МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ

В.Б. Реут

Кафедра автоматизированной обработки экономической информации и статистики ТвГУ

ПЛАНИРОВАНИЕ ЦЕН И ОБЪЕМОВ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕСУРСАХ

The analytical approach to definition of optimum prices and volumes of output (by criterion of a maximum of the profit) is offered at presence of restrictions on the money resources allocated for purchase of resources.

Рассмотрим типичную экономическую задачу, в которой требуется выбрать цены $p_j^*, j=\overline{1,n}$ на каждый j-ый вид выпускаемой продукции и объемы выпуска $x_j^*, j=\overline{1,n}$ таким образом, чтобы получить максимальную прибыль $F(\overline{X^*}, \overline{P^*})$ при полной реализации произведенной продукции и наличии ограничений на объем выделенных средств M для приобретения ресурсов производства, цены на которые определены рынком $(\beta_i, i=\overline{1,m})$.

Данная задача при условии, что затраты ресурсов пропорциональны объему выпуска продукции, а спрос линейно зависит от цены реализации, укладывается в рамки следующей математической модели:

$$\max F\left(\overline{X}, \overline{P}\right) = F\left(\overline{X^*}, \overline{P^*}\right) \tag{1}$$

при ограничениях:

$$p_j^- \le p_j \le p_j^+, \ j=\overline{1,n}, \tag{2}$$

$$D_j\left(p_j\right) = \alpha_j + a_j p_j, \ j=\overline{1,n}, \tag{3}$$

$$x_j = \alpha_j + a_j p_j, \ j=\overline{1,n}, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \beta_i a_{ij} x_j \le M, \tag{5}$$

$$x_j \ge 0, \ j=\overline{1,n}, \tag{6}$$

где $F=(\overline{X}, \overline{P}) = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \cdot x_j - \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i a_{ij} x_j$;

p_j^- и p_j^+ – границы возможного диапазона изменения цен;

$D_j(p_j)$ – известные функции спроса;

условия (4) отражают требование полной реализации произведенного объема продукции x_j;

неравенство (5) – ограничение по использованию денежных средств на приобретение ресурсов производства;

β_j – цены на используемые ресурсы $i = \overline{1,m}$;

a_{ij}– коэффициенты технологической матрицы производства $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

Коэффициент a_{ij} – определяет количество i-го ресурса, необходимое для производства единицы продукции i-го вида.

В работе [1] произведен аналитический анализ упрощенной модели (1 – 6), в которой отсутствовало условие (5), т.е. не накладывалось требование по ограничению на объемы денежных средств, выделяемых на приобретение ресурсов производства.

Было показано, что оптимальные объемы выпуска продукции x_j^*, $j = \overline{1,n}$ и цены на нее могут быть определены по следующим формулам:

$$x_j^* = \begin{cases} 0, \; при \;\; j \in N^-, \\ \alpha_j + a_j p_j^*, \; при \;\; j \in N^+, \end{cases} \qquad (7)$$

$$p_j^* = p_j^0 = \frac{v_j}{2} + \frac{p_j^{кр}}{2}, \; j \in N^+, \qquad (8)$$

где v_j – денежные затраты на производство единицы продукции j-го вида:

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} \beta_i a_{ij} x_j, \; j = \overline{1,n},$$

$p_j^{кр}$– критическая цена, т.е. цена при которой и выше которой потребитель полностью отказывается от приобретения продукции j-го вида:

$$p_j^{кр} = -\frac{\alpha_j}{a_j},$$

N^-– подмножество множества N={1,2,…,n}, определяемое как

$$N^- = \left\{ j : j \in N, v_j > p_j^{кр} \right\},$$

N^+– подмножество множества N, определяемое как

$$N^+ = \left\{ j : j \in N, v_j \le p_j^0 \le p_j^{кр} \right\},$$

$$N = N^- \cup N^+, N^- \cap N^+ = \varnothing.$$

При известных объемах выпуска $x_j^*, j=\overline{1,n}$ затраты на производство определяются как

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j^* = M^*. \qquad (9)$$

Если выделяемые средства на приобретение ресурсов $M \geq M^*$, то формулы (7) и (8) также определяют оптимальные объемы выпуска продукции и оптимальные цены, т.е. M^* это тот критический объем денежных средств, который обеспечивает максимально возможную прибыль. Денежные средства в объеме большем, чем M^* будут просто не использованными, а ограничение (5) в модели (1 – 6) оказывается несущественным.

Представляет интерес иметь аналитическое решение задачи (1–6) в случае, когда $M<M^*$, т.е. когда выделенных средств недостаточно для получения максимально возможной прибыли.

Поступим аналогично тому, как это сделано в работе [1].

Представим целевую функцию как функцию только цен, воспользовавшись условием:

$$x_j = \alpha_j + a_j p_j, j = \overline{1,n},$$

и будем вместо модели (1– 6) рассматривать эквивалентную модель:

$$\max F(\overline{P}) \qquad (10)$$

при ограничениях:

$$v_j \leq p_j \leq p_j^{кр}, j \in N^+, \qquad (11)$$

$$\sum_{j \in N^+} v_j \cdot \left(\alpha_j + a_j p_j\right) \leq M, \qquad (12)$$

где $F(\overline{P}) = \sum_{j \in N^+} \left(\left(\alpha_j - v_j a_j\right) \cdot p_j + a_j p_j^2 - v_j \alpha_j\right)$.

Условие $x_j \geq 0, j=\overline{1,n}$ будет выполняться автоматически, как только $p_j \leq p_j^{кр}$, поэтому оно опущено.

Границы диапазона возможного изменения цен p_j^- и p_j^+ заменены на v_j и $p_j^{кр}$ соответственно, поскольку при рациональном производстве цена реализации не может быть меньше затрат на производство единицы продукции и больше цены $p_j^{кр}$. Суммирование производится только по множеству N^+, поскольку производить продукцию вида $j \in N^-$ – нерационально.

При $M<M^*$ ограничение по объему выделяемых денежных средств, всегда будет существенным, поэтому ограничение (12) можно рассматривать в виде равенства.

Найдем цены, максимизирующие $F(\overline{P})$ без учета ограничений (11), т.е. рассмотрим задачу:

$$\max \sum_{j\in N^+}\left(\left(\alpha_j - v_j a_j\right)\cdot p_j + a_j p_j^2 - v_j\alpha_j\right) \qquad (13)$$

при условии

$$\sum_{j\in N^+} v_j\cdot\left(\alpha_j + a_j p_j\right) = M. \qquad (14)$$

Построим функцию Лагранжа для задачи (13, 14):

$$L\left(\overline{P}\lambda\right) = \sum_{j\in N^+}\left(\left(\alpha_j - v_j a_j\right)\cdot p_j + a_j p_j^2 - v_j\alpha_j\right) - \lambda\left(\sum_{j\in N^+} v_j\left(\alpha_j + a_j p_j\right) - M\right)$$

и запишем необходимые, а в нашем случае и достаточные условия экстремума

$$\frac{\partial L\left(\overline{P,\lambda}\right)}{\partial p_j} = \alpha_j - v_j a_j + 2a_j p_j - \lambda v_j a_j = 0,\ j\in N^+, \qquad (15)$$

$$\frac{\partial L\left(\overline{P,\lambda}\right)}{\partial \lambda} = M - \sum_{j\in N^+} v_j\left(\alpha_j + a_j p_j\right) = 0. \qquad (16)$$

Из решения системы уравнений (15, 16) получим:

$$p_j^0(1) = \frac{v_j(2M-L)}{2a} + \frac{p_j^{кр}}{2},\ j\in N^+, \qquad (17)$$

где $L = \sum_{j\in N^+} v_j a_j$, $L = \sum_{j\in N^+} v_j^2 a_j$.

Из условия $(2M-L)/a = 1$ можно определить критический объем денежных средств M^*, обеспечивающий максимальную прибыль:

$$M^{кр} = M^* = \frac{\alpha + a}{2}.$$

Вычисленные в соответствии с (17) значения $p_j^0(1)$ проверяем на выполнение условий (11).

При выполнении условий (11) для всех $j\in N^+$ принимаем в качестве оптимальных цен:

$$p_j^* = p_j^0,\ \forall\, j\in N^+.$$

В противном случае разбиваем подмножества N^+ на два непересекающихся подмножества:

$$N_1^- = \left\{ j : j \in N^+, p_j^0 > p_j^{кр} \right\},$$

$$N_1^+ = \left\{ j : j \in N^+, v_j \le p_j^0 \le p_j^{кр} \right\},$$

$$N_1^- \cup N_1^+ = N^+, N_1^- \cap N_1^+ = \varnothing$$

и находим новые цены $p_j^0(1)$ по формуле

$$p_j^0(1) = \frac{v_j\left(2M - \alpha(1)\right)}{2a(1)} + \frac{p_1^{кр}}{2},$$

где $\alpha(1) = \sum\limits_{j \subset N_1^+} v_j \alpha_j, \quad \alpha(1) = \sum\limits_{j \subset N_1^+} v_j^2 a_j.$

Все $p_j^0(1)$ могут быть только больше p_j^0, полученных при отсутствии ограничений по бюджету.

Действительно, цены p_j^0 и $p_j(1)$ имеют две составляющие:

$$p_j^0 = \frac{v_j}{2}\left(\frac{2M^{кр} - \alpha}{2a}\right) + \frac{p_1^{кр}}{2} = \frac{v_j}{2} + \frac{p_1^{кр}}{2},$$

$$p_j(1) = \frac{v_j}{2}\left(\frac{2M - \alpha}{2a}\right) + \frac{p_j^{кр}}{2}.$$

Причем $\dfrac{2M - \alpha}{2a} > 1$, поскольку $M < M^{кр} = M^*$.

Одна составляющая у них одинакова и равна $\dfrac{p_j^{кр}}{2}$, вторая составляющая:

$$\frac{v_j}{2}\left(\frac{2M - \alpha}{2a}\right) > \frac{v_j}{2}\left(\frac{2M^{кр} - \alpha}{2a}\right),$$

поскольку $M < M^{кр}$, а величина a всегда отрицательна.

Проверяем вновь выполнение условий (11) и либо заканчиваем анализ модели, либо переходим к построению новых подмножеств N_2^- и N_2^+ и т.д., пока не будут вычислены оптимальные цены. Количество итераций не может превышать количества номеров j в подмножестве N^+.

Пример 1. Воспользуемся примером 1, рассмотренным в работе [1], с той лишь разницей, что введем дополнительные условия на величину денежных средств M=100000.

Задана матрица технологических коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix},$$

цены на ресурсы $\beta_1=100$, $\beta_2=200$, $\beta_3=500$, $\beta_4=400$ и функции спроса для каждого вида продукции $D_1(p_1)=1000-0{,}5p_1$, $D_2(p_2)=200-0{,}2p_2$, $D_3(p_3)=500-0{,}8p_3$.

На приобретение ресурсов выделены средства M=100000.

Требуется найти оптимальные по критерию максимума прибыли цены реализации, объемы выпуска продукции всех видов, затраты на производство и прибыль.

Решение.

а) вычисляем затраты на выпуск единицы продукции:

$v_j, j=\overline{1,3}.$

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_{i1} = 100\cdot 0{,}2 + 200\cdot 0{,}4 + 400\cdot 0{,}5 = 300,$$

$$v_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_{i2} = 100\cdot 0{,}2 + 500\cdot 0{,}5 + 400\cdot 0{,}5 = 470,$$

$$v_3 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_{i3} = 100\cdot 0{,}4 + 200\cdot 0{,}2 + 500\cdot 0{,}2 = 180.$$

б) вычисляем критические цены $p_j^{kp}, j=\overline{1,3}.$

$$p_1^{kp} = -\frac{\alpha_1}{a_1} = -\frac{1000}{-0{,}5} = 2000,$$

$$p_2^{kp} = -\frac{\alpha_2}{a_2} = -\frac{200}{-0{,}2} = 1000,$$

$$p_3^{kp} = -\frac{\alpha_3}{a_3} = -\frac{500}{-0{,}8} = 625.$$

в) разбиваем множество N на подмножества:

$$N^- = \{j : j \in N, v_j > p_j^{kp}\} = \{пусто\},$$

$$N^+ = N - N^- = N = \{1,2,3\}.$$

г) определение критического объема денежных средств:

$$M^{кр} = \frac{\alpha + a}{2},$$

$$\alpha = \sum_{j \in N_1^+} v_j \alpha_j = 300 \cdot 1000 + 470 \cdot 200 + 180 \cdot 500 = 484000,$$

$$a = \sum_{j \in N_1^+}^{3} v_j^2 a_j = 300^2(-0.5) + 470^2(-0.2) + 180^2(-0.8) = 115100,$$

$$M^{кр} = \frac{484000 + 115100}{2} = 184500.$$

Поскольку $M < M^{кр}$, используем формулу (17) для определения $p_j^0(1)$, j=1,2,3.

д) вычисление:

$$\gamma(1) = \frac{2M - \alpha}{2a} = \frac{2100000 - 484000}{-115100} = 2{,}467,$$

$$p_1^0(1) = \frac{v_1}{2}\gamma(1) + \frac{p_1^{кр}}{2} = \frac{300}{2} \cdot 2{,}467 + \frac{2000}{2} = 1370{,}05 < 2000,$$

$$p_2^0(1) = \frac{v_2}{2}\gamma(1) + \frac{p_1^{кр}}{2} = \frac{470}{2} \cdot 2{,}467 + \frac{1000}{2} = 1079{,}745 > 1000,$$

$$p_3^0(1) = \frac{v_3}{2}\gamma(1) + \frac{p_3^{кр}}{2} = \frac{180}{2} \cdot 2{,}467 + \frac{625}{2} = 534{,}53 < 625.$$

е) определение подмножеств $N^-(1)$ и $N^+(1)$:

$$N_1^-(1) = \left\{ j : j \in N^+, p_j^0(1) > p_j^{кр} \right\} = \{2\},$$

$$N_1^+(1) = \left\{ j : j \in N^+, p_j^0 < p_j^{кр} \right\} = \{1,3\}.$$

ж) $\alpha = \sum\limits_{j \in N^+(1)} v_j \alpha_j = v_1 \alpha_1 + v_3 \alpha_3 = 300 \cdot 1000 + 180 \cdot 500 = 390000,$

$$a = \sum_{j \in N^+(1)} v_j^2 a_1 = v_1^2 a_1 + v_3^2 a_3 = 300^2 \cdot (-0.5) + 180^2 \cdot (0.8) = -70920.$$

з) вычисление:

$$\gamma(2) = \frac{2M - \alpha}{a} = \frac{2100000 - 390000}{-70920} = 2{,}679075$$

$$p_1^0(2) = \frac{v_1}{2}\gamma(2) + \frac{p_1^{кр}}{2} = \frac{300}{2} \cdot 2{,}679075 + \frac{2000}{2} =$$
$$= 401{,}86125 + 1000 = 1401{,}86125 < 2000,$$

$$p_3^0(2) = \frac{v_3}{2}\gamma(2) + \frac{p_1^{кр}}{2} = \frac{180}{2} \cdot 2{,}679075 + \frac{625}{2} =$$
$$= 241{,}11675 + 3125 = 553{,}61675 < 625.$$

и) $N_1^-(2)=\left\{j : j\in N^+(1), p_j^0(2)>p_j^{кр}\right\}=\{пусто\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow цены\ \ p_j^0(2)\ \ оптимальные,$$

$$N_1^+(2)=N^+(1)-N^-(2)=\{1{,}3\}$$

к) вычисление

$$x_1^*=1000-0{,}5\cdot1401{,}86125=299{,}0694,$$

$$x_2^*=500-0{,}8\cdot553{,}61675=57{,}1066.$$

л) определяем затраты на производство

M^*=300·299,0694+180·57,1066=89720,82+10279,18=100000.

м) определяем прибыль

$$П=\sum_{j\in N^+(2)}\left(p_j^*-v_j\right)x_j^*=\left(1401{,}86125-300\right)\cdot299{,}06+$$

$$+\left(553{,}6175-180\right)\cdot57{,}1066=329522+21336=350858.$$

Пример 2. Сохраняются все условия примера 1, но изменяются функции спроса на 2-й и 3-й виды продукции:

$$D_2(p_2)=200-0{,}5p_2,\ D_3(p_3)=500-2p_3$$

и вводятся дополнительные ограничения на объем используемых денежных средств M=150000.

Решение.

а) затраты на выпуск единицы продукции остались такими же, как и в *примере* 1: v_1=300, v_2=470, v_3=180.

б) критические цены:

$$p_1^{кр}=2000,\ \ p_2^{кр}=-\frac{\alpha_2}{a_2}=-\frac{200}{-0{,}5}=400,\ \ p_3^{кр}=-\frac{\alpha_3}{a_3}=-\frac{500}{-2}=250.$$

в) определение множества видов продукции, производство которых нерационально при любом M, и множества N^+:

$$N^-=\left\{j : j\in N, v_j>p_j^{кр}\right\}=\{2\},$$

$$N^+=N-N^-=\{1{,}2{,}3\}-\{2\}=\{1{,}3\}.$$

г) определение критического объема денежных средств:

$$M^{кр}=\frac{\alpha+a}{2},$$

где

$$\alpha=\sum_{j\in N_1^+}v_j a_j=300\cdot1000+180\cdot500=390000,$$

$$a = \sum_{j \in N_1^+} v_j^2 a_j = 300^2(-0{,}5) + 180^2(-0{,}8) = -109800,$$

$$M^{кр} = \frac{390000 - 109800}{2} = 140100.$$

Поскольку M=150000>$M^{кр}$=140100, используем формулу (8) для определения p_1^* и p_3^*.

д) определение оптимальных цен:

$$p_1^* = \frac{v_1}{2} + \frac{p_1^{кр}}{2} = \frac{300}{2} + \frac{2000}{2} = 1150,$$

$$p_3^* = \frac{v_3}{2} + \frac{p_3^{кр}}{2} = \frac{180}{2} + \frac{250}{2} = 215.$$

е) определение оптимальных объемов выпуска продукции:

$$x_1^* = \alpha_1 + a_1 p_1^* = 1000 - 0{,}5 \cdot 1150 = 425,$$

$$x_2^* = 0,$$

$$x_3^* = \alpha_3 + a_3 p_3^* = 500 - 2 \cdot 215 = 70.$$

ж) общие затраты на производство составят:

$$\sum_{j \in N^+} v_j x_j^* = v_1 x_1^* + v_3 x_3^* = 300 \cdot 425 + 180 \cdot 70 = 140100\,.$$

з) определяем прибыль:

$$П = \sum_{j \in N^+} \left(p_j^* - v_j\right) x_j^* = (1150 - 300) \cdot 425 + (215 - 180) \cdot 70 = 363700.$$

Пример 3. Сохраняются условия примера 2, но объем используемых денежных средств сокращается до M=50000.

Решение.

а) затраты на производство единицы продукции прежние:

v_1=300, v_2=470, v_3=180.

б) критические цены те же, что и в примере 2:

$$p_1^{кр} = 2000,\ p_2^{кр} = 400,\ p_3^{кр} = 250.$$

в) множества N^-, N^+ те же, что и в примере 2: $N^-=\{2\}, N^+=\{1,3\}$.

г) определение критического объема денежных средств: $M^{кр}$ тот же, что и в примере 2, $M^{кр}$ =140100.

Поскольку 50000<$M^{кр}$, используем формулу (17) для определения p_1^0 и p_3^*.

д) вычисление p_j^0, $j : j \in N^+$:

$$\gamma(1)=\frac{2M-\alpha}{a},\text{ где}$$

$$\alpha=\sum_{j\in N^+}v_j a_j=v_1\alpha_1+v_3\alpha_3=300\cdot 1000+180\cdot 500=390000,$$

$$a=\sum_{j\in N^+}v_j^2 a_1=v_1^2 a_1+v_3^2 a_3=300^2\cdot(-0.5)+180^2\cdot(-2)=-109800,$$

$$\gamma(1)=\frac{2\cdot 50000-390000}{-109800}=2,6411657,$$

$$p_1^0=\frac{v_1}{2}\gamma(1)+\frac{p_1^{кр}}{2}=\frac{300}{2}\cdot 2,6411657+\frac{2000}{2}=1396,17485<2000,$$

$$p_3^0=\frac{v_3}{2}\gamma(1)+\frac{p_1^{кр}}{2}=\frac{180}{2}\cdot 2,6411657+\frac{250}{2}=362,70413>250.$$

е) определение $N^-(1)$и $N^+(1)$: $N^-(1)=\{2,3\}, N^+(1)=\{1\}$.

ж) вычисление $p_j^0(1),\ j\in N^+(1)$:

$$\alpha=\sum_{j\in N^+}v_j a_j=v_1\alpha_1=300\cdot 1000=30000,$$

$$a=\sum_{j\in N^+}v_j^2 a_1=v_1^2 a_1=300^2\cdot(-0.5)=-45000,$$

$$\gamma=\frac{2M-\alpha}{a}=\frac{2\cdot 50000-300000}{45000}=4,44444,$$

$$p_1^0=\frac{v_1}{2}\gamma+\frac{p_1^{кр}}{2}=\frac{300}{2}\cdot 4,44444+\frac{2000}{2}=1666,66666<2000,$$

$$p_1^*=p_1^0=1666,(6),$$

$$x_1^*=\alpha_1+a_1 p=1000-0,5\cdot 1666(6).$$

з) затраты на производство составят

$$M^*=300\cdot 1666(6)=50000.$$

и) определяем прибыль

$$П=\sum_{j\in N^*}\left(p_j^*-v_j\right)x_j^*=\left(p_1^*-v_1\right)\cdot x_1==\left(1666,(6)-300\right)\cdot 1666(6)=227777,75.$$

1. Реут В.Б. Аналитический анализ модели планирования цен и объема выпуска при полной реализации продукции // Вестник ТвГУ. Серия «Экономика». – 2008. – Вып. 8.