ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.54

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ КВАЗИКОНФОРМНЫХ И ЛОКАЛЬНО ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Шеретов В.Г., Суетин В.Ю.
Кафедра математического анализа

В новых классах локально однолистных гармонических отображений единичного круга, представимых структурными формулами, получены оценки коэффициентов и констант Кебе

Coefficient and Koebe constant estimates are obtained in some new classes of conformal and locally harmonic mappings wich are presented by structural formulae.

Ключевые слова: локально однолистные гармонические отображения, константа Кёбе.
Keywords: locally univalent harmonic mappings, Koebe constant.

1. Шейл-Смолл и Клуни [1] ввели в рассмотрение класс S_H^0 всех комплексно-значных гармонических сохраняющих ориентацию однолистных отображений $f = \bar{g}+h$, определенных в Δ и нормированных условиями $f(0) = 0,\ f_z(0) = 1,\ f_{\bar{z}}(0) = 0$. Голоморфные функции g и h имеют в круге Δ тейлоровские разложения

$$h(z) = z + \sum_{\nu\geq 2} a_\nu z^\nu,\ \ g(z) = \sum_{\nu\geq 2} b_\nu z^\nu,$$

определяющие коэффициенты гармонического отображения f.

Класс локально однолистных гармонических отображений $\tilde{S}_H^0$ с той же нормировкой рассматривался Л. Шауброк [2] и В.Г. Шеретовым [4-5]. Классы локально однолистных гармонических отображений с иными нормировками рассматривались В.В. Старковым [3], Дюреном, Хенгартнером, Озтурком, Дорффом и другими. Обозначим через $\tilde{S}$ класс голоморфных и локально однолистных в Δ функций с нормировкой $F(0) = F'(0) - 1 = 0$, C – класс Каратеодори функций, голоморфных в Δ и имеющих значения с положительной вещественной частью. Согласно [4], для произвольного $\beta \in \mathbb{R}$ каждому элементу $f = \bar{g} + h \in \tilde{S}_H^0$ отвечает единственная пара функций $F \in \tilde{S}$, $H \in C$, определяемых по формулам $F = h + e^{i\beta}g$ и $H = (1 - e^{i\beta}g'/h')/(1 + e^{i\beta}g'/h')$ соответственно. Верно и обратное утверждение: любая пара элементов $F \in \tilde{S},\ H \in C$ порождает отображение $f \in \tilde{S}_H^0$ по формуле

$$f(z) = \frac{1}{2}\int_0^z (1+H)F'dt + \frac{1}{2}e^{i\beta}\overline{\int_0^z (1-H)F'dt}. \qquad (1)$$

В [4] введен в рассмотрение класс $\hat{S}_H^0$, состоящий из локально однолистных гармонических отображений, представимых по формуле (1) с генераторами $F \in$

S, $H \in C$, получены оценки коэффициентов и обобщенной константы Кебе для $\hat{S}^0_H$.

2. Введем новый класс функций $\hat{S}^0_H\,[k]$, состоящий из k–квазиконформных функций $f \in \hat{S}^0_H$. Необходимым и достаточным условием k-квазиконформности отображения вида (1) является принадлежность генератора $H(z) = 1 + \sum_1^\infty c_\nu\, z^\nu$ классу $C[k]$, образованного заданными в единичном круге Δ функциями

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + k\,e^{it} z}{1 - k\,e^{it} z} d\,\rho(t), \qquad (2)$$

где ρ — вероятностная мера на σ–алгебре борелевских подмножеств отрезка $[0,\,2\pi]$, k — параметр подкласса, $0 < k < 1$. Ясно, что класс C[k] является подклассом класса Каратеодори.

Отметим некоторые очевидные свойства функций класса $C[k]$, которые пригодятся в дальнейшем:

Разложив в ряд подынтегральную функцию в (2) и выполнив почленное интегрирование, получим

Свойство 1. *Пусть $p(z) = 1 + \sum_{n\geq 1} p_n\, z^n$ – тейлоровские разложение функции класса $C[k]$. Для коэффициентов разложения имеют место точные оценки $|p_n| \leq 2\,k^n$, причем экстремалями являются функции $p^*_\tau(z) = (1 + ke^{i\tau}z)/(1 - ke^{i\tau}z)$, $\tau \in \mathbb{R}$.*

Свойство 2. *Для $p(z) \in C[k]$ в каждой точке $z \in \Delta$ выполняются точные оценки*

$$\frac{1 - k\,|z|}{1 + k\,|z|} \leq |p(z)| \leq \frac{1 + k\,|z|}{1 - k\,|z|}.$$

Равенства достигаются на функциях вида $p^*_\tau(z)$.

Рассмотрим подкласс S^*_k класса S^* звездных однолистных функций f, таких, что $h(z) = z\,f'(z)/f(z)$ принадлежат классу $C[k]$.

Свойство 3. *Соответствующие (1) представления функций из класса S^*_k и их производных имеют вид*

$$f(z) = z\,\exp\Big[\int_0^{2\pi} \log(1 - k\,e^{i\tau} z)^{-2}\,d\rho(\tau)\Big], \qquad (3)$$

$$f'(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + k\,e^{i\tau} z}{1 - k\,e^{i\tau} z}\,d\rho(\tau) \cdot \exp\Big[\int_0^{2\pi} \log(1 - k\,e^{i\tau} z)^{-2}\,d\rho(\tau)\Big]. \qquad (4)$$

Под знаком интеграла стоит однозначная ветвь логарифма, принимающая нулевое значение в начале координат.

Свойство 4. *Для каждой функции $f \in S^*_k$ в произвольно фиксированной точке $z \in \Delta$ выполняются точные двухсторонние оценки*

$$\frac{|z|}{(1 + k\,|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - k\,|z|)^2}, \qquad (5a)$$

$$\frac{1 - k\,|z|}{(1 + k\,|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1 + k\,|z|}{(1 - k\,|z|)^3}. \qquad (5b)$$

Равенства достигаются на подходящих вращениях функции

$$f^*(z) = z/(1 - k\,z)^2.$$

Свойство 5. *Пусть $f(z) = z + \sum_{n\geq 2} a_n\, z^n$ – тейлоровские разложение функции класса S^*_k. Для коэффициентов разложения при $n \geq 2$ имеют место точные оценки $|a_n| \leq n\, k^{n-1}$, причем экстремалями являются функции $f^*_\tau(z) = z/(1 - k\, e^{i\tau} z)^2$, где $\tau \in \mathbb{R}$.*

3. Рассмотрим задачу об оценках коэффициентов функций класса $\hat{S}^0_H\,[k]$. Согласно теореме де Бранжа коэффициенты разложений

$$F(z) = z + \sum_{\nu\geq 2} \alpha_\nu z^\nu$$

функций класса S в единичном круге удовлетворяют точным неравенствам $|\alpha_\nu| \leqslant \nu$ для всех $\nu \geqslant 2$. Подстановка рядов, представляющих f, F и H, в формулу (1), почленное интегрирование и сравнение коэффициентов при одинаковых степенях z и $\overline{z}$ дают

$$a_1 = \alpha_1 = 1, \quad a_n = \alpha_n + \frac{1}{2n} \sum_{\mu+\nu=n-1,\nu>0} c_\nu \mu \alpha_\mu \text{ для всех } n \geqslant 2,$$

$$b_n = -e^{-i\beta}(-\frac{1}{2n} \sum_{\mu+\nu=n-1,\nu>0} c_\nu \mu \alpha_\mu) \text{ для всех } n \geqslant 2.$$

Принимая во внимание теорему де Бранжа и свойство 1 из предыдущего пункта, находим для всех $n \geqslant 2$

$$||a_n| - |b_n|| \leqslant |a_n - e^{i\beta} b_n| = |\alpha_n| \leqslant n; \tag{6a}$$

$$|b_n| = \frac{1}{2n}\Big| \sum_{\mu+\nu=n-1,\nu>0} c_\nu \mu a_\mu \Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{\mu+\nu=n-1,\,\nu>0} k^\nu \mu |a_\mu| \leq \frac{1}{n} \sum_{\mu+\nu=n-1,\,\nu>0} k^{n-\mu-1} \mu^2,$$

следовательно

$$|b_n| \leq \frac{k^{n-1}}{n} \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{\mu^2}{k^\mu}, \ |a_n| \leq n + \frac{k^{n-1}}{n} \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{\mu^2}{k^\mu}. \tag{6b - c}$$

для всех $n \geqslant 2$. Доказана

Теорема 1. *Для коэффициентов a_n и b_n функций класса $\hat{S}^0_H[k]$ имеют место точные неравенства (6a-c). Равенства в них выполняются одновременно для всех $n \geqslant 2$, причем экстремалями являются функции f вида (1), генерируемые $F = z/(1 - z)^2 \in S$ и $H = (1 + k\,z)/(1 - k\,z) \in C$ и их вращения, а для (6a) также функции Кебе $F_\theta = z/(1 + e^{i\theta} z)^2$, $\theta \in [0, 2\pi)$.*

В пределе при $k \to 1$ из (6a) – (6c) для всех $n \geq 2$ следуют точные оценки в классе $\hat{S}^0_H$ локально однолистных гармонических отображений, представимых формулой (1) с генераторами $F \in S$, $H \in C$:

$$||a_n| - |b_n|| \leq n; |b_n| \leq \frac{(n-1)(2n-1)}{6}; \ |a_n| \leq \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Вопрос о справедливости таких оценок для коэффициентов однолистных в Δ функций $f \in \tilde{S}_H^0$, образующих класс S_H^0, были поставлены, наряду с другими, Клуни и Шейл-Смоллом [1], которые дали положительные ответы в случае типично вещественных функций. В [4] эти оценки были получены для класса $\hat{S}_H^0$. Вопрос о включении класса S_H^0 в $\hat{S}_H^0$ является открытым.

4. Рассмотрим задачу о вычислении обобщенной константы Кебе для класса $\hat{S}_H^0[k]$, то есть радиуса наибольшего открытого круга с центром в начале координат, целиком содержащегося на одном листе римановой поверхности $f(\Delta)$ любой функции $f \in \hat{S}_H^0[k]$ и содержащем f – образ достаточно малой окрестности начала координат. Рассмотрим звездную относительно начала координат однолистную подобласть D^* римановой поверхности $f(\Delta)$, образуемую отрезками l_φ лучей, выходящих из точки $w = 0$ под полярными углами $\varphi \in [0, 2\pi]$. Если l_φ не совпадает со всем лучом, то его отличный от начала координат конец является граничной точкой римановой поверхности и не принадлежит D^*. В общем случае риманова поверхность $f(\Delta)$ многолистна над $\mathbb{C}$, и множество точек на ней, имеющих полярную координату φ, представляет собой конечное или счетное объединение попарно не пересекающихся на $f(\Delta)$ полуоткрытого и открытых интервалов соответствующего луча. В качестве l_φ выбирается полуоткрытый интервал, имеющий общие точки с f – образом достаточно малой окрестности начала координат.

Пусть w_0 – ближайшая к началу координат точка границы множества D^*, $L = [0, w_0) = l_\varphi \in D^*$; $f^{-1}(L)$ -прообраз L при отображении f. Рассмотрим параметрическое уравнение $w \in D^* : w = sw_0, 0 \leqslant s < 1$ промежутка L_φ и окружность $\gamma_r(0) := \{|z| = r\}$, где $r = |f^{-1}(sw_0)|$, $s \in [0, 1)$, и в качестве f^{-1} взята ветвь обратной к f функции с областью определения D^* и нормировкой $f^{-1}(0) = 0$. Обозначим через L_s отрезок на L с концами $w = 0$ и $w = sw_0$ и положим $\lambda_r := f^{-1}(L_s)$.

Вычисления с использованием формулы (1) и учетом положительности якобиана $J_f(z) = |H(z) + 1|^2 - |H(z) - 1|^2$ отображения f дают

$$|sw_0| = \int_{L_s} |dw| \geq \int_{\lambda_r} (|f_z| - |f_{\overline{z}}|)|dz| \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \int_{\lambda_r} |F'(z)|(|H + 1| - |H - 1|)dr \geq \frac{1}{2} \int_0^r |F'(z)|(1 - k(r))|H(z) + 1|\, dr.$$

Величина $k(r) := \|\mu_f|_{\Delta_r}\|_\infty$, то есть существенная норма комплексной характеристики $\mu_f = e^{i\beta} \dfrac{\overline{(1 - H)\, F'}}{(1 + H)\, F'}$ отображения $f \in \tilde{S}_H^0[k]$ в круге $\Delta_r := \{z : |z| \leqslant r\}, 0 < r < 1$, не превосходит $k\, r$, причем оценка точная. Этот факт вытекает из классической леммы Шварца, примененной к функции $\omega(z) = (H - 1)/(H + 1)$ в круге Δ_r. Итак, получен следующий промежуточный результат.

Лемма 1. *В каждом круге Δ_r при $0 \leqslant r < 1$ произвольная функция $f \in \hat{S}_H^0[k]$ является $k(r)$ – квазиконформной, где $k(r) \leqslant k\, r$, причем равенство не зависит от выбора $F \in S$ и достигается при $H(z) = (1 + k\, e^{i\alpha} z)/(1 - k\, e^{i\alpha} z)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Воспользуемся леммой 1 и теоремой искажения в классе S, в силу которой

$$|F'(z)| \geq \frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3}$$

(экстремали – функции Кебе). Возвращаясь к оценке снизу величины $|sw_0| = |f(z_r)|$, находим

$$|sw_0| \geq \frac{1}{2}\int_0^r |H(t)+1|(1-k\,t)\frac{1-t}{(1+t)^3}dt.$$

С помощью интегрального представления функции $H \in C[k]$ находим

$$|H(z)+1| \geq Re\Big(1+\int_0^{2\pi}\frac{1+k\,e^{i\theta}}{1-k\,e^{i\theta}z}\,d\rho(\theta)\Big) \geq \frac{2}{1+k\,r}$$

для любой $H \in C[k]$ при $|z| \leqslant r$ с экстремалями в виде вращений функции $H^*(z) = (1-k\,e^{i\tau}z)(1+k\,e^{i\tau}z)$.

Соединяя две последние оценки, получим

$$|sw_0| \geq \int_0^r \frac{(1-t)(1-k\,t)}{(1+t)^3\,(1+k\,t)}dt, \tag{7}$$

В пределе при $k \to 1$ будем иметь

$$|sw_0| \geqslant \frac{1}{6}\Big[1-\Big(\frac{1-r}{1+r}\Big)^3\Big].$$

Переменные r и s стремятся к единице одновременно. Устремляя в (7) $s \to 1$, приходим к итоговой оценке

$$|w_0| \geq \int_0^1 \frac{(1-t)(1-k\,t)}{(1+t)^3\,(1+k\,t)}dt. \tag{8}$$

При этом $Q(1/3) \approx 0.2164$; $Q(1/2) \approx 0.2022$; $Q(2/3) \approx 0.1893$. Предел правой части последнего неравенства при $k \to 1$ равен $1/6$

Эта оценка точна, равенство в ней достигается на вращениях функции f^*, представимой по формуле (1) с генераторами

$$F(z) = z/(1+z)^2,\ H(z) = (1+k\,z)/(1-k\,z).$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Обобщенная константа Кебе $Q(k)$ для класса $\hat{S}^0_H[k]$ равна интегралу в правой части неравенства (8).*

Среди проблем, поставленных в [3], имеется гипотеза о том, что константа Кебе для класса S^0_H, то есть радиус наибольшего открытого круга с центром в начале координат, лежащего в $f(\Delta)$ для любого $f \in S^0_H$, равна $1/6$. Из теоремы 2 следует, что константа Кебе для подкласса однолистных функций из $\hat{S}^0_H[k]$ в пределе при $k \to 1$ равна $1/6$.

5. Изложенные факты можно перенести на классы $\hat{S}^*_H\,[k,\,q]$ локально однолистных отображений вида (1) с генераторами $F \in S^*_q$, $h \in C[k]$.

Теорема 3. *Обобщенная константа Кебе для класса $\hat{S}^*_H[k,\,q]$ выражается интегралом*

$$\int_0^1 \frac{(1-q\,t)}{(1+q\,t)^3}\,\frac{1-k\,t}{1+k\,t}\,dt.$$

При $q = k$ эта константа равна $(3+k^2)/3(1+k)^3$. Ее предельное значение при $k \to 1$ равно 1/6.

Введем обозначение

$$\psi(n,\,r,\,q) := \frac{q^{n-2}}{n}\sum_{\mu=1}^{n-1}\mu^2\,(\frac{k}{q})^{\mu-1}.$$

Теорема 4. *Для коэффициентов a_n и b_n функций класса $\hat{S}_H^*[q,\,k]$ имеют место точные неравенства*

$$||a_n|-|b_n|| \le n\,q^{n-1}, \tag{9a}$$

$$|b_n| \le \psi(n,\,r,\,q), \tag{9b}$$

$$|a_n| \le n\,q^{n-1} + \psi(n,\,r,\,q). \tag{9c}$$

Равенства в них выполняются одновременно для всех $n \geqslant 2$, экстремалями являются функции f вида (1), генерируемые $F = z/(1-q\,z)^2 \in S$ и $H = (1+k\,z)/(1-k\,z) \in C$ и их вращения, а для (9a) также функции $F_\theta = z/(1+q\,e^{i\theta}z)^2$, $\theta \in [0,2\pi)$.

В частном случае $q = k$ получаем точные оценки $||a_n|-|b_n|| \le n\,k^{n-1}$,

$$|b_n| \le \frac{(n-1)(2n-1)}{6}\,k^{n-2},\, |a_n| \le n\,k^{n-1} + \frac{(n-1)(2n-1)}{6}\,k^{n-2}$$

для всех $n \ge 2$.

Список литературы

[1] Clunie J., Sheil-Small T. Harmonic Univalent Functions // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1. Math. 1984. V. 9. P. 3 – 25.

[2] Shaubroeck L.E. Growth, distortion and coefficient bounds for plane harmonic mappings convex in one direction // Rocky Mountain Journal of Mathematics. V.31. N.2. 2001. P. 625-639.

[3] Starkov V.V. Harmonic locally quasiconformal mappings // Annales Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Ser. A. 1995. V.49. P.183-197.

[4] Sheretov V.G. Structural Formulae Method for the Planar Harmonic Mappings // International Conference on Geometric Function Theory dedicated to Herbert Grötzsch 1902 – 1993. Abstracts. P. 19. Halle, 2002.

[5] Шеретов В.Г. Метод структурных формул в геометрической теории плоских гармонических отображений // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2002. С. 30 – 39.