $L(x) = R(x) = 1 - x$, *то для случая нечетких чисел мы получаем так называемые триангулярные нечеткие переменные, а в случае нечетких интервалов — трапециевидные нечеткие переменные.*

Иногда бывает удобно пользоваться альтернативным определением возможностной величины (L, R)-типа [11].

Определение 9. *Возможностная величина A называется возможностной величиной* (L, R)*-типа, если ее распределение имеет вид:*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\,(a - x), & x < a, \\ 1, & a \leqslant x \leqslant b, \\ R\,(x - b), & x > b. \end{cases} \tag{7}$$

При этом смысл коэффициентов a и b остается прежним. В данном определении коэффициенты нечеткости в явном виде не учитываются, и функции формы рассматриваются именно в таком представлении, в котором они даны. Обозначать данные нечеткие величины мы будем как $A = (a, b, L, R)$. Очевидно, что определения 8 и 9 эквивалентны. Разница заключается в том, что первое определение позволяет рассматривать классы эквивалентности функций представления формы, в то время как второе определение рассматривает функции представления формы такими, какие они есть.

Следует также отметить, что возможностные величины (L, R)-типа удобны также и тем, что их распределения являются параметризованными, и для исчислений, построенных на некоторых t-нормах (например, хорошо известной $T_M(x, y) = \min(x, y)$), выполнение основных арифметических операций над возможностными величинами сводится к выполнению соответствующих операций над параметрами, при этом если функции представления левых (правых) форм операндов соответственно совпадают, то и у результата будет точно такая же левая (правая) форма. Данное свойство, присущее некоторым t-нормам, называется свойством сохранения формы [12].

2. Агрегирование нечеткой информации и описание условий взаимодействия нечетких величин на основе t-норм. Агрегирование нечеткой информации основано на так называемых t-нормах и t-конормах, которые расширяют операции min и max, заложенные в операциях над нечеткими подмножествами и возможностными переменными [15, 19, 14].

Определение 10. *Отображение* $T : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ *называется треугольной нормой (или t-нормой), если T — симметричное, ассоциативное, невозрастающее по каждому из аргументов и* $T(x, 1) = x$ *для любого* $x \in [0, 1]$*:*

1. $T(1, x) = x$, *ограниченность,*

2. $T(x,y) = T(y,x)$, *симметричность,*

3. $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$, *ассоциативность,*

4. $T(w,y) \leqslant T(x,z)$, *если* $w \leqslant x, y \leqslant z$, *монотонность.*

Пример 2. *Примерами некоторых хорошо известных t-норм являются:*

1. $T_W(x,y) = \begin{cases} min\{x,y\}, & \text{если } max\{x,y\} = 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$

2. *t-норма Лукашевича* $T_L(x,y) = \max\{x+y-1, 0\}$,

3. *алгебраическое произведение* $T_P(x,y) = xy$,

4. *операция взятия минимума* $T_M(x,y) = \min\{x,y\}$.

Может быть доказана следующая теорема [7]:

Теорема 1. *Если T есть t-норма, то* $\forall x, y \in [0,1]$

$$T_W(x,y) \leqslant T(x,y) \leqslant T_M(x,y).$$

Треугольные нормы T_W и T_M являются экстремальными, при этом T_M называется сильной, а T_W — слабой t-нормами. Таким образом не существует t-нормы более слабой, чем T_W, и t-нормы более сильной, чем T_M.

Все приведенные в последнем примере t-нормы связаны следующими неравенствами:

$$T_W(x,y) \leqslant T_L(x,y) \leqslant T_P(x,y) \leqslant T_M(x,y).$$

Определение 11. *t-норма T называется Архимедовой, если T является непрерывной и $T(x,x) < x$ для любого $x \in (0,1)$.*

Пример 3. *Треугольные нормы T_P и T_L являются Архимедовыми.*

Определение 12. *t-норма T называется строгой, если она строго возрастает по обоим аргументам. Нестрогая Архимедова t-норма называется нульпотентной.*

Пример 4. *Треугольная норма T_P является строгой, а T_L — нульпотентной.*

Любая Архимедова t-норма задается непрерывной убывающей функцией $f : [0,1] \to [0,\infty]$ с $f(1) = 0$:

$$T(x,y) = f^{[-1]}(f(x) + f(y)), \tag{8}$$

где $f^{[-1]}$ — это псевдообратная для f функция, определяемая как:

$$f^{[-1]}(y) := \begin{cases} f^{-1}(y) & y \in [0, f(0)] \\ 0 & y \in (f(0), \infty) \end{cases} \tag{9}$$

Функция f называется аддитивным генератором t-нормы T.

Определим теперь понятия T-связанности возможностных величин и их T-суммы.

Определение 13. *Пусть даны возможностное пространство* $(\Gamma, \mathbb{P}(\Gamma), \pi)$ *и* t-*норма* T. *Множества* $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{P}(\Gamma)$ *называются взаимно* T-*связанными, если для любого подмножества* $\{i_1, \dots, i_k\}$ *множества* $\{1, \dots, n\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\pi\Big(X_{i_1} \cup \ldots \cup X_{i_k}\Big) = T\Big(\pi(X_{i_1}), \ldots, \pi(X_{i_k})\Big),$$

где

$$T\Big(\pi(X_{i_1}), \ldots, \pi(X_{i_k})\Big) = T(T(\ldots T(T(\pi(X_{i_1}), \pi(X_{i_2})), \pi(X_{i_3})), \ldots \pi(X_{i_{k-1}})), \pi(X_{i_k}))$$

Пусть $A_1, \dots, A_n$ есть возможностные величины, определенные на возможностном пространстве $(\Gamma, \mathbb{P}(\Gamma), \pi)$.

Определение 14. *Возможностные величины* $A_1, \dots, A_n$ *называются взаимно* T-*связанными, если для любого подмножества* $\{i_1, \dots, i_k\}$ *множества* $\{1, \dots, n\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\mu_{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = \pi(\gamma \in \Gamma \mid A_{i_1}(\gamma) = x_{i_1}, \ldots, A_{i_k}(\gamma) = x_{i_k}) = \\ \pi(A_{i_1}^{-1}\{x_{i_1}\} \cap \ldots \cap A_{i_k}^{-1}\{x_{i_k}\}) = \\ T(\pi(A_{i_1}^{-1}\{x_{i_1}\}), \ldots, A_{i_k}^{-1}\{x_{i_k}\}), x_{i_j} \in \mathbb{E}^1.$$

Пусть T — некоторая t-норма, а A_1 и A_2 — нечеткие числа. Тогда функция распределения их T-суммы определяется следующим образом:

$$\mu_B(z) = \sup_{x_1 + x_2 = z} T(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)), \quad z \in \mathbb{E}^1$$

Это равенство можно переписать в виде:

$$\mu_B(z) = \sup_{x_1 + x_2 = z} f^{[-1]}(f(\mu_{A_1}(x_1)) + f(\mu_{A_2}(x_2))), \quad z \in \mathbb{E}^1$$

где f — аддитивный генератор T.

Используя свойство ассоциативности треугольной нормы, получаем для T-суммы n нечетких величин $A_1, \dots, A_n$:

$$\mu_{B_n}(z) = \sup_{\sum_{i=1}^n x_i = z} f^{[-1]}\left(\sum_{i=1}^n f(\mu_{A_i}(x_i))\right) \quad z \in \mathbb{E}^1$$

Так как f — непрерывная невозрастающая функция, получаем:

$$\mu_{B_n}(z) = f^{[-1]}\left(\inf_{\sum_{i=1}^n x_i = z} \left(\sum_{i=1}^n f(\mu_{A_i}(x_i))\right)\right) \quad z \in \mathbb{E}^1 \tag{10}$$

Самая важная особенность t-норм заключается в том, что они позволяют контролировать рост неопределенности («нечеткости»), неминуемо возникающий при выполнении арифметических операций над нечеткими числами. Например, при использовании сильной t-нормы T_M при сложении двух нечетких чисел (L, R)-типа, их коэффициенты нечеткости складываются:

$$(a, \alpha_1, \beta_1)_{LR} \oplus_M (b, \alpha_2, \beta_2)_{LR} = (a + b, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)_{LR}.$$

Коэффициент нечеткости суммы нечетких величин есть сумма соответствующих коэффициентов нечеткости операндов. Таким образом нечеткость результата возрастает. При интенсивных вычислениях она может вырасти настолько, что появляется риск потери всякого практического смысла результата.

При помощи других t-норм, отличных от T_M, можно добиться существенно более медленного роста неопределенности.

3. Взвешенная сумма, основанная на слабой t-норме T_W. Хорошо известен результат сложения n нечетких интервалов с одинаковыми формами относительно слабой t-нормы T_W.

Рассмотрим n нечетких интервалов: $A_i = (a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i)_{LR}$, $i = 1 \dots n$. Их T_W-сумма $\bigoplus_{T_W i=1}^{n} A_i$ определяется на уровне параметров распределений следующей формулой [4, 6, 9, 11, 3]:

$$\bigoplus_{T_W i=1}^{n} A_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} b_i, \max_{i=1}^{n} \alpha_i, \max_{i=1}^{n} \beta_i \right)_{LR} \tag{11}$$

Таким образом коэффициенты нечеткости суммы возможностных величин, основанной на слабой t-норме T_W, вычисляются как максимум из соответствующих коэффициентов нечеткости операндов. При этом еще раз подчеркнем, что в рассматриваемом случае функции представления формы L и R операндов являются одинаковыми.

Легко доказывается следующее следствие.

Следствие 1. *Пусть имеется n нечетких интервалов: $A_i = (a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i)_{LR}$, $i = 1 \dots n$. Тогда T_W-сумма $\bigoplus_{T_W i=1}^{n} \lambda_i A_i$, где $\lambda_i \geqslant 0$ определяется следующей формулой:*

$$\bigoplus_{T_W i=1}^{n} \lambda_i A_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i, \max_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i, \max_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_i \right)_{LR} \tag{12}$$

Обобщим теперь следствие 1 на случай взвешенной суммы нечетких величин, в которой операнды имеют различные функции представления формы: L_i, R_i, $i = 1 \dots n$.

В работе [11] было показано, что сложение любого количества нечетких интервалов, представленных в виде $A_i = (a_i, b_i, L_i, R_i)$, по любой t-норме T может быть вычислено следующим образом:

$$\bigoplus_{T i=1}^{n} A_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} b_i, \bigoplus_{T i=1}^{n} L_i, \bigoplus_{T i=1}^{n} R_i \right), \tag{13}$$

где $\bigoplus_{T i=1}^{n} S_i$ — функционал, вычисляющий по функциям представления формы операндов ($S_i, i = 1 \dots n$) функцию представления формы результата. То есть мы можем отдельно рассчитать интервал толерантности результата как сумму интервалов толерантности операндов, а затем независимо друг от друга рассчитать T-сумму левых форм операндов, получив при этом левую форму результата, и T-сумму правых форм операндов, получив при этом правую форму результата. Иными словами в формировании функции представления левой (правой) формы результата участвуют только функции представления левых (правых) форм операндов.

Пусть S_i, $i = 1 \dots n$ — функции представления формы. Из [11, 4, 8, 12] имеем, что

$$\bigoplus_{T_W\, i=1}^{n} S_i = \max\{S_1, \dots, S_n\}, \tag{14}$$

где T_W — слабая t-норма.

Используя данные результаты, легко распространить следствие 1 на случай взвешенной суммы нечетких интервалов с различными левыми и правыми формами.

Следствие 2. *Пусть $A_1, \dots, A_n$ — нечеткие интервалы (L,R)-типа: $A_i = (a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i)_{L_i R_i}$ и пусть $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1 \dots n$. Тогда:*

$$\bigoplus_{T_W\, i=1}^{n} \lambda_i A_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i, 1, 1\right)_{L^* R^*}, \tag{15}$$

где $L^* = \max\limits_{i=1}^{n} L_i\left(\dfrac{x}{\lambda_i \alpha_i}\right)$, $R^* = \max\limits_{i=1}^{n} R_i\left(\dfrac{x}{\lambda_i \beta_i}\right)$.

Доказательство. Согласно [16] для $\lambda_i A_i$ получаем:

$$\lambda_i A_i = (\lambda_i a_i, \lambda_i b_i, \lambda_i \alpha_i, \lambda_i \beta_i)_{L_i R_i} = (\lambda_i a_i, \lambda_i b_i, 1, 1)_{L_i(\frac{x}{\lambda_i \alpha})R_i(\frac{x}{\lambda_i \beta})} = \\ (\lambda_i a_i, \lambda_i b_i, 1, 1)_{L_i'(x) R_i'(x)} := (\lambda_i a_i, \lambda_i b_i, L_i'(x), R_i'(x)).$$

Следуя (13), для взвешенной T_W-суммы получаем:

$$\bigoplus_{T_W\, i=1}^{n} \lambda_i A_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i, \bigoplus_{T_W\, i=1}^{n} L_i'(x), \bigoplus_{T_W\, i=1}^{n} R_i'(x)\right),$$

Согласно (14):

$$\bigoplus_{T_W\, i=1}^{n} L_i'(x) = \max_{i=1}^{n} L_i'(x) = \max_{i=1}^{n} L_i\left(\frac{x}{\lambda_i \alpha_i}\right) = L^*$$

$$\bigoplus_{T_W\, i=1}^{n} R_i'(x) = \max_{i=1}^{n} R_i'(x) = \max_{i=1}^{n} R_i\left(\frac{x}{\lambda_i \beta_i}\right) = R^*$$

Таким образом:

$$\bigoplus_{T_W\, i=1}^{n} \lambda_i A_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i, L^*, R^*\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i, 1, 1\right)_{L^* R^*}$$

Что и требовалось доказать. □

Докажем теперь лемму, позволяющую вычислять границы α-уровневых множеств для взвешенной T_W-суммы нечетких величин. Интересно отметить, что благодаря свойству монотонности функций представления формы, для вычисления границ α-уровневого множества совсем не обязательно уметь вычислять саму функцию распределения возможностей взвешенной T_W-суммы.

Пусть f — функция представления формы. Введем следующее вспомогательное обозначение $argval$, определяемое следующим образом:

$$argval_\alpha f = \{x \mid f(x) = \alpha\} \tag{16a}$$

Для любого α из области значений функции f множество $argval_\alpha f$ является непустым, при этом если f — строго убывающая функция, то $argval_\alpha f$ состоит из одного единственного элемента. Для нестрогих функций доопределим $argval$ как:

$$argval_\alpha f = \max\{x \mid f(x) = \alpha\} \tag{16b}$$

Прежде докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — функции представления формы, $\alpha \in (0,1]$ — фиксированная константа. Тогда для $f^* = \max_{i=1}^n f_i$ имеем:*

$$x^* = argval_\alpha f^* = \max_{i=1}^{n}\{argval_\alpha f_i\} \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $x_1 = argval_\alpha f_1, \ldots, x_n = argval_\alpha f_n$. Нетрудно видеть, что $x^* \in \{x_1, \ldots, x_n\}$. Действительно, $x^* = argval_\alpha f^* \Longrightarrow \alpha = f^*(x^*) = \max_{i=1}^n f_i(x^*) = f_j(x^*)$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n\}$, из чего следует, что $x^* = argval_\alpha f_j = x_j \in \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Упорядочим все x_i по возрастанию: $x_{i_1} \leqslant \ldots \leqslant x_{i_n}$. Рассмотрим два первых элемента получившейся последовательности: x_{i_1} и x_{i_2}, и две соответствующие им функции f_{i_1} и f_{i_2}. В силу монотонности и невозрастания функций f_{i_1} и f_{i_2} имеем следующую систему неравенств:

$$\left\{\begin{array}{l} \underbrace{f_{i_1}(x_{i_1})}_{\alpha} \geqslant f_{i_1}(x_{i_2}) \\ f_{i_2}(x_{i_1}) \geqslant \underbrace{f_{i_2}(x_{i_2})}_{\alpha} \end{array}\right.$$

откуда получаем, что $f_{i_1}(x_{i_1}) \leqslant f_{i_2}(x_{i_1})$. Рассматривая попарно все заданные функции представления формы, получаем следующую систему неравенств:

$$\left\{\begin{array}{l} \underbrace{f_{i_1}(x_{i_1})}_{\alpha} \leqslant f_{i_2}(x_{i_1}) \leqslant \ldots \leqslant f_{i_n}(x_{i_1}) = f^*(x_{i_1}) \\ f_{i_1}(x_{i_2}) \leqslant \underbrace{f_{i_2}(x_{i_2})}_{\alpha} \leqslant \ldots \leqslant f_{i_n}(x_{i_2}) = f^*(x_{i_2}) \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ f_{i_1}(x_{i_n}) \leqslant f_{i_2}(x_{i_n}) \leqslant \ldots \leqslant \underbrace{f_{i_n}(x_{i_n})}_{\alpha} = f^*(x_{i_n}) \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} f^*(x_{i_1}) \geqslant \alpha \\ f^*(x_{i_2}) \geqslant \alpha \\ \qquad \ldots \\ f^*(x_{i_n}) = \alpha \end{array}\right.$$

Из чего следует, что $x^* = x_{i_n}$, однако в силу упорядоченности последовательности $\{x_{i_j}\}$ имеем, что $x_{i_n} = \max_{i=1}^n\{x_i\}$. Что и требовалось доказать. □

Лемма 2. *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — нечеткие интервалы (L, R)-типа: $A_i = (a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i)_{L_i R_i}$ и пусть $\lambda_i > 0$, $i = 1 \ldots n$. Тогда границы α-уровневого множества взвешенной T_W-суммы нечетких величин A_i определяются по следующей формуле:*

$$\left[\bigoplus_{T_W i=1}^{n} \lambda_i A_i\right]^{\alpha} = \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i - \max_{i=1}^{n} l_i^*, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i + \max_{i=1}^{n} r_i^*\right], \quad \alpha \in (0,1] \qquad (18)$$

где $l_i^* = argval_\alpha L_i \left(\frac{x}{\lambda_i \alpha_i}\right)$, $r_i^* = argval_\alpha R_i \left(\frac{x}{\lambda_i \beta_i}\right)$.

Доказательство. Очевидно, что любое α-уровневое множество взвешенной T_W-суммы нечетких величин рассматриваемого типа содержит в себе интервал толерантности взвешенной T_W-суммы, определяемый как $[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i]$.

Далее, согласно упомянутым выше работам, в определении левой (правой) формы результата играют роль только левые (правые) формы операндов. Рассмотрим левые формы операндов. Затем те же рассуждения можно будет применить и к правым формам операндов.

Согласно следствию 2 левая форма взвешенной суммы имеет вид:

$$L^* = \max_{i=1}^{n} L_i \left(\frac{x}{\lambda_i \alpha_i}\right).$$

Воспользовавшись леммой 1, находим такое x^*, что $L^*(x^*) = \alpha$, а именно:

$$x^* = argval_\alpha L^* = \max_{i=1}^{n} \left\{ argval_\alpha L_i \left(\frac{x}{\lambda_i \alpha_i}\right)\right\} = \max_{i=1}^{n} l_i^*.$$

Нетрудно видеть, что x^* является приращением, которое необходимо вычесть из левой границы интервала толерантности взвешенной суммы, для того чтобы получить левую границу α-уровневого множества.

Что и требовалось доказать. □

4. Примеры идентификации функции распределения T_W-суммы и расчета границ α-уровневых множеств.

Пример 1. *Пусть две нечеткие величины A и B заданы своими функциями распределения возможностей:*

$$\mu_A(x) = \min\left\{1, \frac{5}{1 + |3 - x|}\right\}, \quad \mu_B(x) = \max\left\{0, 1 - \frac{(x-2)^2}{16}\right\} \quad \textit{(см.рис.1)}$$

Согласно определению 9, $A = (-1, 7, S, S)$ и $B = (2, 2, R, R)$, где

$$S(x) = \frac{5}{5 + x}, \quad R(x) = \max\left\{0, 1 - \frac{x^2}{16}\right\} \quad \textit{(см.рис.2)}$$

Пусть $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Найдем распределение возможностей следующей нечеткой величины: $2A \oplus_{T_W} 3B$.

Согласно следствию 1:

$$Z = 2A \oplus_{T_W} 3B = (4, 20, P, P)\,, \textit{(см.рис.5)}$$

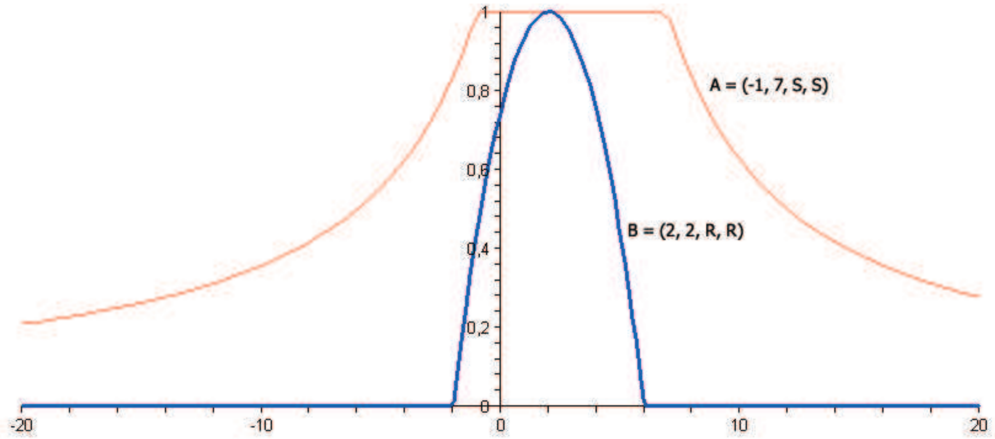

Рис. 1: Нечеткие величины A и B

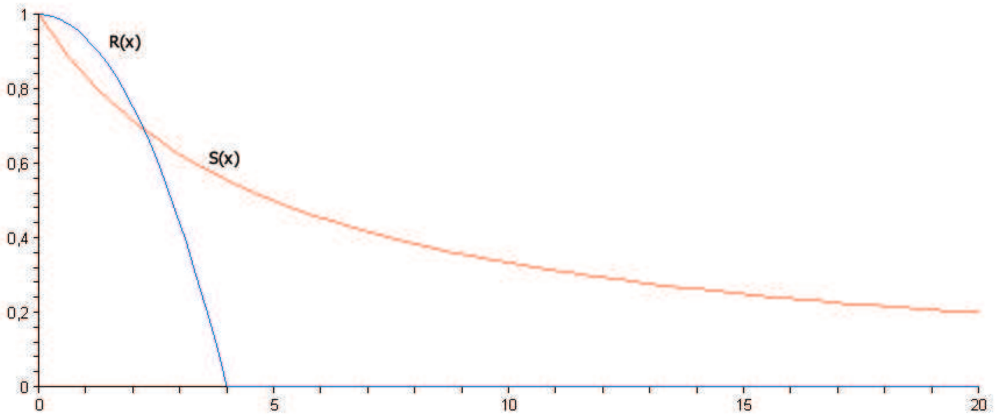

Рис. 2: Функции представления формы величин A и B

где (см.рис.3,4)

$$P = \max\left\{S\left(\frac{x}{2}\right), R\left(\frac{x}{3}\right)\right\} = \max\left\{\frac{5}{5+x/2}, \max\left\{0, 1-\frac{x^2}{144}\right\}\right\} =$$

$$= \begin{cases} 1-\dfrac{x^2}{144}, & 0 \leqslant x \leqslant 8 \\ \dfrac{5}{5+x/2}, & x > 8 \end{cases}$$

В результате решения кубического уравнения $\frac{5}{5+x/2} = 1 - \frac{x^2}{144}$, *получаем три корня* $x_1 = 0$, $x_2 = -18$ *и* $x_3 = 8$, *из которых нам подходит только один* $x_3 = 8$.

На рисунке 6 изображены одновременно возможностные величины A, B *и их взвешенная* T_W*-сумма.*

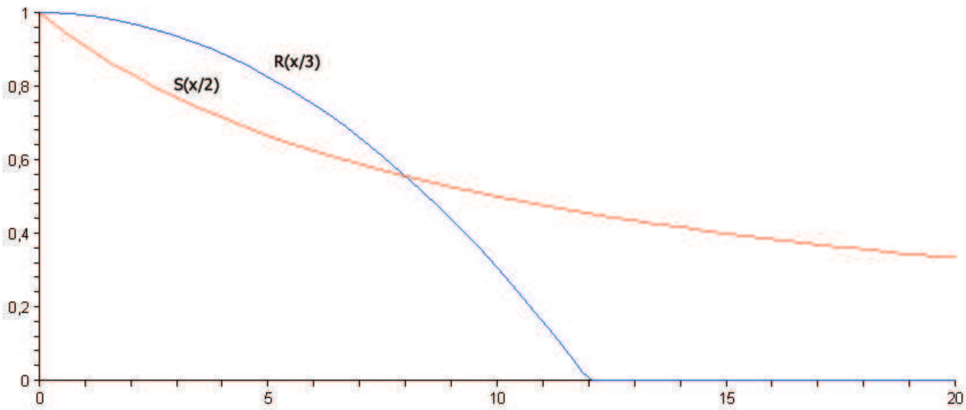

Рис. 3: Функции представления формы после умножения на коэффициенты λ_1 и λ_2

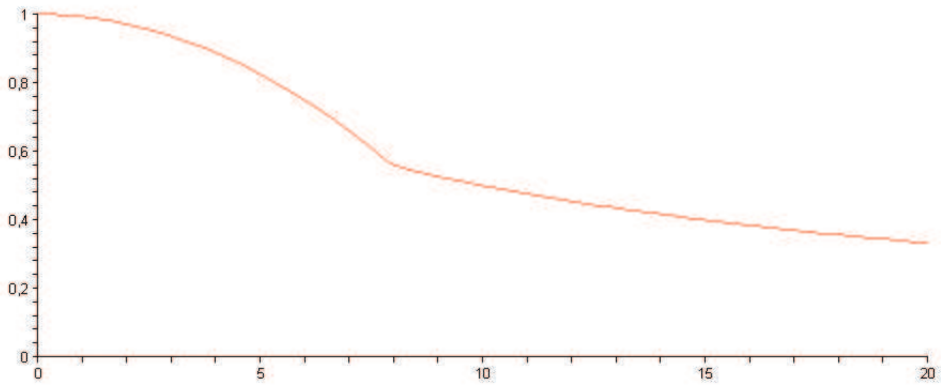

Рис. 4: Функция представления формы взвешенной T_W-суммы

Пример 2. *В условиях примера 1 найдем границы α-уровневого множества для $\alpha_1 = 0.5$.*

Согласно лемме 2:

$$[2A \oplus_{T_W} 3B]^{0.5} = [4 - \max\{x_1^*, x_2^*\}, 20 + \max\{x_1^*, x_2^*\}]$$

где

$$x_1^* = argval_{0.5}\left(S\left(\frac{x}{2}\right)\right) = argval_{0.5}\left(\frac{5}{5 + x/2}\right) = 10$$

$$x_2^* = argval_{0.5}\left(R\left(\frac{x}{3}\right)\right) = argval_{0.5}\left(1 - \frac{x^2}{144}\right) \approx 8.485$$

Так как $\max\{10, 8.485\} = 10$, *то получаем*

$$[2A \oplus_{T_W} 3B]^{0.5} = [4 - 10, 20 + 10] = [-6, 30] \quad \textit{(см.рис.5)}$$

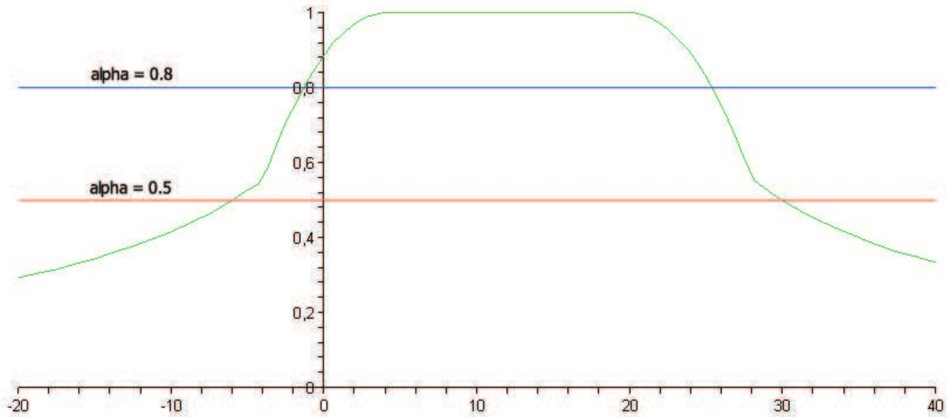

Рис. 5: Распределение взвешенной T_W-суммы и α-уровневые множества

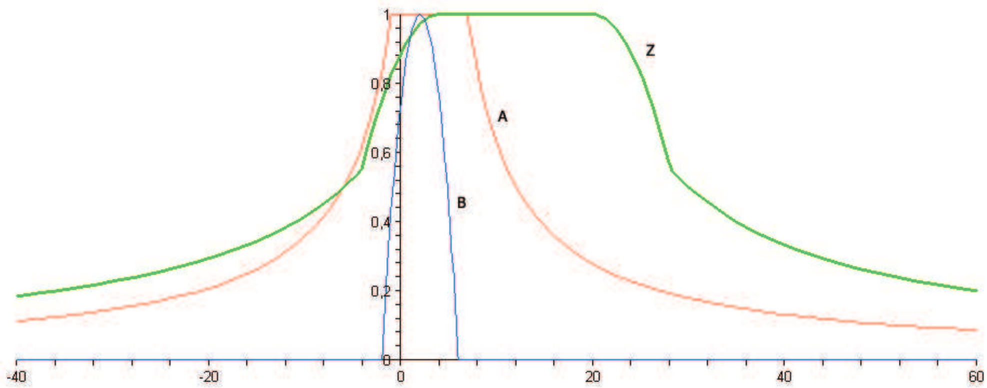

Рис. 6: Нечеткие величины A и B и их взвешенная T_W-сумма

Пример 3. *В условиях примера 1 найдем границы α-уровневого множества для $\alpha_2 = 0.8$.*

Согласно лемме 2:

$$[2A \oplus_{T_W} 3B]^{0.8} = [4 - \max\{x_1^*, x_2^*\}, 20 + \max\{x_1^*, x_2^*\}]$$

где

$$x_1^* = argval_{0.8}\left(S\left(\frac{x}{2}\right)\right) = argval_{0.8}\left(\frac{5}{5 + x/2}\right) = 2.5$$

$$x_2^* = argval_{0.8}\left(R\left(\frac{x}{3}\right)\right) = argval_{0.8}\left(1 - \frac{x^2}{144}\right) \approx 5.367$$

Так как $\max\{2.5, 5.367\} = 5.367$, *то получаем*

$$[2A \oplus_{T_W} 3B]^{0.8} = [4 - 5.367, 20 + 5.367] = [-1.367, 25.367] \quad \textit{(см.рис.5)}$$

Заключение. В работе развито исчисление взаимно T-связанных нечетких величин. Получены результаты, позволяющие идентифицировать функции распределения суммы взаимно T_W-связанных нечетких величин и рассчитывать их α-уровневые множества. В плане развития полученных результатов в дальнейшем представляется целесообразным распространить эти результаты и на другие t-нормы.

Список литературы

[1] Д.Дюбуа, А.Прад, Теория возможностей / Пер. с франц. М.: Радио и связь, 1990.

[2] А.В.Язенин, К задаче максимизации возможности достижения нечеткой цели // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. N4, с.120-123.

[3] B.De Baets, A. Marková-Stupňanová, Analytical expressions for the addition of fuzzy intervals, Fuzzy Sets and Systems 91 (1997) 203-213.

[4] D.Dubois and H.Prade, Fuzzy numbers: an overview, in: J. Bezdek (Ed.), Analysis of Fuzzy Information vol. 2, CRC-Press, Boca Raton, 1988, pp. 3-39.

[5] D.Dubois and H.Prade, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, New York, 1980.

[6] D.Dubois and H.Prade, Additions of interactive fuzzy numbers, IEEE Trans. Automat. Control 26 (1981) 926-936.

[7] E.P.Klement, R.Mesiar, E.Pap, A characterization of the ordering of continous t-norms, Fuzzy Sets and Systems 86 (1997) 189-195.

[8] A. Marková-Stupňanová, A note to the addition of fuzzy numbers based on a continous Archimedean T-norm, Fuzzy Sets and Systems 91 (1997) 253-258.

[9] R.Mesiar, Computation of $L-R$-fuzzy numbers, in: Proc. 5th Internat. Workshop on Current Issues in Fuzzy Technologies, Trento, Italy, 1995, pp.165-176.

[10] R.Mesiar, A note to the T-sum of $L-R$ fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems 79 (1996) 259-261.

[11] R.Mesiar, Triangular-norm-based addition of fuzzy intervals, Fuzzy Sets and Systems 91 (1997) 231-237.

[12] R.Mesiar, Shape preserving additions of fuzzy intervals, Fuzzy Sets and Systems 86 (1997) 73-78.

[13] S.Nahmias, Fuzzy Variables, Fuzzy Sets and Systems 1 (1978) 97-110.

[14] H.T.Nguyen, E.A.Walker, A first cours in fuzzy logic. CRC Press, 1997.

[15] B.Schweizer, A.Sklar, Probabilistic metric spaces, North Holland, New York, 1983.

[16] A.V.Yazenin, M.Wagenknecht, Possibilistic optimization, Brandenburgische Technische Universitat, Cottbus, Germany, 1996.

[17] L.A.Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control, 8(1965) 338-353.

[18] L.A.Zadeh, The concept of linguistic variable and its applications to approximate reasoning. Parts I, II, III, Information Sciences, 8(1975) 199-251; 8(1975) 301-357; 9(1975) 43-80.

[19] H.J.Zimmermann, Fuzzy Set Theory and Its Applications, Kluwer, Dordrecht, 1991.