МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

УДК 510.665

РАЗРЕШИМОСТЬ ТЕОРИИ $T_c = \mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, c^x, \mathfrak{C}^x)$

Снятков А.С.
Кафедра информатики

В работе рассматривается расширение арифметики Семёнова $(\omega, 0, 1, <, +, c^x, \mathfrak{C}^x)$. Мы показываем, что теория этой системы является разрешимой, демонстрируя, что каждая формула эквивалентна экзистенциальной.

The article deals with the expansion of Semenov‘s arithmetic $(\omega, 0, 1, <, +, c^x, \mathfrak{C}^x)$. We show, that the theory of this system is solvable, demonstrating, that every formula is equivalent to an existential one.

Ключевые слова: арифметика Семёнова, арифметика Пресбургера, гипреэкспонента, согласованная со сложением функция.
Keywords: Semenov's arithmetic, Presburger's arithmetic, hyperexponent, addition-connected fucntion.

Введение. Арифметика натуральных чисел со сложением и умножением неразрешима, но арифметика натуральных чисел с одним сложением разрешима, как показал Пресбургер в 1929 году. Алгебраическая система $(\omega, 0, 1, <, +)$ — арифметика Пресбургера.

Семёнов расширил арифметику Пресбургера функциями, согласованными со сложением, и доказал, что такая теория разрешима. Примерами функций, согласованных со сложением, являются c^x, где c — константа, или $x!$.

Наш результат является обобщением результатов Семёнова для показательных функций. Мы добавляем к системе $(\omega, 0, 1, <, +, c^x)$ гиперэкспоненту по основанию c и показываем, что теория новой системы является разрешимой.

1. Определения. Далее всюду строчные готические буквы $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... (возможно, с индексами) будут обозначать целочисленные константы.

Пусть $\mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +)$ — обычная арифметика Пресбургера. Добавим в эту теорию два новых одноместных функциональных символа.

Полученную теорию будем обозначать T_c.

Значением первого функционального символа будет степень по основанию c: c^x, а второго — гиперэкспонента по основанию c, $c \in \omega$, $c > 1$.

Определим функцию $\mathfrak{C}^x$ следующим образом:

$$\mathfrak{C}^0 = 0, \mathfrak{C}^{x+1} = c^{\mathfrak{C}^x}.$$

Эта функция — гиперэкспонента по основанию c.

Заметим, что в теории T_c определимы следующие символы. Все натуральные числа:

$$x = \mathfrak{a} \iff x = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\mathfrak{a}\text{ раз}}.$$

Определимы предикаты делимости:

$$Q_{\mathfrak{a}}(x) \iff \exists y(\underbrace{y+y+\cdots+y}_{\mathfrak{a}\text{ раз}}=x)$$

для всех $\mathfrak{a} \in \omega$, $\mathfrak{a} \geqslant 2$. Мы будем использовать также вычитание, когда оно имеет смысл для натуральных чисел.

Используя перечисленные выше возможности, можно записать умножение на константу:

$$\mathfrak{a}x = z \iff z = \underbrace{x+x+\cdots+x}_{\mathfrak{a}\text{ раз}}$$

и целочисленное деление на константу:

$$\left[\frac{x}{\mathfrak{a}}\right] = z \iff \mathfrak{a}z \leqslant x \wedge \mathfrak{a}(z+1) > x.$$

Таким образом, мы можем выразить целую часть от умножения на любое рациональное число.

Также определимы обратные функции:

$$[\log_c x] = b \iff c^b \leqslant x \wedge c^{b+1} > x,$$

$$[\mathfrak{C}_{-1}{}^x] = b \iff \mathfrak{C}^b \leqslant x \wedge \mathfrak{C}^{b+1} > x.$$

Добавление к теории определимых символов не увеличивает выразительных возможностей, поэтому в дальнейшем мы будем включать все эти символы в состав теории.

В статье [1] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для каждого натурального $p > 1$ значение $\mathfrak{C}^x$ является константой по модулю p, начиная с некоторого x.*

Понятно, что выполняется следующее следствие из этой теоремы:

Следствие 1. *Формула вида $Q_i(\mathfrak{C}^x + \mathfrak{a})$, где $\mathfrak{a}$ — константа, эквивалентна некоторой булевой комбинации линейных неравенств для x.*

Мы продемонстрируем, что если теорию $T_c = \mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, c^x, \mathfrak{C}^x)$ обогатить предикатами делимости и обратными функциями, то в ней каждая формула эквивалента бескванторной. Эта бескванторная формула строится по исходной эффективно.

Далее по любому атомному предложению мы можем эффективно вычислить его истинностное значение, и, следовательно, мы можем тоже самое проделать для любого бескванторного предложения.

2. Элиминация кванторов в теории T_c. Теперь докажем одну из главных теорем о теории T_c.

Теорема 2. *В теории T_c любая формула эквивалентна экзистенциальной формуле, матрица которой является булевой комбинацией предикатов делимости и сравнений сумм вида*

$$\mathfrak{d} + \sum_v (\mathfrak{a}_v \mathfrak{C}^{v-\mathfrak{f}_v} + \mathfrak{b}_v c^v + \mathfrak{c}_v v) \qquad (1)$$

где $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{f}$ — константы(причём $\mathfrak{f} \geqslant 0$), а v — переменные из формулы.

Доказательство. Наша задача — продемонстрировать, что формула

$$\neg(\exists x_1, \ldots, x_n)\phi \tag{2}$$

эквивалентна экзистенциальной, если ϕ — бескванторная формула, причем при этом преобразовании матрица формулы не теряет нужного нам вида. Будем делать это индукцией по количеству кванторов, стоящих после знака отрицания. Изначально будем считать, что ϕ является конъюнкцией предикатов делимости и сравнений сумм вида (1). Также считаем, что под предикатом делимости стоит только одна функция, зависящая от x. В нашем случае это

$$x + \mathfrak{b}, c^x + \mathfrak{c}, \mathfrak{C}^x + \mathfrak{d}.$$

Этого легко добиться (см. [2]).

Прежде всего (см. [3]) отметим, что делимость числа c^u зависит от делимости u, то есть $Q_i(c^u + \mathfrak{a})$ есть булева комбинация формул вида $Q_j(u + \mathfrak{b})$ для некоторых j и $\mathfrak{b}$ и некоторых линейных неравенств для u.

Далее, формула $Q_i(\mathfrak{C}^u + \mathfrak{a})$ в силу теоремы 1 и ее следствия эквивалентна некоторой комбинации линейных неравенств для u.

Еще несколько тривиальных замечаний:

1. Если $\mathfrak{C}^{u_1} > \mathfrak{C}^{u_2}$, и $\mathfrak{C}^{u_1} < \mathfrak{c}\mathfrak{C}^{u_2}$ для некоторой константы $\mathfrak{c}$, то $\mathfrak{C}^{u_2}$ не может превосходить некоторой константы $\mathfrak{d}$, u_2 в свою очередь не превосходит некоторой константы $\mathfrak{b}$.

2. Если $d_1 \leqslant d$, и $c^d < \mathfrak{a}d_1$ для некоторой константы $\mathfrak{a}$, то d_1 не превосходит некоторой константы $\mathfrak{a}_1$.

3. Если $c^e \leqslant \mathfrak{a}e$, то e не может превосходить некоторой константы $\mathfrak{b}$.

4. Если $\mathfrak{C}^{e+\delta} \leqslant \mathfrak{a}e$, то e не может превосходить некоторой константы $\mathfrak{b}$.

5. Если $\mathfrak{C}^{e+\delta} \leqslant \mathfrak{a}c^e$, то e не может превосходить некоторой константы $\mathfrak{b}$.

Теперь у нас любая формула является булевой комбинацией предикатов делимости вида $Q_i(u + \mathfrak{a})$ и сравнений сумм вида (1).

Если для какого-то x_i из формулы (1) член c^{x_i} и член $\mathfrak{C}^{x_i}$ не встречается в неравенствах из ϕ, то квантор для этого x_i удаляется точно так же, как в арифметике Пресбургера (см., например, [2]).

Теперь мы можем считать, что для всех x_i имеется член c^{x_i} или член $\mathfrak{C}^{x_i}$. Без ограничения общности можно считать, что переменные из (1) упорядочены следующим образом:

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n$$

Считаем также, что среди этих переменных нет равных. Также удобно считать, что значение всех переменных больше 0. Всего этого можно добиться с помощью рассмотрения различных случаев и объединения их с помощью дизъюнкции. Такая операция не увеличит количества кванторов перед каждой из вновь полученных формул.

Приведем каждое неравенство из ϕ к виду

$$r_k \leqslant s_k \leqslant t_k, \tag{3}$$

где суммы s_k содержат только слагаемые с переменными x_i, а суммы r_k и t_k таких слагаемых не содержат. Ограничивающий член r_k, можно считать, есть всегда, в качестве него всегда можно взять 0. Верхняя граница t_k может отсутствовать.

Выберем в s_k максимальное по величине из слагаемых (без учета коэффициента перед ними). Это возможно сделать с помощью рассмотрения различных случаев и объединения их с помощью дизъюнкции.

Если есть несколько одинаковых максимальных (например, $c^{x_1} = \mathfrak{C}^{x_2}$), то возьмем любое из них. Умножим это слагаемое на коэффициент, который стоял перед ним. Полученное слагаемое по абсолютной величине будем обозначать σ.

Пусть s'_k — остаток суммы s_k (без σ). Слагаемое σ может иметь один из видов: $\mathfrak{a}c^{x_1}$, или $\mathfrak{a}\mathfrak{C}^{x_i-\mathfrak{f}}$, $i = 1, \ldots, n$, где $\mathfrak{a} \geqslant 1$.

Возможны две ситуации:

1. σ по модулю превосходит каждое s'_k не менее чем в два раза,

2. σ по модулю меньше $2s'_k$ для некоторого k.

I случай: $|\sigma| \geqslant 2|s'_k|$ для всех k.
Тогда для каждого s_k имеем оценку

$$\frac{1}{2}\sigma \leqslant s_k \leqslant \frac{3}{2}\sigma.$$

(A) Пусть $\sigma = \mathfrak{a}c^{x_1}$.

Выберем r_p — максимальный из всех r_k и t_q — минимальный из всех t_k.

Если $t_q \geqslant 3cr_p$ (или если верхние ограничения вообще отсутствуют), то на отрезке

$$\left[\frac{2r_p}{\mathfrak{a}}; \frac{2cr_p}{\mathfrak{a}}\right]$$

имеется какое-то значение степени по основанию c: c^u, следовательно, положив $x_1 = u$ будем иметь

$$r_k \leqslant r_p \leqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}c^u \leqslant s_k$$

и

$$t_k \geqslant t_q \geqslant 3cr_p = \frac{3}{2} \times 2cr_p \geqslant \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}c^u \geqslant s_k.$$

Получили, что (2) выполнено для всех k. И, следовательно, после замены x_1 на u истиность формулы не изменится.

Если же $t_q < 3cr_p$, то возможны два случая:

(a) $r_p > \mathfrak{a}$, то формула (1) эквивалентна такой:

$$(\exists u)(\mathfrak{a}c^u < r_p \leqslant c\mathfrak{a}c^u \wedge \neg(\exists x_2, \ldots, x_n) \bigvee_{x_1 \in \{u, u+1, u+2, u+3, u+4\}} \phi),$$

потому что при $x_1 \leqslant u - 1$ получаем

$$s_k \leqslant \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}c^{x_1} \leqslant \frac{3}{2} \times \frac{1}{c} \times \mathfrak{a}c^u = \frac{3}{2c} \times \mathfrak{a}c^u < r_p,$$

а при $x_1 \geqslant u + 5$ имеем

$$s_k \geqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}c^{x_1} \geqslant \frac{1}{2} \times c^4 \times \mathfrak{a}c^{u+1} = \frac{c^4}{2} \times \mathfrak{a}c^{u+1} \geqslant \frac{c^4}{2} r_p > t_q,$$

то есть и в том и в другом случае формула ϕ ложна.

(b) $r_p \leqslant \mathfrak{a}$, то формула (1) эквивалентна такой:

$$(\neg(\exists x_2, \ldots, x_n) \bigvee_{x_1 \in \{0,1,2,3\}} \phi),$$

потому что при $x_1 \geqslant 4$ имеем

$$s_k \geqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}c^{x_1} \geqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}c^4 = \frac{c^4}{2} \mathfrak{a} \geqslant \frac{c^4}{2} r_p > t_q,$$

то есть в этом случае формула ϕ ложна.

(B) Пусть $\sigma = \mathfrak{a}\mathfrak{C}^{x_i - \mathfrak{f}}$.

Выберем r_p — максимальный из всех r_k и t_q — минимальный из всех t_k.

Если $t_q \geqslant \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}c^{\frac{2r_p}{\mathfrak{a}}}$ (или если верхние ограничения вообще отсутствуют), то на отрезке

$$\left[\frac{2r_p}{\mathfrak{a}}; c^{\frac{2r_p}{\mathfrak{a}}}\right]$$

имеется какое-то значение гиперэкспоненты: $\mathfrak{C}^u$, следовательно, положив $x_i = u + \mathfrak{f}$, будем иметь

$$r_k \leqslant r_p \leqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}\mathfrak{C}^u = \frac{1}{2} \times \sigma \leqslant s_k$$

и

$$t_k \geqslant t_q \geqslant \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}c^{\frac{2r_p}{\mathfrak{a}}} \geqslant \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}\mathfrak{C}^u = \frac{3}{2} \times \sigma \geqslant s_k.$$

Получили, что (2) выполнено для всех k. И, следовательно, после замены x_i на $u + \mathfrak{f}$ истиность формулы не изменится.

Если же $t_q \leqslant \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}c^{\frac{2r_p}{\mathfrak{a}}}$, то формула (1) эквивалентна такой:

$$\begin{aligned}&(\exists u)(\exists u_1)(\exists u_2)(\exists u_3)((u_1 = u+1 \wedge u_2 = u+2 \wedge u_3 = u+3) \wedge \\ &\quad \wedge \mathfrak{a}\mathfrak{C}^{u-\mathfrak{f}} \leqslant r_p \leqslant \mathfrak{a}\mathfrak{C}^{u_1 - \mathfrak{f}} \wedge \neg(\exists x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \bigvee_{x_i \in \{u, u_1, u_2, u_3\}} \phi),\end{aligned}$$

потому что при $x_i \leqslant u - 1$ получаем

$$s_k \leqslant \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}\mathfrak{C}^{x_i - \mathfrak{f}} \leqslant \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}\mathfrak{C}^{u-1-\mathfrak{f}} \leqslant \frac{3}{2} \times \mathfrak{a} \log_c \mathfrak{C}^{u-\mathfrak{f}} < \frac{3}{4} \times \mathfrak{a}\mathfrak{C}^{u-\mathfrak{f}} < r_p,$$

а при $x_i \geqslant u_3 + 1 = u + 4$ имеем

$$\begin{aligned}s_k &\geqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}\mathfrak{C}^{x_i - \mathfrak{f}} \geqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}\mathfrak{C}^{u-\mathfrak{f}+4} = \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}c^{c^{c^{\mathfrak{C}^{u-\mathfrak{f}+1}}}} = \\ &= \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}c^{c^{c^{\mathfrak{C}^{u_1 - \mathfrak{f}}}}} \geqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}c^{c^{c^{\frac{r_p}{\mathfrak{a}}}}} > \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}c^{\frac{2r_p}{\mathfrak{a}}} \geqslant t_q.\end{aligned}$$

то есть и в том и в другом случае формула ϕ ложна.

II случай: $|\sigma| < 2|s'_k|$ для некоторого k.
Выберем в s_k второе по величине из слагаемых (без учета коэффициента перед ними). Если максимальных слагаемых было несколько, то берем другое максимальное. Умножим это слагаемое на коэффициент, который стоял перед ним. Полученное слагаемое по абсолютной величине будем обозначать τ. Пусть $\mathfrak{c}$ — удвоенная сумма модулей всех коэффициентов из s'_k, то есть некоторая константа. Тогда получаем:

$$\sigma < \mathfrak{c}\tau.$$

Рассмотрим все случаи для τ и покажем, как в каждом из них можно уменьшить количество кванторов в формуле (1).

1. $\sigma = \mathfrak{a}c^{x_1}, \tau = \mathfrak{b}x_j, j \geqslant 1$. Возможны два случая:

   (a) $\mathfrak{b}x_j \leqslant \mathfrak{a}c^{x_1}$.
   Имеем:
   $$\mathfrak{b}x_j \leqslant \mathfrak{a}c^{x_1} < \mathfrak{c}\mathfrak{b}x_j$$
   Получаем, что
   $$x_j \leqslant x_1 \text{ и } c^{x_1} < \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \times x_j$$
   и, согласно сделанному в начале доказательства замечанию, x_j не превосходит некоторую константу.

   (b) $\mathfrak{b}x_j > \mathfrak{a}c^{x_1}$.
   Имеем:
   $$x_j \leqslant x_1 \text{ и } c^{x_1} < \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \times x_j$$
   и, согласно сделанному в начале доказательства замечанию, x_j не превосходит некоторую константу.

2. $\sigma = \mathfrak{a}c^{x_1}, \tau = \mathfrak{b}c^{x_j}, j > 1$. Возможны два случая:

   (a) $\mathfrak{b}c^{x_j} \leqslant \mathfrak{a}c^{x_1} < \mathfrak{c}\mathfrak{b}c^{x_j}$,
   Но тогда получаем, что x_1 может принимать конечное количество значений:
   $$x_j + \log_c \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}, \ldots, x_j + \log_c \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$$
   и можно вместо x_1 подставить эти значения, объединив полученные формулы дизъюнкцией.

   (b) $c^{x_j} < \mathfrak{a}c^{x_1} < \mathfrak{b}c^{x_j}$,
   Этот случай рассматривается аналогично случаю (a).

3. $\sigma = \mathfrak{a}c^{x_1}, \tau = \mathfrak{b}\mathfrak{C}^{x_j - \mathfrak{f}}, j > 1$. Возможны два случая:

(a) $\mathfrak{b}\mathfrak{C}^{x_j-\mathfrak{f}} \leqslant \mathfrak{a}c^{x_1} < \mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{C}^{x_j-\mathfrak{f}}$

Но тогда получаем, что x_1 может принимать конечное количество значений:

$$\mathfrak{C}^{x_j-1-\mathfrak{f}} + \log_c \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}, \ldots, \mathfrak{C}^{x_j-1-\mathfrak{f}} + \log_c \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$$

и можно вместо x_1 подставить эти значения, объединив полученные формулы дизъюнкцией.

(b) $\mathfrak{C}^{x_j-\mathfrak{f}} < \mathfrak{a}c^{x_1} < \mathfrak{b}\mathfrak{C}^{x_j-\mathfrak{f}}$.

Этот случай рассматривается аналогично случаю (a).

4. $\sigma = \mathfrak{a}\mathfrak{C}^{x_i-\mathfrak{f}}, \tau = \mathfrak{b}x_j, j \geqslant 1$.

Возможны два случая:

(a) $\mathfrak{b}x_j \leqslant \mathfrak{a}\mathfrak{C}^{x_i-\mathfrak{f}}$.

Имеем:

$$\mathfrak{b}x_j \leqslant \mathfrak{a}\mathfrak{C}^{x_i-\mathfrak{f}} < \mathfrak{c}\mathfrak{b}x_j,$$

Если в каком-то $s_l (l \neq k)$ содержится член $\mathfrak{C}^{x_j-\mathfrak{e}}$, то получаем

$$\mathfrak{C}^{x_j-\mathfrak{e}} \leqslant \mathfrak{C}^{x_i-\mathfrak{f}},$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{C}^{x_i-\mathfrak{f}} \leqslant \mathfrak{c}\mathfrak{b}x_j,$$

$$\mathfrak{C}^{x_j-\mathfrak{e}} \leqslant \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}x_j,$$

и, согласно сделанному в начале доказательства замечанию, x_j не превосходит некоторую константу.

Если в каком-то $s_l (l \neq k)$ содержится член c^{x_j}, то получаем

$$c^{x_j} \leqslant \mathfrak{C}^{x_i-\mathfrak{f}},$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{C}^{x_i-\mathfrak{f}} \leqslant \mathfrak{c}\mathfrak{b}x_j,$$

$$c^{x_j} \leqslant \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}x_j,$$

и, согласно сделанному в начале доказательства замечанию, x_j не превосходит некоторую константу.

(b) $\mathfrak{b}x_j > \mathfrak{a}\mathfrak{C}^{x_i-\mathfrak{f}}$. Этот случай рассматривается аналогично случаю (a).

5. $\sigma = \mathfrak{a}\mathfrak{C}^{x_i-\mathfrak{f}}, \tau = \mathfrak{b}c^{x_j}, j \geqslant 1$ Возможны два случая:

(a) $\mathfrak{b}c^{x_j} \leqslant \mathfrak{a}\mathfrak{C}^{x_i-f} < \mathfrak{c}\mathfrak{b}c^{x_j}$,

Если в каком-то $s_l (l \neq k)$ содержится член $\mathfrak{C}^{x_j-\mathfrak{e}}$, то получаем

$$\mathfrak{C}^{x_j-\mathfrak{e}} \leqslant \mathfrak{C}^{x_i-\mathfrak{f}},$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{C}^{x_i-\mathfrak{f}} \leqslant \mathfrak{c}\mathfrak{b}c^{x_j},$$

$$\mathfrak{C}^{x_j-\mathfrak{e}} \leqslant \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}c^{x_j},$$

и, согласно сделанному в начале доказательства замечанию, x_j не превосходит некоторую константу.

Если же ни в каком s_l не содержится член $\mathfrak{C}^{x_j-\mathfrak{e}}$, то, так как $\mathfrak{C}^{x_i-\mathfrak{f}} = c^{\mathfrak{C}^{x_i-\mathfrak{f}-1}}$, получаем что

$$\mathfrak{b}c^{x_j} < \mathfrak{a}c^{\mathfrak{C}^{x_i-\mathfrak{f}-1}} < \mathfrak{c}\mathfrak{b}c^{x_j}.$$

Но тогда x_j может принимать лишь значения на отрезке

$$\left[\mathfrak{C}^{x_i-\mathfrak{f}-1} + \log_c \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}; \mathfrak{C}^{x_i-\mathfrak{f}-1} + \log_c \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right],$$

то есть вместо квантора по x_j можно написать дизъюнкцию формул.

(b) $c^{x_j} < \mathfrak{a}\mathfrak{C}^{x_i-f} < \mathfrak{b}c^{x_j}$,

Этот случай рассматривается аналогично случаю (a).

6. $\sigma = \mathfrak{a}\mathfrak{C}^{x_i-\mathfrak{f}}, \tau = \mathfrak{b}\mathfrak{C}^{x_j-\mathfrak{e}}, j \geqslant 1$ Возможны два случая:

(a) $\mathfrak{b}\mathfrak{C}^{x_j-\mathfrak{e}} \leqslant \mathfrak{a}\mathfrak{C}^{x_i-\mathfrak{f}} < \mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{C}^{x_j-\mathfrak{e}}$,

но, согласно сделанному в начале доказательства замечанию, x_j не превосходит некоторую константу.

(b) $\mathfrak{C}^{x_j-\mathfrak{e}} < \mathfrak{a}\mathfrak{C}^{x_i-\mathfrak{f}} < \mathfrak{b}\mathfrak{C}^{x_j-\mathfrak{e}}$,

Этот случай рассматривается аналогично случаю (a).

Итак, мы убедились, что в первом случае количество элиминируемых кванторов можно уменьшить, добавляя новые кванторы существования перед отрицанием, а во втором — сократить их количество, используя вместо кванторов дизъюнкцию. □

Теперь докажем главную теорему нашей работы.

Теорема 3. *В теории T_c любая формула эквивалентна бескванторной формуле.*

Доказательство. В предыдущей теореме мы установили, что в теории T_c любая формула эквивалентна экзистенциальной формуле. То есть нам осталось доказать, что формула

$$(\exists x_1, \ldots, x_n)\phi \tag{4}$$

эквивалентна бескванторной.

Будем доказывать это индукцией по количеству кванторов.

Это доказательство почти в точности повторяет доказательство предыдущей теоремы, с тем лишь отличием, что в случае 1 t_k и r_k не содержат переменных, а только константы.

В случае (A) мы можем в качестве переменной u взять $\log_c \frac{r_p}{\mathfrak{a}} - 1$.

В случае (B) мы можем вместо переменной u подставить значения $\mathfrak{C}_{-1}{}^{\frac{r_p}{\mathfrak{a}}} - 1$ или $\mathfrak{C}_{-1}{}^{\frac{r_p}{\mathfrak{a}}}$, вместо переменной u_1 подставить значения $\mathfrak{C}_{-1}{}^{\frac{r_p}{\mathfrak{a}}}$ или $\mathfrak{C}_{-1}{}^{\frac{r_p}{\mathfrak{a}}} + 1$, вместо переменной u_2 подставить значения $\mathfrak{C}_{-1}{}^{\frac{r_p}{\mathfrak{a}}} + 1$ или $\mathfrak{C}_{-1}{}^{\frac{r_p}{\mathfrak{a}}} + 2$, вместо переменной u_3 подставить значения $\mathfrak{C}_{-1}{}^{\frac{r_p}{\mathfrak{a}}} + 2$ или $\mathfrak{C}_{-1}{}^{\frac{r_p}{\mathfrak{a}}} + 3$, объединив полученные формулы дизъюнкцией.

□

Список литературы

[1] Дудаков С.М. Трансляционная теорема и автоматные структуры. // Вестник ТвГУ, серия «Прикладная математика», 4(21), 2006, с. 5–35.

[2] Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. // М.: Мир, 1994.

[3] Семёнов А.Л. Логические теории одноместных функций на натуральном ряде. // Изв. АН СССР, 47(3), 1983, с. 623–658.