УДК 519.6

ДВОЙСТВЕННЫЙ МЕТОД В ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Андреева Е.А.
Кафедра компьютерной безопасности
и математических методов управления

В работе двойственный метод используется для построения аналитического решения изопериметрических задач. Приводится анализ численных методов и алгоритмов оптимизации для построения приближенного решения.

In the article the dual method is used to obtain analytical solution of the isoperimetrical problems. Numerical methods and algorithms are analysed to obtain optimal solution.

Ключевые слова: оптимальное управление, двойственный метод, выпуклость, изопериметрические задачи.
Keywords: optimal control, duality, convexity, isoperimetrical problem.

Введение. Разнообразные задачи геометрии на экстремум площади объёма при заданных ограничениях на периметр решались известными математиками в глубокой древности. Классическая изопериметрическая задача состоит в определении кривой заданной длины, ограничивающей максимальную площадь. К таким задачам относится и задача Архимеда, в которой требуется среди шаровых сегментов, имеющих заданную площадь поверхности, найти сегмент максимального объёма, задача Зенодора, в которой среди всех n-угольников, имеющих заданный периметр необходимо найти n-угольник наибольшей площади и многие другие. Часто изопериметрические задачи решаются без применения специальной теории, геометрическими методами, базирующимися на интуиции и изобретательности.

Появление теории вариационного исчисления и математической теории оптимального управления, выпуклого анализа, позволило разработать методы решения изопериметрических задач, теоретическую и практическую значимость которых трудно переоценить.

Важным этапом в развитии теории экстремальных задач явилось создание в 18 веке новой науки вариационного исчисления, основной вклад в развитие которой внесли такие выдающиеся математики, как Л.Эйлер, И.Бернулли и И.Ньютон. Так И.Ньютон решил задачу о форме тела вращения, испытывающего минимальное сопротивление при движении в разреженной среде, И.Бернулли установил форму кривой наибыстрейшего спуска тяжелого тела движущегося вдоль этой кривой без трения. Л.Эйлер, И.Бернулли поставили и решили задачу о геодезической кривой наименьшей длины, лежащей на заданной поверхности и др. Методы вариационного исчисления, особенно принцип наименьшего действия, активно используются в физике, механике, математике, в которых условия минимума заданного функционала, выражающего энергию системы, позволяют найти уравнения, описывающие динамику системы. Существенной особенностью и ограничением вариационных методов является требование гладкости искомых решений.

В 50-х годах прошлого века Л.С. Понтрягин сформулировал принцип максимума для задач оптимального управления, который позволил существенно расширить класс решаемых изопериметрических задач.

Задача оптимального управления имеет ту же структуру, что и вариационная задача, а именно, в ней требуется найти экстремум функционала при заданных динамических ограничениях, но в отличие от задач вариационного исчисления здесь появляется измеримая функция управления, которая почти всюду удовлетворяет заданным ограничениям, а искомая функция состояния принадлежит классу абсолютно непрерывных функций.

Важным этапом в исследовании необходимых условий экстремума в задачах оптимального управления явилось доказательство принципа максимума для задач оптимального управления с фазовыми и смешанными ограничениями. Параллельно с теорией необходимых условий оптимальности развивалась теория достаточных условий, являющаяся продолжением теории Гамильтона-Якоби в вариационном исчислении.

Принцип максимума позволяет найти программное управление, зависящее от времени и определяемое заранее до процесса управления. Однако в реальных задачах, часто требуется найти оптимальное управление системой в зависимости от пространственного положения управляемого объекта, т.е. построить синтез управления. Теория достаточных условий оптимальности нашла своё отражение в трудах Р.Беллмана, В.Ф.Кротова, Р.Клотцлера и др.

Одним из важных методов математической теории оптимального управления является двойственный метод, с помощью которого формулируются достаточные условия оптимальности. Он позволяет по-новому подойти к решению экстремальных задач геометрии, используя весь арсенал методов оптимального управления. Особенностью двойственного метода является то, что он связан с овыпуклением исходной задачи, позволяет найти глобально оптимальное решение. Основная идея двойственного метода заключается в том, что наряду с исходной экстремальной задачей формулируется двойственная к ней задача, причем двойственность понимается в следующем смысле. Пусть требуется найти минимум действительной функции $f(x)$ на множестве X, запишем эту задачу следующим способом:

$$f(x) \to \inf, x \in X. \tag{1}$$

Одновременно рассмотрим задачу максимизации действительной функции $g(y)$ на множестве Y, или

$$g(y) \to \sup, y \in Y. \tag{2}$$

Задачу (2) назовем двойственной для задачи (1), если справедливо неравенство

$$\inf_{x \in X} f(x) \geqslant \sup_{y \in Y} g(y). \tag{3}$$

Если при некотором значении x_0 или y_0 в условии (3) имеет место равенство, то будем говорить, что между задачами (1) и (2) имеет место строгая двойственность.

При решении многих задач оптимального управления полезно построить такую двойственную задачу, которая допускает более простое решение, чем исходная задача. Знание решения задачи (2) позволяет сделать ряд важных заключений о свойствах задачи (1). Например, если существует $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$, такие, что $f(x_0) = g(y_0)$, тогда x_0 - оптимальное решение задачи (1), y_0 - оптимальное решение задачи (2), и при этом имеет место строгая двойственность. Если $\sup_Y g(y) = g(y_0)$, тогда для приближенного решения задачи (1) справедлива оценка $\inf_X f(x) \geqslant g(y_0)$ и если при этом имеет место строгая двойственность, то можно определить $\inf_X f(x) = g(y_0)$.

В соответствие с различными способами построения двойственной задачи можно выделить два типа двойственности: двойственность по Рокафеллару, использующая выпуклые свойства задачи оптимального управления, и двойственность, связанная с методом функций Кротова. Мы остановимся на втором подходе, который не использует специальных выпуклых свойств исходной задачи и позволяет при решении многомерной задачи оптимального управления использовать хорошо известные методы конечно-мерной оптимизации - метод множителей Лагранжа, теорему Куна-Таккера и др.

Выпуклость является важным свойством в теории экстремальных задач геометрии. Выпуклая геометрия была построена Г. Минковским [24] и базируется на таких понятиях, как опорная функция, функция Минковского, поляра, крайняя точка, отделимость множеств.

Выпуклые задачи допускают двойственное описание. Во многих задачах полезно сначала решить двойственную к ней задачу, если исходная задача не является выпуклой, изучить связь между решениями исходной и двойственной задач, построить обобщенное решение исходной задачи. Часто решение двойственной задачи существует, даже в том случае, если в исходной задаче решение отсутствует.

1. Теорема о достаточных условиях оптимальности Клотцлера. Р. Клотцлер первым предложил использовать двойственный метод для решения изопериметрических задач, описывая искомые выпуклые множества на плоскости и в пространстве с помощью опорных функций.

Рассмотрим задачу оптимального управления. Необходимо минимизировать функционал

$$I(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} f^0(t, x(t), u(t))dt + \Phi(x(t_2), x(t_1)), \tag{4}$$

здесь $I = [t_1, t_2]$, $x(t) : I \to R^n$ функция состояния, $u(t) : I \to R^r$ функция управления. Процесс $(x(\cdot), u(\cdot)) = \omega$ будем далее обозначать $(x, u) = \omega$. Вектор-функция состояния $x(\cdot) = (x^1(\cdot), ..., x^n(\cdot))$ абсолютно непрерывна на I, векторно-значная функция управления $u(\cdot) \in L^r_\infty(I)$ связаны дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x^i}(t) = f^i(t, x(t), u(t)), t \in [t_1, t_2], i = 1, ..., n. \tag{5}$$

Вектор-функция управления u(t) п.в. $t \in [t_1, t_2]$ почти всюду удовлетворяет включению:

$$u(t) \in U(t, x(t)) \subset R^r. \tag{6}$$

Вектор-функция состояния $x(t)$ удовлетворяет фазовому ограничению:

$$x(t) \in X(t) \subset R^n, t \in [t_1, t_2]. \tag{7}$$

Выполнены граничные условия:

$$x(t_i) \in X_{t_i} \subset R^n, i = 1, 2. \tag{8}$$

Введём следующие множества и функции. Совокупность процессов $w \in W$, если w удовлетворяет ограничениям (5)-(8). Множество
$G = \{(t, x) \in R^{n+1} : x \in X(t), t \in [t_1, t_2]\}$ имеет кусочно-гладкую границу, функция $S(t, \xi) : G \to R$ - почти всюду на G непрерывно-дифференцируемая функция, функция Понтрягина

$$H(t, \xi, y, u) = -f_0(t, \xi, u) + (y, f(t, \xi, u)),$$

функция Гамильтона

$$\mathcal{H}(t, \xi, u) = \max_{u \in U(t,\xi)} H(t, \xi, y, u),$$

двойственный функционал

$$L(S) = \inf_Q\{S(t_2, \xi(t_2)) - S(t_1, \xi(t_1)))+$$

$$+\Phi(\xi(t_1), \xi(t_2)) + \sum_{j=1}^{p} (S(\tau_j - 0\xi(\tau_j - 0)) - S(\tau_j + 0\xi(\tau_j + 0)))\}.$$

Множество кусочно-непрерывных на I вектор-функций $\xi(t) \in KC(I)$, удовлетворяющих фазовым ограничениям и граничным условиям, обозначим через

$$Q = \{\xi(t) \in KC(I) : \xi(t) \in X(t), t \in I, \xi(t_1) \in X_{t_1}, \xi(t_2) \in X_{t_2}\}.$$

По определению функция $S(t, \xi) \in \gamma$, если выполнены следующие условия:

- существует разбиение отрезка I на конечное число интервалов вида $[\tau_i, \tau_{i+1}) = I_i$, i=0,..,p, $t_1 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_{p+1} = t_2$, такое что $S(t, \xi)$ непрерывно дифференцируема на каждом из множеств $G_j = \{(t, \xi) \in G, i \in I_j\}$, j=0,...,p и может быть непрерывно продолжена на $\bar{G}_j$, j=0,..,p;

- на каждом из множеств G_j, j=0,..,p функция $S(t, \xi)$ удовлетворяет неравенству Гамильтона-Якоби:

$$\Lambda(t, \xi) := S_t(t, \xi) + \mathcal{H}(t, \xi, S_\xi(t, \xi)) \leqslant 0.$$

Для любой функции $S(t, \xi) \in \gamma$ любого допустимого процесса $w \in W$ справедливо двойственное неравенство

$$J(w) \geqslant L(S).$$

В связи с двойственным неравенством можно рассмотреть двойственную задачу, состоящую в максимизации функционала L(S) на множестве γ:

$$L(S) \to \max, S \in \gamma.$$

Сформулируем теорему достаточных условий оптимальности для минимизирующих последовательностей [21,22].

Теорема 1. *Пусть* $S(t,\xi) \in \gamma$, *и* $\mathrm{H}(\cdot,\cdot,S_\xi(\cdot,\cdot))$ *ограничена на каждом из множеств* G_j, *j=0,...,p. Пусть, кроме того,* $(x_k,u_k) \in W$, $\lim_{k\to\infty} x_k(t) = x(t)$, *где вектор-функция x(t),* $t \in I$ *непрерывна на каждом интервале* (τ_i,τ_{i+1}) *и непрерывно продолжается на* $[\tau_i,\tau_{i+1}]$ *(сходимость понимается по мере). Тогда последовательность* (x_k,u_k), *k=0,1,... является минимизирующей, если она удовлетворяет следующим условиям:*

$$\begin{aligned} &1) \lim_{k\to\infty}\int_{t_1}^{t_2} H(t,x_k(t),u_k(t),S(t,x_k(t)))dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{H}(t,x(t),S_\xi(t,x(t)))dt, \end{aligned} \tag{9}$$

$$2) S_t(t,x(t)) + \mathrm{H}(t,x(t),S_\xi(t,x(t))) = 0, \textit{п.в.} \qquad t \in I \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &3) L(S) = \lim_{k\to\infty}\{S(t_2,x_k(t_2)) - S(t_1,x_k(t_1)) + \Phi(x_k(t_1),x_k(t_2)) + \\ &+ \sum_{j=0}^{p}[S(\tau_j-0,x_k(\tau_j)) - S(\tau_j+0,x_k(\tau_j))]\} \end{aligned} \tag{11}$$

Теорема двойственности успешно использовалась для решения изопериметрических задач геометрии [2,3], [15-17], [21].

Особенности этой теоремы состоят в том, что она позволяет разработать алгоритм построения глобально оптимального решения, состоящий из следующих этапов [1-3], [21,22]:

- построить функции Понтрягина, Гамильтона;
- записать неравенство Гамильтона-Якоби на заданном множестве;
- построить двойственный функционал;
- выбрать структуру функции S(t,x) и составить уравнение Гамильтона-Якоби, используя условия 2, 3 теоремы, найти оптимальное решение двойственной задачи;
- определить оптимальное управление U(t,x) и найти функцию $x(t)$.

Однако в более сложных задачах с дополнительными ограничениями на ширину искомой выпуклой фигуры аналитическое решение получить достаточно сложно.

Следующим этапом решения изопериметрических задач стала разработка численных методов и алгоритмов построения оптимального решения.

Численные методы оптимизации на протяжении последних десятилетий развиваются чрезвычайно интенсивно. Такой интерес к ним с одной стороны обусловлен важностью экстремальных задач в различных проблемах прикладного характера, где они выражают известные вариационные принципы. С другой стороны — многообразием физических явлений и инженерно-технических задач, которые могут быть описаны и сформулированы как экстремальные, и необходимостью учета их специфических особенностей при выборе конкретных методов численного решения.

В настоящее время разработано большое количество численных методов решения задач оптимального управления. Из широко известных численных методов можно выделить два основных типа — прямые и непрямые. В прямых методах поиск решения состоит в нахождении предельных точек минимизируемых (максимизируемых) последовательностей в пространстве исходных переменных. Часто применяемыми являются модификации метода проекции градиента, в том числе основанных на решении сопряженной задачи, метод возможных направлений. В методах второго типа решение задачи сводится к задачам безусловной минимизации. Переход к задачам безусловной оптимизации в частности, происходит вследствие применения методов внешней и внутренней (барьерной) штрафной функции, метода модифицированной функции Лагранжа. Вычислительные подходы к решению задач нелинейного программирования и поиска оптимального управления получили широкое освещение и систематизацию в работах Ю. Г. Евтушенко [13].

2. Построение плоской выпуклой фигуры максимального периметра. Рассмотрим формализацию экстремальных задач с помощью опорной функции [1]. Пусть F выпуклая фигура на плоскости.

Прямую
$$\prod(n) = \{x : (x, n) = H(n) = \max_{y \in F}(n, y) = H\} \tag{12}$$
назовем опорной прямой для множества F в направлении n, а функцию H(n) — опорной функцией множества F в направлении n. Введем полярные координаты на плоскости $n = (cos(\varphi), sin(\varphi))$.

Положим
$$h(\varphi) = H(cos\varphi, sin\varphi) \tag{13}$$
и назовем эту функцию опорной функцией множества F в φ. Если опорная прямая имеет только одну общую точку с множеством, то эта опорная прямая является регулярной. Если все опорные прямые множества F регулярны, то назовем такое множество регулярным множеством или овалом, а его опорную функцию — регулярной опорной функцией множества F. Ширину выпуклого множества F в направлении n определим следующим образом:
$$B(n) = H(n) + H(-n) = h(\varphi) + h(\pi + \varphi). \tag{14}$$

Диаметром выпуклого множества F назовем
$$D = \max_{|n|=1} B(n) \tag{15}$$

Толщина выпуклого множества F определяется равенством
$$\triangle = \min_{|n|=1} B(n). \tag{16}$$

Опорная функция овала почти всюду на отрезке $[0, 2\pi]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:
$$h^{''}(\varphi) + h(\varphi) = \rho(\varphi), \rho(\varphi) \geqslant 0, \tag{17}$$

$\rho(\varphi)$ - радиус кривизны границы овала в точке касания опорной прямой в соответствующем направлении φ.

Каждое 2π-периодическое решение уравнения является опорной функцией регулярного плоского множества F. Нерегулярное множество этим свойством не обладает, однако его опорная функция может быть равномерно аппроксимирована последовательностью опорных функций овалов.

Используя определение периметра L(F), периодичность опорной функции и соотношения (17), имеем [7,9]:

$$\begin{aligned} L(F) &= \int_0^{2\pi} \rho(\varphi)d\varphi = \int_0^{2\pi} (h'(\varphi) + h(\varphi))d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} h(\varphi)d\varphi = \int_0^{\pi} B(\varphi)d\varphi \end{aligned} \tag{18}$$

Площадь овала A(F) с помощью опорной функции выражается:

$$\begin{aligned} A(F) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} h(s)ds = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} h(\varphi)\rho(\varphi)d\varphi = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} h(\varphi(h(\varphi) + h'(\varphi))d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (h^2 - \dot{h}^2)d\varphi. \end{aligned} \tag{19}$$

Совокупность ограниченных, выпуклых фигур с фиксированными параметрами, например диаметром и радиусом вписанной окружности, будем обозначать $F_2(D, r)$.

Аналитическое решение ряда экстремальных задач геометрии, получено с помощью теоремы о достаточных условиях оптимальности [1-3], [21,22].

Задача о построении выпуклой фигуры $F \in F_2(D, \triangle)$, имеющей максимальный периметр L(F) сводится к определению опорной функции этой фигуры или ее ширины. Пусть $x_1(t)$ - ширина фигуры в направлении t, положим по определению $x_2(t) := \dot{x_1}(t)$.Тогда, используя условие (17), запишем требование выпуклости искомой фигуры: $\dot{x_2}(t) = -x_1(t) + u(t), u(t) \geqslant 0$, где управление $u(t) = \rho(t) + \rho(t + \pi)$ - кривизна фигуры. Наложим на фигуру следующие ограничения, что диаметр ее меньше или равен D, а ширина больше или равна $\triangle$. Далее, выберем полярную систему координат таким образом, чтобы ширина искомой фигуры в направлении $t = 0$ была минимальна и равна $\triangle$. Тогда граничные условия примут вид $x_1(0) = x_1(\pi) = \triangle$ и фазовое ограничение: $\triangle \leqslant x_1(t) \leqslant D$. Таким образом, необходимо минимизировать функционал

$$I(w) = -L(F) = -\int_0^{\pi} x_1(t)dt \to \inf \tag{20}$$

при динамических ограничениях:

$$\dot{x_1} = x_2, \qquad \dot{x_2} = -x_1 + u, t \in [0, \pi], \tag{21}$$

фазовом ограничении:

$$\triangle \leqslant x_1(t) \leqslant D, t \in [0, \pi], \tag{22}$$

ограничении на функцию управления:

$$u(t) \geqslant 0, t \in [0, \pi], \tag{23}$$

граничных условиях:

$$x_1(0) = x_1(\pi) = \triangle. \tag{24}$$

Используя теорему 1 в работах [1], [21] получено решение этой задачи: при $0 \leqslant t \leqslant \alpha$: $\overline{x_1}(t) = D\cos(t-\alpha)$, $\overline{u}(t) = 0$, $p_2(t) = 1 - \cos(t - \frac{\alpha}{2})\cos^{-1}(\frac{\alpha}{2})$, $p_1(t) = -\dot{p_2}(t)$, $\alpha = \arccos(\frac{\triangle}{D})$; при $\alpha < t \leqslant \frac{\pi}{2}$: $\overline{x}_1(t) = D$, $\overline{u}(t) = D$, $p_1(t) = 0$, $p_2(t) = 0$; $\overline{x}_1(\frac{\pi}{2}+\tau) = \overline{x}_1(\frac{\pi}{2}-\tau)$, $\overline{u}(\frac{\pi}{2}+\tau) = \overline{u}(\frac{\pi}{2}-\tau)$, $p_2(\frac{\pi}{2}+\tau) = p_2(\frac{\pi}{2}-\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\overline{x_2}(t) = \dot{\overline{x_1}}(t)$, $p_1(t) = -\dot{p_2}(t)$, $t \neq \alpha, t \neq \pi - \alpha$.

Функция $p_2(t)$ непрерывна в области определения, непрерывность же функции $p_1(t)$ нарушается, если $\overline{x_1}(\tau_j) = \triangle$ или $\overline{x_1}(\tau_j) = D$.

Заметим, что используя метод функций штрафа фазовые ограничения можно учесть с помощью функционала

$$\begin{aligned} I(w) = -\int_0^{\pi} (x_1(t) - L_k(\max(x_1((t) - D; 0)))^2 - M_k(\max(\triangle - x_1(t); 0))^2)dt+ \\ + H_k(x_1(\pi) - \triangle)^2 \to \inf \end{aligned} \tag{25}$$

где L_k, M_k, H_k – штрафные коэффициенты. Используя метод штрафных функций построим решение этой задачи. Выберем, например, следующие значения параметров $\triangle = 2$, $D = 3$,$\triangle t = 0,001$, штрафные коэффициенты M=1000, L=20, H=1000. При этом минимальное значение функционала $I(w) = -8,84961196867288$, число итераций $k = 2145921$, точность метода $\varepsilon = 10^{-13}$. Точное значение функционала при этих значениях параметров $I(w) = -8,85050189236138$. Несмотря на достаточно высокую точность вычислений, численное решение оптимального управления в точках переключения отличается от аналитического решения. Это связано с разрывом первой сопряженной функции [1] и вырождением принципа максимума Л.С.Понтрягина. К незначительному улучшению численного решения приводит метод регуляризации Тихонова А.Н. [19]. Полученное значение функционала $I(w) = -8,84964176947287$ (число итераций $k = 2074714$).

Используя формулу Эйлера аппроксимации второй производной

$$\ddot{x}(t_i) \approx \frac{x^{i-1} - 2x^i + x^{i+1}}{(\triangle t)^2},$$

получаем рекуррентное соотношение: $\frac{x^{i-1}-2x^i+x^{i+1}}{(\triangle t)^2} + x^i = u^i, i = \overline{1, q}$, описывающее выпуклость искомой фигуры.

Методом функций штрафа получено значение функционала $I(w) = -8,66714142969184$, число итераций $k = 1172$. ($M = 10000, L = 200000, H = 100000$, точность метода $\varepsilon = 10^{-10}$).

Используя схему Рунге-Кутта:

$$x_1^{i+1} = x_1^i + \triangle t x_2^i + \frac{1}{2}(\triangle t)^2,$$

$$x_2^{i+1} = x_2^i + \triangle t u^i - \triangle t x_1^i + \frac{1}{2}(\triangle t)^2 u^i - \frac{1}{2}(\triangle t)^2 x_1^i - \frac{1}{2}(\triangle t)^2.$$

Можно уточнить значение функционала $I(w) = -8,85043650143254$, при числе итераций $k = 796111$, точности метода $\varepsilon = 10^{-10}$.

В таблице приведены результаты построения оптимального решения различными методами [20].

Метод	Штрафные коэффициенты	Параметры метода	Число итераций K	I_{comp}	I_{opt}
Градиентный метод (схема Эйлера)	M=1000, L=20, H=1000	$\triangle t = 0,001$, $\alpha = 0,1$, $\varepsilon = 10^{-13}$	2145921	-8,849612	-8,850502
Метод регуляризации Тихонова	M=1000, L=20, H=1000	$\triangle t = 0,001$, $\alpha = 0,1$, $\varepsilon = 10^{-13}$	2074714	-8,849641	-8,850502
Градиентный метод (схема Рунге-Кутта)	M=1000, L=20, H=1000	$\triangle t = 0,005$, $\alpha = 0,1$, $\varepsilon = 10^{-10}$	796111	-8,850436	-8,850502

В работах [16,17] построено аналитическое и численное решение задачи (20-24) при дополнительных ограничениях на функцию ширины в заданных направлениях τ_i a_i, $\triangle < a_i < D$, $i = 1, \ldots, N$. Показано, что для построения численного решения эффективно использовать метод Р.Беллмана.

3. Задача о построении выпуклой фигуры, имеющей минимальную площадь, при заданных ограничениях на ширину. Эта задача интересна тем, что здесь решением является предельная функция минимизирующей последовательности, которая является разрывной функцией.

Формализуем поставленную задачу следующим образом. Необходимо минимизировать функционал

$$I(w) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sum_{i=1}^{2} (x_i^2 - x_{i+2}^2)dt \to \inf \tag{26}$$

при следующих ограничениях:

$$\dot{x_1} = x_3, \dot{x_2} = x_4, \dot{x_j} = -x_{j-2} + u_{j-2}, j = 3, 4, \tag{27}$$

$$\triangle \leqslant x_1(t) + x_2(t) \leqslant D, t \in [0, \pi], \tag{28}$$

$$u_i(t) \geqslant 0 \quad \text{п.в.} t \in [0, \pi], i = 1, 2, \tag{29}$$

$$x_i(0) = x_i(\pi) = \frac{D}{2}, i = 1, 2. \tag{30}$$

Решение задачи (26)-(30) зависит от величины параметра $r = \frac{\triangle}{D}$ [1], [21].

Если $0 < r < \frac{\sqrt{3}}{2}$, то оптимальному коридору принадлежит траектория: $\overline{x_1}(t) = \frac{D}{2}|\cos t|$, $t \in [0, \varphi_0] \cup (\pi - \varphi_0, \pi]$, $\overline{x_1}(t) = \triangle \sin t$, $t \in (\varphi_0, \pi - \varphi_0]$, $\overline{x_2}(t) = \frac{D}{2}\cos t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\overline{x_2}(t) = -\frac{D}{2}\cos t$, $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\overline{x_3}(t) = \dot{\overline{x_1}}(t)$, $t \neq \varphi_0, \pi - \varphi_0$, $\overline{x_4}(t) = \dot{\overline{x_2}}(t)$, $t \neq \frac{\pi}{2}$, где $\varphi_0 = \arctan(\frac{2\triangle}{D})$, функции $\overline{x_3}(t)$, $\overline{x_4}(t)$ не являются непрерывными в точках φ_0, $\pi - \varphi_0$, $\frac{\pi}{2}$. Поэтому при $0 < r < \frac{\sqrt{3}}{2}$ задача не имеет оптимального решения. Однако можно построить последовательность допустимых процессов (x_k, u_k), которая удовлетворяет условиям теоремы о достаточных условиях оптимальности.

Функции $x_k^1(t)$, $x_k^2(t)$ строятся с помощью сглаживания функций $\overline{x_1}(t)$, $\overline{x_2}(t)$ в окрестностях точек $t = \varphi_0$, $t = \pi - \varphi_0$ и $t = \frac{\pi}{2}$ соответственно:

$$x_k^1(t) = \begin{cases} \overline{x}(t), & t \in [0,\pi]\backslash A \cup A_1, \\ \beta_k t^2 + \alpha_k t + c_k, & t \in A := [\varphi_0 - \frac{1}{k}, \pi - \varphi_0 + \widetilde{\triangle_k}], \\ \widetilde{\beta_k} t^2 + \widetilde{\alpha_k} t + \widetilde{c_k}, & t \in A_1 := [\pi - \varphi_0 - \frac{1}{k}, \pi - \varphi_0 + \widetilde{\triangle_k}]. \end{cases} \tag{31}$$

$$x_k^2(t) = \begin{cases} \overline{x}(t), & t \in [0,\pi]\backslash A_2, \\ \gamma_k (t - \frac{\pi}{2})^2 + d_k, & t \in A2 := [\frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{k}]. \end{cases} \tag{32}$$

Постоянные β_k, $\widetilde{\beta_k}$, α_k, $\widetilde{\alpha_k}$, c_k, $\widetilde{c_k}$, γ_k, d_k, $\triangle_k$, однозначно определяются условиями непрерывной дифференцируемости функций $x_k^i(t)$, i=1,2. Очевидно, что для достаточно больших значений k процесс (x_k, u_k) является допустимым, т.к. $u_k^i = \ddot{x}_k^i + x_k^i \geqslant \ddot{\overline{x^i}} + \overline{x^i} \geqslant 0$, i=1,2, $x_k^1 + x_k^2 \geqslant \overline{x}^1 + \overline{x}^2 \geqslant \triangle$, $k \geqslant K$.

Вектор-функция $\overline{x}(t)$ является предельной, т.е. $\lim_{k\to\infty} x_k(t) = \overline{x}(t)$ для почти всех $t \in [0, \pi]$. Легко проверить, что для построенной последовательности выполнены все предположения теоремы, откуда следует, что предъявленная последовательность является минимизирующей.

Если $\frac{\sqrt{3}}{2} < r < 1$, то оптимальному коридору принадлежит траектория, определяемая следующими функциями: $\overline{x_1}(t) = \frac{D}{2}|\cos t|$, $t \in [0, \varphi_1] \cup [\pi - \varphi_1, \pi]$, $\overline{x_1}(t) = \triangle - \frac{D}{2}|\cos t|$, $t \in [\varphi_1, \varphi_2] \cup [\pi - \varphi_1, \pi - \varphi_2]$, $\overline{x_1}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} D \sin t$, $t \in [\varphi_2, \pi - \varphi_2]$, $\overline{x_2}(t) = \frac{D}{2}|\cos t|$, $t \in [0, \varphi_3] \cup (\pi - \varphi_3, \pi]$, $\overline{x_2}(t) = \triangle - \frac{\sqrt{3}}{2} D \sin t$, $t \in [\varphi_3, \pi - \varphi_3]$, где $\varphi_1 = \arccos(\frac{\triangle}{D})$, $\varphi_2 < \varphi_3$ определяются равенством $\triangle - \frac{D}{2}\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} D \sin\varphi$. Как и в предыдущем случае, при $\frac{\sqrt{3}}{2} < r < 1$ функции $x_3(t)$, $x_4(t)$ имеют разрывы в точках φ_i, $\pi - \varphi_i, i = 1, 2, 3$. Для того чтобы доказать оптимальность процесса $(\overline{x}, \overline{u})$ нужно, как и в предыдущем случае, с помощью сглаживания функций $\overline{x_i}(t), i = 1, 2$ в окрестностях точек φ_i, $\pi - \varphi_i$ построить последовательность $(x_k(t), u_k(t))$, $\quad k = 1, 2, ...$, удовлетворяющую предположениям теоремы. С геометрической точки зрения искомой фигурой является треугольник Яманучи.

Если r=1, то оптимальное решение представимо в виде: $t \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2}{3}\pi, \pi]$: $\overline{x_1}(t) = D - \frac{D}{2}|\cos t|$, $\overline{u_1}(t) = D$, $\overline{x_2}(t) = \frac{D}{2}|\cos t|$, $\overline{u_2}(t) = 0$; $t \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$: $\overline{x_1}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} D \sin t$, $\overline{u_1}(t) = 0$, $\overline{x_2}(t) = D - \frac{\sqrt{3}}{2} D \sin t$, $\overline{u_2}(t) = D$, $p_3(t) = p_4(t) = 0$, $t \in [0, \pi]$, $-p_i = \dot{\overline{x^i}}$, $\quad i = 1, 2$.

Используя метод функций штрафа, при $r = 1$ получено минимальное значение площади фигуры при следующих параметрах: $\triangle = 3$, $D = 3$, $\triangle t = 0,01$. При этом значение функционала $I(w) = 6,41527748479223$, число итераций $k = 34781$, точность метода $\varepsilon = 10^{-10}$, существенно отличается от точного значения функционала $I(w) = 6,34293830709412$.

Трудность построения численного решения заключается в том, что решение этой задачи не единственно. В работах [15-17] приведен сравнительный анализ метода функций штрафа и метода барьерных функций для решения изопериметрических задач.

Метод барьерных функций идейно близок к методу штрафных функций. Его иногда называют методом внутренних штрафов, так как поиск точки минимума ведется из внутренней точки допустимого множества и величина штрафа возрастает при приближении к границе допустимого множества изнутри.

Дискретная аппроксимация непрерывной задачи при использовании метода барьерных функций ничем не отличается от приведенной выше для метода внешних штрафов. Вычисление шага градиентного спуска и коэффициентов штрафных функций производится аналогичному методу внешних штрафных функций.

Результаты использования численных методов приведены в следующей таблице [16,17]:

Название метода или модификации	Финальные штрафные коэффициенты Ak,Bk,Ck	Финальный шаг градиентного спуска	Достигнутая точность	Количество итераций	Значение функции I(u)	Погрешность определения функции I(u) в процентах
Аналитическое решение					-3.024316601	
Традиционный алгоритм с использованием формулы Эйлера	0.15 0.15 0.15	0.05	10^{-10}	12650000	-3.017934157	0.211037558
Традиционный алгоритм с использованием формулы прогноз-корректор	0.15 0.15 0.15	0.05	10^{-10}	12625000	-3.019407311	0.16232726
Модификация метода с динамическими коэффициентами	0.20 0.58 0.56	0.016	10^{-10}	12386000	-3.019445252	0.16107272
Модификация алгоритма с барьерными штрафами функциями	10^{-4} 0.12 10^{-3}	0.058	10^{-10}	11950000	-3.02287631	0.047623689

Заключение. Большинство численных методов решения задач оптимального управления можно разбить на две группы. Первую группу методов составляют методы, основанные на том, что приближение для определения функции состояния на каждой итерации строится по рекуррентным формулам. Интуитивно понятно, что такой подход существенно осложняет сходимость, так как зависит от изменения значения функции состояния в каждом узле на очередной итерации, при этом траектория оптимизируется «в целом».

Во вторую, более обширную группу методов входят такие методы, когда дискретная система для определения функций состояния совместно с ограничениями на управление и фазовыми ограничениями рассматриваются не как базис для построения траектории, а как одно из ограничений на оптимизируемые в каждом узле значения функции состояния.

Целесообразно для этой группы методов отойти от представления фазовой траектории как вектора $(x_i(t_i), \dot{x_i}(t_i))$, которое было введено для удобства аналитического решения и использовать в качестве дифференциальной связи непосредственно уравнение, выражающее выпуклость фигуры при условии непрерывной дифференцируемости её опорной функции.

Скорость сходимости таких методов существенно выше. При этом палитра вычислительных методов данного типа, доступных для применения, чрезвычайно широка. При таком рассмотрении задачи допустимо применение разнообразных методов математического программирования (градиентные методы, методы функций штрафа, методы случайного поиска глобального экстремума, релаксационные методы). Кроме того, в эту группу входит метод динамического программирования Беллмана. Использование принципа оптимальности Беллмана предъявляет высокие требования к памяти и скорости вычислений персонального компьютера.

Среди методов нет методов, основанных на использовании принципа максимума Понтрягина. Такие методы высокоэффективны, и отказ от них вынужденный, т.к. принцип максимума оказывается вырожденным и не позволяет получить конструктивные условия для определения оптимального решения.

Заметим, что сложность применения вычислительных методов в данных задачах связана с негладкостью оптимальной траектории и возможным скачком функции состояния.

В общем случае фазовые и промежуточные ограничения зачастую вносят естественные трудности в решение задач оптимального управления как численными методами, так и аналитическими.

Величина шага градиентного спуска зависит от коэффициентов штрафных функций, количества узлов разбиения. Очень важный момент с вычислительной точки зрения - правильный выбор коэффициентов функций штрафа. Так как в случае квадратичной функции штрафа даже небольшое нарушение «штрафных границ» траекторией в некоторых точках влечет за собой несопоставимо большие значения градиента в этих точках. Значения штрафов при этом могут на несколько порядков превышать значения минимизируемого функционала и в результате накопления вычислительных ошибок алгоритм будет работать неправильно. Произведения штрафных коэффициентов на невязки ограничений исходной задачи могут служить оценками множителей Лагранжа. Для заданной точности можно спрогнозировать «подходящие» коэффициенты штрафных функций исходя из условия, что в каждом узле слагаемое, даваемое штрафом было одного порядка с вычисленным значением функции Лагранжа без учета штрафа.

Список литературы

[1] Андреева Е.А. Оптимальное управление динамическими системами. Тверь, 1999.

[2] Андреева Е.А. Применение двойственного метода для решения одной экстремальной задачи геометрии. Геометрические вопросы теории функций и множеств. Калинин, 1986.

[3] Андреева Е.А. Применение двойственного метода к исследованию экстремальных задач. Международная школа по оптимальному управлению. Грайсвальд, 1983, с. 5-9.

[4] Андреева Е.А., Надь Е. Двойственность в теории экстремальных задач. Международная школа по оптимальному управлению. Учебное пособие, Калинин, 1985.

[5] Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. Москва, Наука, 1969.

[6] Благодатских В.И. Принцип максимума для дифференциальных включений. Тр. Мат. Ин-та АН СССР, 1984. Т. 166.

[7] Бляшке В. Круг и шар. Москва, Наука, 1977.

[8] Болтянский В.Г., Яглом И.М. Выпуклые фигуры. М. Наука, 1951.

[9] Боннезен Т., Фенхель В. Теория выпуклых тел. Берлин, 1934.

[10] Бураго Д.М., Залгаллер В.А. Геометрические неравенства. Москва, Наука, 1980.

[11] Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. Москва, Московский университет, 1974.

[12] Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. Москва, ЖВМ и МФ, 1965 - 5, №3.

[13] Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. Москва, Наука, 1982.

[14] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. Москва, Наука, 1974.

[15] Красноженов Г.Г. Применение двойственного метода в экстремальных задачах геометрии. Методы и алгоритмы исследования задач оптимального управления: Сборник научных трудов ВЦ РАН, ТвГУ. Тверь: ТвГУ, 1999.

[16] Красноженов Г.Г. Применение двойственного метода в экстремальных задачах геометрии. Применение функционального анализа в теории приближений: Сборник научных трудов. Тверь: ТвГУ, 2000.

[17] Красножёнов Г.Г. Построение плоской выпуклой фигуры максимального периметра с промежуточными ограничениями. ТГУ, 2001.

[18] Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.Наука, 1973

[19] Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач. ДАН СССР, 1963, 153, №1.

[20] Савичева Ю.А. Решение экстремальных задач геометрии на плоскости, применение численных методов. Тверь: ТвГУ, Сборник 2006, с. 129-137.

[21] Andreeva J.A., Kloetzler R. Zur analytischen hЦsung geometrische Optimierungsaufgaben mit Dualitat bei Stenerungsaufgaben. Teil I, II, ZAMM, (64), 1984.

[22] Kloetzler R. Globale Optimiezung in der Steuerungs theorie. ZAMM, (63), 1983.

[23] Kloetzler R., Rudolph H. Zur Behandlung eines geometrischen Optimierungs problems von J.Steiner. Optimization, 16, (1985), S.233-845.

[24] Minkowski H. Theorie der konvexen Koerper. In Gesammelte Abh. 2 Leipzig, Teubner Verlag, 1911. S. 131-229.

[25] Sholander M. On certain minimum problems in the theorie of convex curves. Trans, Amer. Math. Soc., 83 (1952), p.139-173.