ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

УДК 514.7+512.5

К ГЕОМЕТРИИ ГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ $R^q \times R^p \to R^\lambda$, ОБОБЩАЮЩИХ ГРУППЫ

Толстихина Г.А.
Кафедра математики с методикой начального образования

Поступила в редакцию 20.04.2007, после переработки 10.05.2007.

В работах [7],[10] было обобщено понятие ассоциативности для гладких группоидов $z = f(x,y)$, где переменные x, y, z имеют разную размерность, и рассмотрен соответствующий геометрический объект — многомерная три-ткань, образованная слоениями разных размерностей. В настоящей работе для гладких группоидов определяется нетривиальный аналог коммутативных групп Ли и находятся уравнения соответствующей многомерной три-ткани.

The notions of associativity was generalized by author in [7], [10] for smooth functions, where the dimensions x, y, z are different. In this paper for smooth grouppoids we introduce a nontrivial analogue for commutative Li groups and we establish equations for corresponding multidimensional three-web.

Ключевые слова: три-ткани, группы Ли.
Keywords: three-web, Li groups.

Введение. Произвольная гладкая функция

$$z = f(x,y), \tag{1}$$

где $x,\ y,\ z$ — векторные переменные, вообще говоря, разной размерности, $x \in X \subset R^q$, $y \in Y \subset R^p$, $z \in Z \subset R^\lambda$, $\lambda \le p \le q$, определяет на многообразии $\mathcal{M} = X \times Y$ размерности $p+q$ три-ткань $W(p,q,r)$, образованную тремя слоениями

$$\lambda_1 :\ x = const, \quad \lambda_2 :\ y = const, \quad \lambda_3 :\ z = f(x,y) = const \tag{2}$$

размерностей, соответственно, $p,\ q$ и $r = p + q - \lambda$, см. [7-10]. Уравнение (1) в некоторых локальных координатах записывается как

$$z^\xi = f^\xi(x^i, y^\alpha),$$

$\xi = \overline{1,\lambda},\ \ i = \overline{1,q},\ \ \alpha = \overline{1,p}$. Разбивая совокупность переменных $x^1, ..., x^q,\ y^1, ..., y^p$ на различные группы, мы будем получать другие ткани с разным числом слоений и разной, вообще говоря, коразмерности. В частности, каждую из переменных

$x^1, ..., x^q, y^1, ..., y^p$ можно рассматривать в отдельности, тогда получается $(p+q+1)$-ткань, образованная $p+q$ слоениями коразмерности 1 и одним слоением коразмерности $\lambda = p+q-r$, которое является третьим слоением исходной три-ткани $W(p,q,r)$. В настоящей работе рассматривается случай, когда уравнение (1), задающее три-ткань $W(p,q,r)$, определяет также $(n+1)$-ткань, образованную $n+1$ слоениями одинаковой коразмерности λ, причем одно из слоений — $(n+1)$-ое — совпадает с третьим слоением исходной три-ткани $W(p,q,r)$. В этом случае число q переменных $x^1, ..., x^q$ и число p переменных $y^1, ..., y^p$ в уравнении (1) должны быть кратны λ, $q = \lambda m$, $p = \lambda l$, тогда число r также кратно λ, $r = p+q-\lambda = \lambda(l+m-1)$. Такие три-ткани мы обозначаем $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$.

В §1 показано, что на произвольном (λl)-мерном слое три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ (и только такой ткани) возникает $(l+1)$-ткань коразмерности λ, а на произвольном (λm)-мерном слое — $(m+1)$-ткань той же коразмерности λ. В §2 найден вид конечных уравнений три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$:

$$z = \tilde{f}(u_1, ..., u_m; v_1, ..., v_l),$$

где все переменные имеют одинаковую размерность λ, то есть $z = (z^1, ..., z^\lambda)$, $u_\mu = (u_\mu^1, ..., u_\mu^\lambda)$, $\mu = \overline{1,m}$, $v_s = (v_s^1, ..., v_s^\lambda)$, $s = \overline{1,l}$. Последние уравнения определяют также $(n+1)$-ткань, $n = m+l$, образованную $n+1$ слоениями одинаковой коразмерности λ:

$$u_1 = \bar{C}_1,\ ...,\ u_m = \bar{C}_m,\ v_1 = \tilde{C}_1,\ ...,\ v_l = \tilde{C}_l,\ z = C,$$

где $\bar{C}_1,\ ...,\ \bar{C}_m,\ \tilde{C}_1,\ ...,\ \tilde{C}_l,\ C$ — постоянные векторы. Эта $(n+1)$-ткань обозначена $\tilde{W}^\lambda(a,b)$.

В §3 мы записываем структурные уравнения $(n+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(a,b)$, которые, с другой стороны, являются и структурными уравнениями три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$. Эти структурные уравнения допускают более узкую группу сохраняющих их преобразований, нежели структурные уравнения три-ткани $W(p,q,r)$ наиболее общего вида, найденные М.А. Акивисом и В.В. Гольдбергом в [1].

Для три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ в работе [7] мы определили конфигурацию $R(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, аналогичную конфигурации Рейдемейстера для три-ткани $W(r,r,r)$. Три-ткань $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, на которой замыкаются все достаточно малые конфигурации $R(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, названа в [7] обобщенной три-тканью Рейдемейстера и обозначена $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$. В случае $l = m = 1$ эта три-ткань является классической тканью Рейдемейстера R, образованной тремя слоениями одинаковой размерности λ, которая определяется, как известно, некоторой λ-мерной группой Ли, то есть координатный группоид (1) такой ткани является (с точностью до изотопии) группой Ли [2]. В §4 настоящей работы мы доказываем, что $(n+1)$-, $(l+1)$- и $(m+1)$-ткани, связанные с обобщенной три-тканью Рейдемейстера $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, также порождаются некоторой λ-мерной группой Ли G.

Структурные уравнения три-ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ найдены в §5. Они связаны с уравнениями Маурера-Картана группы G. В §5 мы показываем также, что с каждой точкой многообразия, несущего три-ткань $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, связан набор локальных коммутативных и ассоциативных алгебр. В случае, если группа G абелева, мы находим в §6 конечные уравнения соответствующей три-ткани и показываем, что она вполне определяется (с точностью до изотопии специального вида) некоторым набором коммутативных и ассоциативных алгебр.

1. Ткани коразмерности λ, индуцируемые три-тканью $\mathbf{W}(\lambda\mathbf{l}, \lambda\mathbf{m}, \lambda(\mathbf{l}+\mathbf{m}-\mathbf{1}))$.

1.1. Пусть три-ткань $W(p, q, r)$ задана уравнением (1). Это уравнение связывает параметры слоев, проходящих через одну точку многообразия $\mathcal{M}$. С другой стороны, уравнение (1) определяет трехбазисную бинарную операцию $(\cdot) : X \times Y \to Z, \quad z = x \cdot y \equiv f(x, y)$, названную в [8] локальным координатным группоидом три-ткани $W(p, q, r)$. Согласно определению три-ткани $W(p, q, r)$ [1], слои ее третьего слоения находятся в общем положении со слоями первого и второго слоений, то есть имеют с этими слоями пересечение минимальной размерности соответственно $r - q$ и $r - p$, поэтому в каждой точке области определения ранги матриц Якоби $(\partial f/\partial x)$ и $(\partial f/\partial y)$ максимальны.

Как и в [8], мы рассматриваем ткани $W(p, q, r)$ с точностью до локальных диффеоморфизмов $\tilde{x} = \alpha(x)$, $\tilde{y} = \beta(y)$, $\tilde{z} = \gamma(z)$, не уменьшающих число переменных в уравнениях ткани (1) (подробнее об этом см. в [8]). Тройка локальных биекций (α, β, γ) определяет изотопическое преобразование координатного группоида ткани, при котором уравнение (1) перейдет в уравнение $\tilde{z} = \tilde{f}(\tilde{x}, \ \tilde{y}) = \gamma \circ f(\alpha^{-1}(\tilde{x}), \ \beta^{-1}(\tilde{y}))$. Последнее можно рассматривать как уравнение той же ткани $W(p, q, r)$, но в новых локальных координатах, либо как уравнение новой ткани $\tilde{W}(p, q, r)$, эквивалентной ткани $W(p, q, r)$.

1.2. Согласно [9] три-ткань $W(p, q, r)$ при $r = p + q - 1$, $p > 1$ и $q > 1$ индуцирует на произвольном p-мерном (вертикальном) слое x_0 некоторую $(p+1)$-ткань $\tilde{W}(a, x_0)$, а на произвольном q-мерном (горизонтальном) слое y_0 — $(q+1)$-ткань $\tilde{W}(b, y_0)$. (Здесь и далее мы обозначаем слои ткани и определяющие их параметры одними и теми же символами).

Рассмотрим произвольную три-ткань $W(p, q, r)$ и построим на ее вертикальных и горизонтальных слоях $(n+1)$-ткани, аналогичные тканям $\tilde{W}(a, x_0)$ и $\tilde{W}(b, y_0)$. Для этого зафиксируем в окрестности $\mathcal{N}$ точки $A_0 = x_0 \cap y_0$ ткани $W(p, q, r)$ координатную решетку, образованную фиксированным набором $a = (a_1, ..., a_l)$ из l достаточно близких вертикальных слоев и фиксированным набором $b = (b_1, ..., b_m)$ из m достаточно близких горизонтальных слоев. Наклонные слои ткани $W(p, q, r)$ высекают на горизонтальных слоях b_μ семейства $(r-p)$-мерных подмногообразий U_μ, $\mu = \overline{1, m}$, см. рис. 1.

Проектируя последние вертикальными слоями на произвольный горизонтальный слой y_0, отличный от слоев b_μ, получаем на нем m семейств подмногообразий $\tilde{U}_\mu$ такой же размерности $r - p$ (или коразмерности $p + q - r$, здесь и далее указывается коразмерность относительно слоя). Согласно определению $(n+1)$-ткани [3], она должна быть образована $n + 1$ слоениями (общего положения) коразмерности ρ на многообразии размерности $n\rho$. Поэтому m семейств подмногообразий $\tilde{U}_\mu$ коразмерности $p+q-r$ на q-мерном слое y_0 будут слоениями некоторой $(m+1)$-ткани в том и только том случае, если

$$q = m(p + q - r). \tag{3}$$

Заметим, что последнее равенство эквивалентно требованию, чтобы m слоений $(m+1)$-ткани однозначно определяли слоение с номером $m + 1$, то есть чтобы

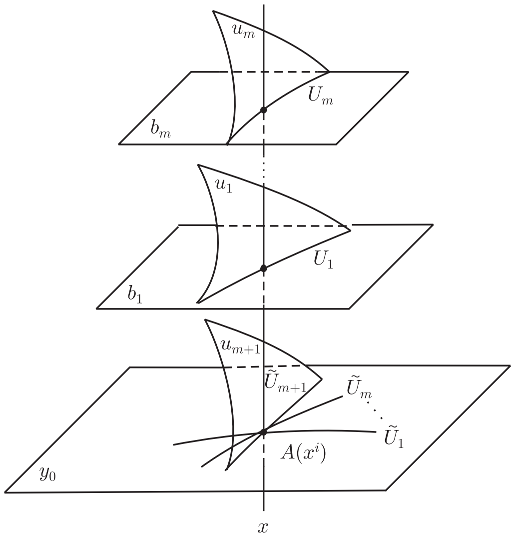

Рис. 1

существовала координатная m-квазигруппа $(m+1)$-ткани [3]. Обозначим построенную $(m+1)$-ткань $\tilde{W}^{\lambda}(b, y_0)$, где

$$\lambda = p + q - r. \tag{4}$$

Аналогично, наклонные слои ткани $W(p, q, r)$ высекают на фиксированных вертикальных слоях a_s семейства $(r-q)$-мерных подмногообразий V_s, $s = \overline{1, l}$. Проектируя их горизонтальными слоями на произвольный вертикальный слой x_0, отличный от слоев a_s, получаем на нем l семейств подмногообразий $\tilde{V}_s$ коразмерности $p+q-r$. Они образуют на p-мерном слое x_0 $(l+1)$-ткань (обозначим ее $\tilde{W}^{\lambda}(a, x_0)$), если выполняется равенство

$$p = l(p + q - r). \tag{5}$$

Подставляя (4) в равенства (3) и (5), запишем последние в виде

$$q = \lambda m, \quad p = \lambda l. \tag{6}$$

Из (4) в силу равенств (6) получаем

$$r = p + q - \lambda = \lambda(l + m - 1). \tag{7}$$

Три-ткань $W(p, q, r)$, образованную тремя слоениями размерностей p, q, r при условиях (6), (7), обозначим $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$.

Покажем, что три-ткань $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$ определяет в области $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ некоторую $(n+1)$-ткань, где $n = l + m$. Обозначим через $\bar{U}_\mu$ подмногообразие вертикальных слоев ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$, пересекающих подмногообразие $\tilde{U}_\mu$ (лежащее на горизонтальном слое y_0, см. выше), а через $\bar{V}_s$ — подмногообразие горизонтальных слоев ткани, пересекающих подмногообразие $\tilde{V}_s$ (лежащее на вертикальном слое x_0). Подмногообразия $\bar{U}_\mu$ и $\bar{V}_s$ имеют одинаковую размерность

$\lambda(l+m-1)$, $\dim \bar{U}_\mu = (r-p)+p = r = \lambda(l+m-1)$, $\dim \bar{V}_s = (r-q)+q = r = \lambda(l+m-1)$, и, соответственно, одинаковую коразмерность λ. Семейства этих подмногообразий образуют в области $\mathcal{N}$ $l+m$ слоений. Вместе с семейством наклонных слоев ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, которые имеют ту же коразмерность λ, они образуют $(n+1)$-ткань, где $n = l+m$. Обозначим эту ткань $\tilde{W}^\lambda(a,b)$. Доказана следующая

Теорема 1. *Три-ткань типа $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ и только такая ткань индуцирует*

- *на несущем ее (λn)-мерном многообразии $\mathcal{M}$, где $n = l+m$, $(n+1)$-ткань $\tilde{W}^\lambda(a,b)$;*

- *на своем произвольном вертикальном (λl)-мерном слое x_0 — $(l+1)$-ткань $\tilde{W}^\lambda(a,x_0)$;*

- *на своем произвольном горизонтальном (λm)-мерном слое y_0 — $(m+1)$-ткань $\tilde{W}^\lambda(b,y_0)$.*

Замечание. При $\lambda = 1$ получается три-ткань $W(p,q,p+q-1)$ и индуцируемые ею $(p+1)$-ткани $\tilde{W}(a,x_0)$ и $(q+1)$-ткани $\tilde{W}(b,y_0)$, рассмотренные в [9].

2. Конечные уравнения тканей, индуцируемых три-тканью $\mathbf{W}(\lambda \mathbf{l}, \lambda \mathbf{m}, \lambda(\mathbf{l}+\mathbf{m}-\mathbf{1}))$.

2.1. Покажем, как находить конечные уравнения $(n+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(a,b)$, $(m+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(b,y_0)$ и $(l+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(a,x_0)$ по уравнению (1). Согласно определению, уравнение ткани связывает параметры слоев, проходящих через одну точку. Рассмотрим сначала $(m+1)$-ткань $\tilde{W}^\lambda(b,y_0)$. Пусть $\tilde{U}_1, ..., \tilde{U}_m, \tilde{U}_{m+1}$ — слои этой ткани, проходящие через точку $A \in y_0$. Так как по определению слой $\tilde{U}_\mu$, $\mu = \overline{1,m}$, получается проектированием подмногообразия $U_\mu = u_\mu \cap b_\mu$, то параметр наклонного слоя u_μ можно считать и параметром слоя $\tilde{U}_\mu$ ткани $\tilde{W}^\lambda(b,y_0)$. Слой с номером $m+1$ ткани $\tilde{W}^\lambda(b,y_0)$ высекается (на слое y_0) некоторым наклонным слоем u_{m+1}, поэтому u_{m+1} можно считать параметром этого слоя. Значит, уравнение ткани $\tilde{W}^\lambda(b,y_0)$ должно связывать параметры $u_1, ..., u_m$ и u_{m+1}. С другой стороны, по определению ткани $W(p,q,r)$, заданной уравнением (1), имеем $u_\mu = f(x, b_\mu)$, $u_{m+1} = f(x, y_0)$, или, в некоторых локальных координатах,

$$\begin{aligned} u^\xi_\mu &= f^\xi(x^1, x^2, ..., x^q;\ b^1_\mu, b^2_\mu, ..., b^p_\mu), \\ u^\xi_{m+1} &= f^\xi(x^1, x^2, ..., x^q;\ y^1_0, y^2_0, ..., y^p_0), \end{aligned} \tag{8}$$

где $\mu = \overline{1,m}$, $\xi = \overline{1,\lambda}$. При этом, согласно [3], должны выполняться условия $\left| \dfrac{\partial u^\xi_\mu}{\partial x^i} \right| \neq 0$, $i = \overline{1,q}$. Исключая из системы (8) переменные $x = (x^1, x^2, ..., x^q)$, получим уравнения $(m+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(b,y_0)$ в виде

$$u^\xi_{m+1} = \tilde{f_1}^\xi(u^\eta_1, ..., u^\eta_m,\ y_0), \tag{9}$$

где $\eta = \overline{1,\lambda}$, $y_0 = (y^1_0, y^2_0, ..., y^p_0)$. С другой стороны, согласно [3] последние уравнения определяют одну из координатных m-квазигрупп $(m+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(b,y_0)$.

Аналогично, уравнения $(l+1)$-ткани $\tilde{W}^{\lambda}(a,x_0)$ приводятся к виду

$$v^{\xi}_{l+1}=\tilde{f_2}^{\xi}(x_0,\ v^{\eta}_1,...,v^{\eta}_l), \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} v^{\eta}_s &= f^{\eta}(a^1_s,a^2_s,...,a^q_s;\ y^1,y^2,...,y^p),\\ v^{\eta}_{l+1} &= f^{\eta}(x^1_0,x^2_0,...,x^q_0;\ y^1,y^2,...,y^p), \end{aligned} \tag{11}$$

$s=\overline{1,l}$, $\mid \dfrac{\partial v^{\eta}_s}{\partial y^{\alpha}} \mid\neq 0$, $\alpha=\overline{1,p}$. Уравнения (10) определяют также одну из координатных l-квазигрупп $(l+1)$-ткани $\tilde{W}^{\lambda}(a,x_0)$.

Заметим, что уравнения (9) получаются из уравнения (1) координатного группоида три-ткани $W(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$ заменой локальных координат x^i на u^{ξ}_{μ} по формулам (8) и фиксацией параметров $y^{\alpha}=y^{\alpha}_0$, а уравнения (10) получаются также из уравнения (1) заменой локальных координат y^{α} на v^{ξ}_s по формулам (11) и фиксацией параметров $x^i=x^i_0$. С другой стороны, уравнения (8) и (11) определяют изотопическое преобразование координатного группоида $(\cdot)$ ткани $W(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$, при котором уравнение (1) преобразуется к виду

$$z=\tilde{f}(u_1,...,u_m;v_1,...,v_l), \tag{12}$$

а уравнения (2) слоений этой ткани принимают следующий вид:

$$\lambda_1:\ u_1=\bar{C}_1,\ ...,\ u_m=\bar{C}_m;\ \lambda_2:\ v_1=\tilde{C}_1,\ ...,\ v_l=\tilde{C}_l;\ \lambda_3:\ z=C, \tag{13}$$

где $\bar{C}_{\mu}$, $\tilde{C}_s$, C — постоянные векторы. Согласно [7] уравнения (12) определяют так называемый координатный моноид $\mu_{(a,b)}(\circ)$ три-ткани $W(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$, то есть группоид с единичным элементом, главноизотопный координатному группоиду $(\cdot)$.

2.2. Покажем, что уравнения (12) определяют одну из координатных n-квазигрупп $(n+1)$-ткани $\tilde{W}^{\lambda}(a,b)$. Действительно, для каждого $\mu=\overline{1,m}$ уравнение $u_{\mu}=f(x,b_{\mu})=\bar{C}_{\mu}$ определяет на многообразии $\mathcal{M}=X\times Y$ семейство вертикальных слоев ткани $W(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$, пересекающих подмногообразие $\tilde{U}_{\mu}$, то есть слой $\bar{U}_{\mu}$ $(n+1)$-ткани $\tilde{W}^{\lambda}(a,b)$. Аналогично, для каждого $s=\overline{1,l}$ уравнение $v_s=f(a_s,y)=\tilde{C}_s$ определяет на многообразии $\mathcal{M}=X\times Y$ семейство горизонтальных слоев ткани $W(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$, пересекающих подмногообразие $\tilde{V}_s$, то есть слой $\bar{V}_s$ $(n+1)$-ткани $\tilde{W}^{\lambda}(a,b)$. Слои $\bar{U}_1,...,\bar{U}_m$, $\bar{V}_1,...,\bar{V}_l$ пересекаются в некоторой точке A, которая получается так: $\bar{U}_1\cap...\cap\bar{U}_m=x$, $\bar{V}_1\cap...\cap\bar{V}_l=y$, $x\cap y=A$. Через A проходит единственный наклонный слой z три-ткани $W(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$, а последний является по определению $(n+1)$-ткани $\tilde{W}^{\lambda}(a,b)$ ее $(n+1)$-ым слоем. Таким образом, уравнения (12) связывают параметры слоев $\bar{U}_1,...,\bar{U}_m$, $\bar{V}_1,...,\bar{V}_l$ и z $(n+1)$-ткани $\tilde{W}^{\lambda}(a,b)$, проходящих через одну точку A, а значит определяют согласно [3] координатную n-квазигруппу этой ткани. Слоения $(n+1)$-ткани $\tilde{W}^{\lambda}(a,b)$ задаются уравнениями (13), рассматриваемыми по отдельности, то есть уравнениями

$$u_1=\bar{C}_1,\quad ...,\quad u_m=\bar{C}_m,\quad v_1=\tilde{C}_1,\quad ...,\quad v_l=\tilde{C}_l,\quad z=C. \tag{14}$$

2.3. Уравнения (9) и (10) тканей $\tilde W^\lambda(b, y_0)$ и $\tilde W^\lambda(a, x_0)$ изотопическим преобразованием (8), (11) приводятся соответственно к виду

$$z = \tilde f(u_1, ..., u_m; v_{10}, ..., v_{l0}) \tag{15}$$

и

$$z = \tilde f(u_{01}, ..., u_{0m}; v_1, ..., v_l), \tag{16}$$

где $u_\mu = (u_\mu^1, ..., u_\mu^\lambda)$, $v_s = (v_s^1, ..., v_s^\lambda)$, $v_{s0} = a_s \cdot y_0$, $u_{0\mu} = x_0 \cdot b_\mu$. Отсюда следует, что в новых локальных координатах уравнения тканей $\tilde W^\lambda(b, y_0)$ и $\tilde W^\lambda(a, x_0)$ получаются из уравнений (12) фиксацией в них соответственно векторных параметров $v_s = v_{s0}$ и $u_\mu = u_{0\mu}$.

Итак, доказано следующее

Предложение 1. На многообразии $\mathcal M$, несущем три-ткань $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l{+}m{-}1))$, существуют локальные координаты, в которых эта три-ткань и связанная с нею $(n{+}1)$-ткань $\tilde W^\lambda(a, b)$ определяются одними и теми же уравнениями (12). Уравнения (15) и (16) тканей $\tilde W^\lambda(b, y_0)$ и $\tilde W^\lambda(a, x_0)$, индуцируемых три-тканью $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$ на ее горизонтальных и вертикальных слоях, получаются из уравнений (12) фиксацией в них соответствующих векторных параметров $v_s = v_{s0}$ и $u_\mu = u_{0\mu}$.

Замечание. Уравнения (12) определяют $(n{+}1)$-ткань $\tilde W^\lambda(a, b)$ с точностью до преобразований вида $\tilde u_\mu = \tilde\alpha_\mu(u_\mu), \tilde v_s = \tilde\beta_s(v_s), \tilde z = \tilde\gamma(z)$, сохраняющих ее слоения. С другой стороны, уравнения (12) определяют три-ткань $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$, и поэтому их можно рассматривать с точностью до преобразований более общего вида $\tilde u_\mu = \alpha_\mu(u_1, ..., u_m)$, $\tilde v_s = \beta_s(v_1, ..., v_l)$, $\tilde z = \gamma(z)$, которые сохраняют слоения этой три-ткани, но не сохраняют, вообще говоря, структуру $(n{+}1)$-ткани $\tilde W^\lambda(a, b)$.

3. Структурные уравнения три-ткани $\mathbf{W}(\lambda\mathbf{l}, \lambda\mathbf{m}, \lambda(\mathbf{l}{+}\mathbf{m}{-}\mathbf{1}))$ и индуцируемых ею тканей.

3.1. Продифференцируем уравнения (12) и положим

$$\underset{\mu}{\theta}{}^\xi = \frac{\partial \tilde f^\xi(u, v)}{\partial u_\mu^\eta} du_\mu^\eta, \quad \underset{s}{\vartheta}{}^\xi = \frac{\partial \tilde f^\xi(u, v)}{\partial v_s^\eta} dv_s^\eta, \quad \Theta^\xi = dz^\xi. \tag{17}$$

Здесь $u = (u_1^\eta, ..., u_m^\eta)$, $v = (v_1^\zeta, ..., v_l^\zeta)$; $\xi, \eta, \zeta = \overline{1, \lambda}$, по μ и s суммирования в правой части нет, и $\det(\dfrac{\partial \tilde f^\xi(u, v)}{\partial u_\mu^\eta}) \neq 0$, $\det(\dfrac{\partial \tilde f^\xi(u, v)}{\partial v_s^\zeta}) \neq 0$ для любых $\mu = \overline{1, m}$ и $s = \overline{1, l}$. Формы Пфаффа $\underset{\mu}{\theta}{}^\xi$ и $\underset{s}{\vartheta}{}^\xi$ образуют базис пространства дифференциальных 1-форм многообразия $\mathcal M$ и задают $n = l + m$ слоений $(n + 1)$-ткани $\tilde W^\lambda(a, b)$:

$$\underset{1}{\theta}{}^\xi = 0, \ ..., \ \underset{m}{\theta}{}^\xi = 0; \quad \underset{1}{\vartheta}{}^\xi = 0, \ ..., \ \underset{l}{\vartheta}{}^\xi = 0. \tag{18}$$

$(n + 1)$-ое слоение определяется уравнениями $z^\xi = const$, или, в силу (12) и (17), уравнениями

$$\Theta^\xi \equiv \sum_\mu \underset{\mu}{\theta}{}^\xi + \sum_s \underset{s}{\vartheta}{}^\xi = 0, \tag{19}$$

где $\mu = \overline{1, m}$, $s = \overline{1, l}$. Условия интегрируемости уравнений (18) и (19) имеют вид

$$d\underset{\mu}{\theta}{}^\xi = \underset{\mu}{\theta}{}^\eta \wedge \underset{\mu}{\theta}{}^\xi_\eta, \quad d\underset{s}{\vartheta}{}^\xi = \underset{s}{\vartheta}{}^\eta \wedge \underset{s}{\vartheta}{}^\xi_\eta, \tag{20}$$

$$d\Theta^\xi = \Theta^\eta \wedge \omega^\xi_\eta, \tag{21}$$

где $\underset{\mu}{\theta}{}^\xi_\eta$, $\underset{s}{\vartheta}{}^\xi_\eta$, ω^ξ_η — некоторые линейные дифференциальные формы. Дифференцируя (19) и пользуясь линейной независимостью форм $\underset{\mu}{\theta}{}^\xi$ и $\underset{s}{\vartheta}{}^\xi$, находим:

$$\underset{\mu}{\theta}{}^\xi_\eta = \omega^\xi_\eta + \sum_{\nu\neq\mu} \underset{\mu\nu}{\bar a}{}^\xi_{\eta\zeta} \underset{\nu}{\theta}{}^\zeta + \sum_s \underset{\mu s}{b}{}^\xi_{\eta\zeta}\underset{s}{\vartheta}{}^\zeta, \quad \underset{s}{\vartheta}{}^\xi_\eta = \omega^\xi_\eta + \sum_{t\neq s}\underset{st}{\tilde a}{}^\xi_{\eta\zeta}\underset{t}{\vartheta}{}^\zeta + \sum_\mu \underset{\mu s}{b}{}^\xi_{\zeta\eta}\underset{\mu}{\theta}{}^\zeta, \tag{22}$$

где $\underset{\mu\nu}{\bar a}{}^\xi_{\eta\zeta} = \underset{\nu\mu}{\bar a}{}^\xi_{\zeta\eta}$, $\underset{st}{\tilde a}{}^\xi_{\eta\zeta} = \underset{ts}{\tilde a}{}^\xi_{\zeta\eta}$. Подставляя (22) в структурные уравнения (20), (21) $(n+1)$–ткани $\tilde W^\lambda(a,b)$ запишем последние в виде

$$\begin{aligned}
&d\underset{\mu}{\theta}{}^\xi = \underset{\mu}{\theta}{}^\eta \wedge (\omega^\xi_\eta + \textstyle\sum_{\nu\neq\mu} \underset{\mu\nu}{\bar a}{}^\xi_{\eta\zeta}\underset{\nu}{\theta}{}^\zeta + \sum_s \underset{\mu s}{b}{}^\xi_{\eta\zeta}\underset{s}{\vartheta}{}^\zeta),\\
&d\underset{s}{\vartheta}{}^\xi = \underset{s}{\vartheta}{}^\eta \wedge (\omega^\xi_\eta + \textstyle\sum_{t\neq s} \underset{st}{\tilde a}{}^\xi_{\eta\zeta}\underset{t}{\vartheta}{}^\zeta + \sum_\mu \underset{\mu s}{b}{}^\xi_{\zeta\eta}\underset{\mu}{\theta}{}^\zeta),\\
&d\Theta^\xi = \Theta^\eta \wedge \omega^\xi_\eta.
\end{aligned} \tag{23}$$

3.2. Укажем вид допустимых преобразований инвариантных форм $\underset{\mu}{\theta}{}^\xi$ и $\underset{s}{\vartheta}{}^\xi$ $(n+1)$–ткани $\tilde W^\lambda(a,b)$. Нетрудно видеть, что преобразования $\underset{\mu}{\tilde\theta}{}^\xi = \underset{1,\mu}{A}{}^\xi_\eta \underset{\mu}{\theta}{}^\eta$, $\underset{s}{\tilde\vartheta}{}^\xi = \underset{2,s}{A}{}^\xi_\eta \underset{s}{\vartheta}{}^\eta$, где $\mid \underset{1,\mu}{A}{}^\xi_\eta \mid\neq 0$ и $\mid \underset{2,s}{A}{}^\xi_\eta \mid\neq 0$, оставляют инвариантными слои $n=l+m$ слоений $(n+1)$-ткани $\tilde W^\lambda(a,b)$. Условие инвариантности $(n+1)$-ого слоения $(n+1)$-ткани имеет вид $\tilde\Theta^\xi = A^\xi_\eta\Theta^\eta$, $\mid A^\xi_\eta \mid\neq 0$. Отсюда с учетом уравнений (19) получаем $\underset{1,\mu}{A}{}^\xi_\eta = \underset{2,s}{A}{}^\xi_\eta = A^\xi_\eta$, поэтому допустимыми для $(n+1)$-ткани $\tilde W^\lambda(a,b)$ являются преобразования вида

$$\underset{\mu}{\tilde\theta}{}^\xi = A^\xi_\eta \underset{\mu}{\theta}{}^\eta, \quad \underset{s}{\tilde\vartheta}{}^\xi = A^\xi_\eta \underset{s}{\vartheta}{}^\eta. \tag{24}$$

Эти преобразования сохраняют вид структурных уравнений (23).

3.3. Теперь найдем структурные уравнения $(m+1)$-ткани $\tilde W^\lambda(b,y_0)$ и $(l+1)$-ткани $\tilde W^\lambda(a,x_0)$. Согласно Предложению 1 конечные уравнения (15) $(m+1)$-ткани $\tilde W^\lambda(b,y_0)$ получаются из уравнений (12) фиксацией в них параметров $v_s=v_{s0}$, определяющих горизонтальный слой y_0, на котором задана $(m+1)$-ткань. Дифференциальные уравнения слоя y_0 в силу (17) имеют вид $\underset{s}{\vartheta}{}^\xi=0$, $s=\overline{1,l}$. Подставляя последние в структурные уравнения (23), получим структурные уравнения $(m+1)$-ткани $\tilde W^\lambda(b,y_0)$ в виде

$$d\underset{\mu}{\tilde\theta}{}^\xi = \underset{\mu}{\tilde\theta}{}^\eta\wedge \underset{1}{\omega}{}^\xi_\eta + \sum_{\nu\neq\mu}\underset{\mu\nu}{\bar a}{}^\xi_{\eta\zeta}\underset{\mu}{\tilde\theta}{}^\eta\wedge\underset{\nu}{\tilde\theta}{}^\zeta, \quad d\underset{m+1}{\tilde\theta}{}^\xi = \underset{m+1}{\tilde\theta}{}^\eta \wedge \underset{1}{\omega}{}^\xi_\eta, \tag{25}$$

где $\underset{\mu}{\tilde\theta}{}^\xi = \underset{\mu}{\theta}{}^\xi|_{\underset{s}{\vartheta}{}^\eta=0}$, $\underset{m+1}{\tilde\theta}{}^\xi = \Theta^\xi|_{\underset{s}{\vartheta}{}^\eta=0}$, $\underset{1}{\omega}{}^\xi_\eta = \omega^\xi_\eta|_{\underset{s}{\vartheta}{}^\eta=0}$, а величины $\underset{\mu\nu}{\bar a}{}^\xi_{\eta\zeta}$ согласно [3] образуют тензор кручения ткани. Заметим, что структурные уравнения (25) имеют тот же вид, что и структурные уравнения произвольной $(n+1)$-ткани, которые получены В.В. Гольдбергом в [3].

Аналогично, при $\underset{\mu}{\theta}^\xi = 0$, $\mu = \overline{1,m}$, из уравнений (23) получаем структурные уравнения $(l+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(a, x_0)$ в виде

$$d\underset{s}{\tilde{\vartheta}}^\xi = \underset{s}{\tilde{\vartheta}}^\eta \wedge \underset{2}{\omega}{}^\xi_\eta + \sum_{t\neq s} \tilde{a}^\xi_{st\eta\zeta} \underset{s}{\tilde{\vartheta}}^\eta \wedge \underset{t}{\tilde{\vartheta}}^\zeta, \quad d\underset{l+1}{\tilde{\vartheta}}{}^\xi = \underset{l+1}{\tilde{\vartheta}}{}^\eta \wedge \underset{2}{\omega}{}^\xi_\eta, \tag{26}$$

где $\tilde{a}^\xi_{st\eta\zeta}$ — тензор кручения, $\underset{s}{\tilde{\vartheta}}^\xi = \underset{s}{\vartheta}^\xi|_{\underset{\mu}{\theta}^\eta=0}$, $\underset{l+1}{\tilde{\vartheta}}{}^\xi = \Theta^\xi|_{\underset{\mu}{\theta}^\eta=0}$, $\underset{2}{\omega}{}^\xi_\eta = \omega^\xi_\eta|_{\underset{\mu}{\theta}^\eta=0}$.

Очевидно, что структурные уравнения тканей $\tilde{W}^\lambda(b, y_0)$ и $\tilde{W}^\lambda(a, x_0)$ сохраняют свой вид при преобразованиях (24).

3.4. Согласно Предложению 1 три-ткань $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ определяется (с точностью до изотопии) теми же конечными уравнениями (12), что и $(n+1)$-ткань $\tilde{W}^\lambda(a,b)$, а ее слоения — уравнениями (13). Дифференцируя последние и учитывая (17), запишем уравнения слоений три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ в виде

$$\begin{gathered} \lambda_1: \ \underset{\mu}{\theta}^\xi = 0, \ \mu = \overline{1,m}; \quad \lambda_2: \ \underset{s}{\vartheta}^\xi = 0, \ s = \overline{1,l}; \\ \lambda_3: \ \Theta^\xi \equiv \sum_\mu \underset{\mu}{\theta}^\xi + \sum_s \underset{s}{\vartheta}^\xi = 0. \end{gathered} \tag{27}$$

Формы $\underset{\mu}{\theta}^\xi$, $\underset{s}{\vartheta}^\xi$ и Θ^ξ по отдельности определяют слоения $(n+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(a,b)$ и удовлетворяют ее структурным уравнениям (23). Из последних следует, что системы (27) этих форм, определяющие слоения три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, вполне интегрируемы. Поэтому уравнения (23) являются также структурными уравнениями три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$. Таким образом, справедливо следующее

Предложение 2. Структурные уравнения три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ и связанной с нею $(n+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(a,b)$ могут быть приведены к виду (23) и допускают преобразования вида (24). Структурные уравнения (25) $(m+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(b, y_0)$ и структурные уравнения (26) $(l+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(a, x_0)$ получаются из уравнений (23) соответственно при $\underset{s}{\vartheta}^\xi = 0$ и $\underset{\mu}{\theta}^\xi = 0$.

Замечание. Уравнения (23) являются структурными уравнениями три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ не самого общего вида. Структурные уравнения наиболее общего вида, найденные в [1], получаются из уравнений (23) при допустимых (сохраняющих слоения три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$) преобразованиях следующего вида:

$$\begin{aligned} \underset{\hat{\mu}}{\tilde{\theta}}{}^\xi &= \sum_{\hat{\nu}} \underset{\hat{\mu}\hat{\nu}}{A}{}^\xi_\eta \underset{\hat{\nu}}{\theta}^\eta + \underset{\hat{\mu}}{A}{}^\xi_\eta \underset{m+1}{\theta}{}^\eta, \quad & \underset{m+1}{\tilde{\theta}}{}^\xi &= A^\xi_\eta \underset{m+1}{\theta}{}^\eta, \\ \underset{\hat{s}}{\tilde{\vartheta}}{}^\xi &= \sum_{\hat{t}} \underset{\hat{s}\hat{t}}{A}{}^\xi_\eta \underset{\hat{t}}{\vartheta}^\eta + \underset{\hat{s}}{A}{}^\xi_\eta \underset{l+1}{\vartheta}{}^\eta, \quad & \underset{l+1}{\tilde{\vartheta}}{}^\xi &= A^\xi_\eta \underset{l+1}{\vartheta}{}^\eta, \end{aligned}$$

где $\hat{\mu} = \overline{1, m-1}$, $\hat{s} = \overline{1, l-1}$, $\underset{m+1}{\theta}{}^\xi = \sum_\mu \underset{\mu}{\theta}^\xi$, $\underset{l+1}{\vartheta}{}^\xi = \sum_s \underset{s}{\vartheta}^\xi$.

4. Групповые ткани, связанные с обобщенной три-тканью Рейдемейстера $\mathbf{WR}(\lambda \mathbf{l}, \lambda \mathbf{m}, \lambda(\mathbf{l}+\mathbf{m}-\mathbf{1}))$.

4.1. Пусть на три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ замыкаются обобщенные конфигурации Рейдемейстера $R(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ [7], см. рис. 2. Условие замыкания конфигураций $R(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, следуя классической теории тканей, можно записать в виде так называемого условного тождества:

$$\left.\begin{array}{r} x_s \cdot y_\mu = \bar{x}_s \cdot \bar{y}_\mu = z_{s\mu}, \\ x_s \cdot y_{m+1} = \bar{x}_s \cdot \bar{y}_{m+1} = z_{sm+1}, \\ x_{l+1} \cdot y_\mu = \bar{x}_{l+1} \cdot \bar{y}_\mu = z_{l+1m} \end{array}\right\} \Longrightarrow x_{l+1} \cdot y_{m+1} = \bar{x}_{l+1} \cdot \bar{y}_{m+1} = z_{l+1m+1}.$$

(Напомним, что $x \cdot y = f(x, y) = z$, см. п. 1.1). Три-ткань $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, на которой замыкаются все достаточно малые конфигурации $R(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, названа в [7] обобщенной тканью Рейдемейстера и обозначена $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$.

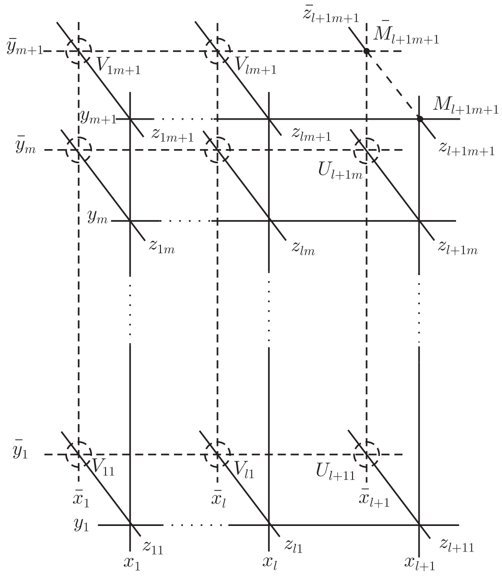

Рис. 2

В [7] показано, что параметры наклонных слоев $z_{\bar{s}\bar{\mu}}$, $\bar{s} = \overline{1, l+1}$, $\bar{\mu} = \overline{1, m+1}$, входящих в произвольную обобщенную конфигурацию Рейдемейстера $R(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, удовлетворяют уравнению

$$\Phi(z_{11}, ..., z_{1m+1}, z_{21}, ..., z_{2m+1}, \ \dots \ , z_{l+11}, ..., z_{l+1m+1}) = 0, \tag{28}$$

где $\Phi = (\Phi^\xi)$, $\xi = \overline{1, \lambda}$, которое определяет так называемую сердцевину три-ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, а существование сердцевины является характеристическим свойством три-ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$.

Согласно [7] при $l = m = 1$ конфигурация $R(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ совпадает с классической конфигурацией Рейдемейстера R для три-ткани $W(\lambda, \lambda, \lambda)$, образованной на многообразии размерности 2λ тремя слоениями одинаковой размерности λ [2]. Замыкание конфигураций R на ткани $W(\lambda, \lambda, \lambda)$ означает, что эта ткань является групповой, то есть координатный группоид (1) такой ткани является (с точностью до изотопии) группой Ли [2].

4.2. Покажем, что $(n+1)$-ткань $\tilde{W}^\lambda(a, b)$, связанная с три-тканью $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, является групповой. Напомним [5], что групповой называется $(n+1)$-ткань, координатная n-квазигруппа которой (хотя бы одна) является n-группой.

Согласно [5] групповая $(n+1)$-ткань коразмерности ρ характеризуется тем, что любая ее три-подткань $W(\rho,\rho,\rho)$ является классической групповой тканью, порождаемой ρ-мерной группой Ли. В [5] показано, что координатные группы различных три-подтканей групповой $(n+1)$-ткани изоморфны.

Согласно [5] уравнения координатных квазигрупп три-подтканей $W(\rho,\rho,\rho)$ $(n+1)$-ткани коразмерности ρ получаются из уравнения ее координатной n-квазигруппы фиксацией в нем $\rho(n-2)$ параметров. Фиксируя по-разному в уравнениях (12) координатной n-квазигруппы $(n+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(a,b)$ какие-либо $\lambda(n-2)$ параметров (они содержат нижний индекс 0), получим три типа подтканей коразмерности λ:

$$z = \tilde{f}(u_{01},...,u_{0\mu-1},\underline{u_\mu},u_{0\mu+1},...,u_{0\nu-1},\underline{u_\nu},u_{0\nu+1},...,u_{0m};\ v_{10},...,v_{l0}) \equiv \tilde{f}_1(u_\mu,u_\nu),\ \mu\neq\nu; \tag{29}$$

$$z = \tilde{f}(u_{01},...,u_{0m};\ v_{10},...,v_{s-10},\underline{v_s},v_{s+10},...,v_{t-10},\underline{v_t},v_{t+10},...,v_{l0}) \equiv \tilde{f}_2(v_s,v_t),\ s\neq t; \tag{30}$$

$$z = \tilde{f}(u_{01},...,u_{0\mu-1},\underline{u_\mu},u_{0\mu+1},...,u_{0m};\ v_{10},...,v_{s-10},\underline{v_s},v_{s+10},...,v_{l0}) \equiv \tilde{f}_3(u_\mu,v_s). \tag{31}$$

Три-подткани, определяемые уравнениями (29), (30) и (31), обозначим соответственно $W_{(\mu,\nu)}$, $W_{(s,t)}$ и $W_{(\mu,s)}$.

Теорема 2. *$(n+1)$-ткань $\tilde{W}^\lambda(a,b)$, $(m+1)$-ткань $\tilde{W}^\lambda(b,y_0)$ и $(l+1)$-ткань $\tilde{W}^\lambda(a,x_0)$, индуцируемые обобщенной три-тканью Рейдемейстера $WR(\lambda l,\lambda m,$ $\lambda(l+m-1))$, являются групповыми тканями, порождаемыми некоторой λ-мерной группой Ли G.*

Доказательство. Покажем, что три-ткань $W_{(\mu,\nu)}$, индуцируемая три-тканью $WR(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$, является групповой. Для этого, согласно [8], достаточно показать, что ткань $W_{(\mu,\nu)}$ обладает сердцевиной. В соответствии с [8] возьмем два «вертикальных» слоя $u_{\mu 1}$, $u_{\mu 2}$ и два «горизонтальных» слоя $u_{\nu 1}$, $u_{\nu 2}$ три-ткани $W_{(\mu,\nu)}$ (здесь индексы μ и ν фиксированы). Через точку $M_{ij}=u_{\mu i}\cap u_{\nu j}$ проходит единственный «наклонный» слой $\tilde{u}_{ij}$, $i,j=1,2$. По определению ткани $W_{(\mu,\nu)}$ имеем

$$\tilde{u}_{ij}=\tilde{f}_1(u_{\mu i},u_{\nu j}). \tag{32}$$

Найдем уравнение сердцевины ткани $W_{(\mu,\nu)}$, связывающее параметры $\tilde{u}_{ij}$. Для этого рассмотрим на ткани $WR(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$ конфигурацию $R(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$, содержащую горизонтальные слои $y_1=b_1,...,\ y_m=b_m,\ y_{m+1}=y_0$, определяющие $(m+1)$-ткань $\tilde{W}^\lambda(b,y_0)$, и вертикальные слои, проходящие через точки M_{ij}, обозначим эти слои соответственно x_{ij}, $i,j=1,2$. Остальные вертикальные слои выберем произвольно. Через точки $x_{ij}\cap b_\mu$, $x_{ij}\cap b_\nu$ и $x_{ij}\cap y_0$ проходят наклонные слои ткани $WR(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$ с параметрами $x_{ij}\cdot b_\mu$, $x_{ij}\cdot b_\nu$ и $x_{ij}\cdot y_0$ соответственно. Согласно определению ткани $\tilde{W}^\lambda(b,y_0)$, эти параметры являются также параметрами выделенных слоев $u_{\mu i}$, $u_{\nu i}$ и $\tilde{u}_{ij}$, при этом $x_{i1}\cdot b_\mu=x_{i2}\cdot b_\mu=u_{\mu i}$, $x_{1j}\cdot b_\nu=x_{2j}\cdot b_\nu=u_{\nu j}$ и $x_{ij}\cdot y_0=\tilde{u}_{ij}$.

Для рассматриваемой конфигурации $R(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, в которую входят слои $u_{\mu i} = x_{ij} \cdot b_\mu$, $u_{\nu j} = x_{ij} \cdot b_\nu$ и $\tilde{u}_{ij} = x_{ij} \cdot y_0$, уравнение сердцевины имеет вид

$$\Phi(z_{\hat{s}\hat{t}}, u_{\mu i}, u_{\nu j}, \tilde{u}_{ij}) = 0, \tag{33}$$

где $z_{\hat{s}\hat{t}}$ — входящие в конфигурацию наклонные слои, кроме выделенных слоев $u_{\mu i}$, $u_{\nu j}$ и $\tilde{u}_{ij}$. Фиксируя параметры $z_{\hat{s}\hat{t}}$ и исключая из уравнений (32) и (33) параметры $u_{\mu i}$ и $u_{\nu j}$, получим уравнение сердцевины ткани $W_{(\mu,\nu)}$ в виде:

$$\tilde{\Phi}_{(\mu,\nu)}(\tilde{u}_{11}, \tilde{u}_{12}, \tilde{u}_{21}, \tilde{u}_{22}) = 0.$$

Но если три-ткань $W_{(\mu,\nu)}$ допускает сердцевину, то она является тканью R, а значит, групповой.

Проводя аналогичные рассуждения для три-тканей $W_{(s,t)}$ и $W_{(\mu,s)}$, индуцируемых тканью $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, получаем, что эти ткани также являются групповыми, поэтому групповой является и $(n+1)$-ткань $\tilde{W}^\lambda(a,b)$. Согласно [5] она порождается некоторой λ-мерной группой Ли, обозначим ее G, а координатные группы ее различных три-подтканей изоморфны группе G.

Сравнивая уравнения (29) с (15), а (30) — с (16) получаем, что три-ткань $W_{(\mu,\nu)}$ является подтканью $(m+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(b, y_0)$, а три-ткань $W_{(s,t)}$ — подтканью $(l+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(a, x_0)$. Так как ткани $W_{(\mu,\nu)}$ и $W_{(s,t)}$, индуцируемые три-тканью $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, являются групповыми, то групповыми будут и ткани $\tilde{W}^\lambda(b, y_0)$ и $\tilde{W}^\lambda(a, x_0)$. Теорема доказана.

5. Структурные уравнения обобщенной три-ткани Рейдемейстера $\mathbf{WR}(\lambda\mathbf{l}, \lambda\mathbf{m}, \lambda(\mathbf{l}+\mathbf{m}-\mathbf{1}))$.

5.1. Найдем структурные уравнения обобщенной три-ткани Рейдемейстера $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$. В силу Теоремы 2 ткани $\tilde{W}^\lambda(b, y_0)$ и $\tilde{W}^\lambda(a, x_0)$, индуцируемые тканью $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, являются групповыми. Найдем вид структурных уравнений (23) произвольной ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ в случае, если ткани $\tilde{W}^\lambda(b, y_0)$ и $\tilde{W}^\lambda(a, x_0)$ являются групповыми.

Как показано в п. 3.3, из уравнений (23) при $\underset{s}{\vartheta}^\xi = 0$ получаются структурные уравнения (25) $(m+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(b, y_0)$, а при $\underset{\mu}{\theta}^\xi = 0$ — структурные уравнения (26) $(l+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(a, x_0)$. Так как ткани $\tilde{W}^\lambda(b, y_0)$ и $\tilde{W}^\lambda(a, x_0)$ должны быть групповыми, то согласно [5] тензоры кручения этих тканей должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned}
&\bar{a}^\xi_{\eta\zeta} = \underset{\mu\nu}{\bar{a}}{}^\xi_{\eta\zeta}, \quad \bar{a}^\xi_{\eta\zeta} = -\bar{a}^\xi_{\zeta\eta}, \quad d\bar{a}^\xi_{\eta\zeta}|_{\underset{s}{\vartheta}^\eta=0} = 0;\\
&\tilde{a}^\xi_{\eta\zeta} = \underset{st}{\tilde{a}}{}^\xi_{\eta\zeta}, \quad \tilde{a}^\xi_{\eta\zeta} = -\tilde{a}^\xi_{\zeta\eta}, \quad d\tilde{a}^\xi_{\eta\zeta}|_{\underset{\mu}{\theta}^\eta=0} = 0.
\end{aligned} \tag{34}$$

С учетом последних структурные уравнения (23) принимают вид

$$\begin{aligned}
&d\underset{\mu}{\theta}^\xi = \underset{\mu}{\theta}^\eta \wedge (\omega^\xi_\eta + \bar{a}^\xi_{\eta\zeta} \underset{m+1}{\theta}{}^\zeta + \sum_s \underset{\mu s}{b}{}^\xi_{\eta\zeta} \underset{s}{\vartheta}^\zeta) - \bar{a}^\xi_{\eta\zeta} \underset{\mu}{\theta}^\eta \wedge \underset{\mu}{\theta}^\zeta,\\
&d\underset{s}{\vartheta}^\xi = \underset{s}{\vartheta}^\eta \wedge (\omega^\xi_\eta + \tilde{a}^\xi_{\eta\zeta} \underset{l+1}{\vartheta}{}^\zeta + \sum_\mu \underset{\mu s}{b}{}^\xi_{\zeta\eta} \underset{\mu}{\theta}^\zeta) - \tilde{a}^\xi_{\eta\zeta} \underset{s}{\vartheta}^\eta \wedge \underset{s}{\vartheta}^\zeta,\\
&d\Theta^\xi = \Theta^\eta \wedge \omega^\xi_\eta.
\end{aligned} \tag{35}$$

Здесь формы

$$\begin{aligned}&(\omega^\xi_\eta + \bar{a}^\xi_{\eta\zeta}\underset{m+1}{\theta}{}^\zeta + \sum_s \underset{\mu s}{b}{}^\xi_{\eta\zeta}\underset{s}{\vartheta}{}^\zeta)|_{\underset{s}{\vartheta}{}^\eta=0} \equiv \underset{1}{\Theta}{}^\xi_\eta,\\ &(\omega^\xi_\eta + \tilde{a}^\xi_{\eta\zeta}\underset{l+1}{\vartheta}{}^\zeta + \sum_\mu \underset{\mu s}{b}{}^\xi_{\zeta\eta}\underset{\mu}{\theta}{}^\zeta)|_{\underset{\mu}{\theta}{}^\eta=0} \equiv \underset{2}{\Theta}{}^\xi_\eta\end{aligned} \tag{36}$$

являются формами связности тканей $\tilde{W}^\lambda(b, y_0)$ и $\tilde{W}^\lambda(a, x_0)$ соответственно и согласно [5] должны удовлетворять уравнениям

$$d\underset{1}{\Theta}{}^\xi_\eta = \underset{1}{\Theta}{}^\zeta_\eta \wedge \underset{1}{\Theta}{}^\xi_\zeta, \quad d\underset{2}{\Theta}{}^\xi_\eta = \underset{2}{\Theta}{}^\zeta_\eta \wedge \underset{2}{\Theta}{}^\xi_\zeta. \tag{37}$$

Тем самым доказано

Предложение 3. $(m+1)$-ткань $\tilde{W}^\lambda(b, y_0)$ и $(l+1)$-ткань $\tilde{W}^\lambda(a, x_0)$, индуцируемые три-тканью $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, являются групповыми в том и только том случае, если структурные уравнения три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ приводятся к виду (35), где формы (36) удовлетворяют уравнениям (37).

С другой стороны, уравнения (35) являются структурными уравнениями $(n+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(a, b)$, которая в силу Теоремы 2 является групповой, а потому любая ее три-подткань типа $W_{(\mu,\nu)}$, $W_{(s,t)}$ и $W_{(\mu,s)}$ (см. п. 4.2) также должна быть групповой. Три-ткани $W_{(\mu,\nu)}$ и $W_{(s,t)}$ являются подтканями групповых $(m+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(b, y_0)$ и $(l+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(a, x_0)$ соответственно, а потому являются групповыми. Найдем условия, при которых три-ткань $W_{(\mu,s)}$ также будет групповой. Для этого найдем сначала ее структурные уравнения.

Как показано в п. 4.2 конечные уравнения (31) три-ткани $W_{(\mu,s)}$ получаются из уравнений (12) фиксацией в них параметров $u_\nu = u_{0\nu}$, $\nu \neq \mu$, и $v_t = v_{t0}$, $t \neq s$, определяющих (2λ)-мерное подмногообразие $M_{(\mu,s)}$, на котором задана три-ткань $W_{(\mu,s)}$. Дифференциальные уравнения подмногообразия $M_{(\mu,s)}$ в силу (17) имеют вид

$$\underset{\nu}{\theta}{}^\xi = 0,\ \nu \neq \mu; \quad \underset{t}{\vartheta}{}^\xi = 0,\ t \neq s. \tag{38}$$

Подставляя последние в структурные уравнения (35), получим структурные уравнения три-ткани $W_{(\mu,s)}$ в виде

$$\begin{aligned} d\underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^\xi &= \underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^\eta \wedge (\omega^\xi_\eta + \bar{a}^\xi_{\eta\zeta}\underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^\zeta + \underset{\mu s}{b}{}^\xi_{\eta\zeta}\underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^\zeta) - \bar{a}^\xi_{\eta\zeta}\underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^\eta \wedge \underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^\zeta,\\ d\underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^\xi &= \underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^\eta \wedge (\omega^\xi_\eta + \tilde{a}^\xi_{\eta\zeta}\underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^\zeta + \underset{\mu s}{b}{}^\xi_{\zeta\eta}\underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^\zeta) - \tilde{a}^\xi_{\eta\zeta}\underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^\eta \wedge \underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^\zeta,\\ d(\underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^\xi &+ \underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^\xi) = (\underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^\eta + \underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^\eta) \wedge \omega^\xi_\eta, \end{aligned} \tag{39}$$

где μ и s фиксированы,

$$\underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^\xi = \underset{\mu}{\theta}{}^\xi|_{\underset{\nu}{\theta}{}^\eta=0,\ \underset{t}{\vartheta}{}^\eta=0}, \quad \underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^\xi = \underset{s}{\vartheta}{}^\xi|_{\underset{\nu}{\theta}{}^\eta=0,\ \underset{t}{\vartheta}{}^\eta=0}, \quad \nu \neq \mu,\ t \neq s.$$

Отсюда имеем

$$\omega^\xi_\eta + \bar{a}^\xi_{\eta\zeta}\underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^\zeta + \underset{\mu s}{b}{}^\xi_{\eta\zeta}\underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^\zeta + \underset{\mu s}{b}{}^\xi_{(\eta\zeta)}\underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^\zeta = \omega^\xi_\eta + \tilde{a}^\xi_{\eta\zeta}\underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^\zeta + \underset{\mu s}{b}{}^\xi_{\zeta\eta}\underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^\zeta + \underset{\mu s}{b}{}^\xi_{(\eta\zeta)}\underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^\zeta.$$

Из последних равенств следует, что

$$-\bar{a}^{\xi}_{\eta\zeta} = \tilde{a}^{\xi}_{\eta\zeta} = \underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{[\eta\zeta]} \equiv a^{\xi}_{\eta\zeta}. \tag{40}$$

С учетом (40) структурные уравнения (39) три-ткани $W_{(\mu,s)}$ принимают вид

$$\begin{gathered} d\underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^{\xi} = \underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^{\eta} \wedge \underset{\mu s}{\omega}{}^{\xi}_{\eta} + a^{\xi}_{\eta\zeta}\underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^{\eta} \wedge \underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^{\zeta}, \quad d\underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^{\xi} = \underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^{\eta} \wedge \underset{\mu s}{\omega}{}^{\xi}_{\eta} - a^{\xi}_{\eta\zeta}\underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^{\eta} \wedge \underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^{\zeta}, \\ d(\underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^{\xi} + \underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^{\xi}) = (\underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^{\eta} + \underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^{\eta}) \wedge \underset{\mu s}{\omega}{}^{\xi}_{\eta} + a^{\xi}_{\eta\zeta}(\underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^{\eta} + \underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^{\eta}) \wedge (\underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^{\zeta} - \underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^{\zeta}), \end{gathered} \tag{41}$$

где

$$\underset{\mu s}{\omega}{}^{\xi}_{\eta} = \omega^{\xi}_{\eta} - a^{\xi}_{\eta\zeta}(\underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^{\zeta} - \underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^{\zeta}) + \underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\eta\zeta}(\underset{\mu}{\bar{\theta}}{}^{\zeta} + \underset{s}{\bar{\vartheta}}{}^{\zeta}), \tag{42}$$

$$\underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\eta\zeta} = \underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\zeta\eta}. \tag{43}$$

Согласно [2] структурные уравнения (41) определяют групповую три-ткань в том и только том случае, если

$$d\underset{\mu s}{\omega}{}^{\xi}_{\eta} = \underset{\mu s}{\omega}{}^{\zeta}_{\eta} \wedge \underset{\mu s}{\omega}{}^{\xi}_{\zeta}. \tag{44}$$

Доказано

Предложение 4. Три-ткань $W_{(\mu,s)}$, индуцируемая три-тканью $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, является групповой в том и только том случае, если формы (42) удовлетворяют уравнениям (44).

Теперь покажем, что формы ω^{ξ}_{η} в структурных уравнениях (35) три-ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ могут быть приведены к виду

$$\omega^{\xi}_{\eta} = a^{\xi}_{\eta\zeta}(\underset{m+1}{\theta}{}^{\zeta} - \underset{l+1}{\vartheta}{}^{\zeta}). \tag{45}$$

В самом деле, положим

$$\theta^{\xi}_{\eta} = \omega^{\xi}_{\eta} - a^{\xi}_{\eta\zeta}(\underset{m+1}{\theta}{}^{\zeta} - \underset{l+1}{\vartheta}{}^{\zeta}). \tag{46}$$

Отсюда с учетом (36) и (40) имеем $\underset{1}{\Theta}{}^{\xi}_{\eta} = \theta^{\xi}_{\eta}|_{\underset{s}{\vartheta}{}^{\eta}=0}$, $\underset{2}{\Theta}{}^{\xi}_{\eta} = \theta^{\xi}_{\eta}|_{\underset{\mu}{\theta}{}^{\eta}=0}$. В силу независимости форм $\underset{\mu}{\theta}{}^{\xi}$ и $\underset{s}{\vartheta}{}^{\xi}$ из уравнений (37) следует, что $d\theta^{\xi}_{\eta} = \theta^{\zeta}_{\eta} \wedge \theta^{\xi}_{\zeta}$ на всем многообразии $\mathcal{M}$. Следовательно, формы θ^{ξ}_{η} изотопическим преобразованием (24) можно привести к нулю на многообразии $\mathcal{M}$. Тогда из (46) получаем (45), что и требовалось показать.

Структурные уравнения (35) с учетом (40) и (45) примут вид

$$\begin{gathered} d\underset{\mu}{\theta}{}^{\xi} = \underset{\mu}{\theta}{}^{\eta} \wedge \underset{\mu}{\theta}{}^{\xi}_{\eta} + a^{\xi}_{\eta\zeta}\underset{\mu}{\theta}{}^{\eta} \wedge \underset{\mu}{\theta}{}^{\zeta}, \quad d\underset{s}{\vartheta}{}^{\xi} = \underset{s}{\vartheta}{}^{\eta} \wedge \underset{s}{\vartheta}{}^{\xi}_{\eta} - a^{\xi}_{\eta\zeta}\underset{s}{\vartheta}{}^{\eta} \wedge \underset{s}{\vartheta}{}^{\zeta}, \\ d\Theta^{\xi} = a^{\xi}_{\eta\zeta}\Theta^{\eta} \wedge (\underset{m+1}{\theta}{}^{\zeta} - \underset{l+1}{\vartheta}{}^{\zeta}), \end{gathered} \tag{47}$$

где

$$\underset{\mu}{\theta}{}^{\xi}_{\eta} = \sum_{s} \underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\eta\zeta}\underset{s}{\vartheta}{}^{\zeta}, \quad \underset{s}{\vartheta}{}^{\xi}_{\eta} = \sum_{\mu} \underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\eta\zeta}\underset{\mu}{\theta}{}^{\zeta}. \tag{48}$$

Покажем, что формы $\underset{\mu}{\theta}{}^\xi_\eta$ и $\underset{s}{\vartheta}{}^\xi_\eta$ удовлетворяют уравнениям

$$d\underset{\mu}{\theta}{}^\xi_\eta = 0, \quad d\underset{s}{\vartheta}{}^\xi_\eta = 0. \tag{49}$$

В самом деле, поскольку рассматриваемая $(n+1)$-ткань $\tilde{W}^\lambda(a,b)$ является групповой, то согласно [5] формы $\underset{\mu}{\theta}{}^\xi_\eta$ и $\underset{s}{\vartheta}{}^\xi_\eta$ должны удовлетворять уравнениям

$$d\underset{\mu}{\theta}{}^\xi_\eta = \underset{\mu}{\theta}{}^\zeta_\eta \wedge \underset{\mu}{\theta}{}^\xi_\zeta, \quad d\underset{s}{\vartheta}{}^\xi_\eta = \underset{s}{\vartheta}{}^\zeta_\eta \wedge \underset{s}{\vartheta}{}^\xi_\zeta. \tag{50}$$

Дифференцируя (48) и пользуясь уравнениями (47) и (50), получим уравнения

$$d\,\underset{\mu s}{b}{}^\xi_{\eta\zeta} = \underset{\mu s}{b}{}^\xi_{\eta\sigma}\Big(\sum_\nu \underset{\nu s}{b}{}^\sigma_{\zeta\rho}\underset{\nu}{\theta}{}^\rho + \sum_t \underset{\mu t}{b}{}^\sigma_{\zeta\rho}\underset{t}{\vartheta}{}^\rho\Big) \tag{51}$$

и соотношения

$$\underset{\mu s}{b}{}^\xi_{\eta\zeta}a^\zeta_{\rho\sigma} = 0, \tag{52}$$

$$\underset{\mu s}{b}{}^\xi_{\sigma[\eta}\underset{\nu s}{b}{}^\sigma_{\zeta]\rho} = 0, \quad \underset{\mu s}{b}{}^\xi_{\sigma[\eta}\underset{\mu t}{b}{}^\sigma_{\zeta]\rho} = 0. \tag{53}$$

Из уравнений (50) в силу (48) и (53) получаем уравнения (49).

Теперь покажем, что величины $a^\xi_{\eta\zeta}$ в структурных уравнениях (47) являются постоянными. Действительно, из уравнений (34) с учетом (40) получаем

$$da^\xi_{\eta\zeta}|_{\underset{s}{\vartheta}{}^\eta=0} = 0, da^\xi_{\eta\zeta}|_{\underset{\mu}{\theta}{}^\eta=0} = 0.$$

Отсюда в силу независимости форм $\underset{\mu}{\theta}{}^\xi$ и $\underset{s}{\vartheta}{}^\xi$ следует, что $da^\xi_{\eta\zeta} = 0$ на всем многообразии $\mathcal{M}$, несущем три-ткань $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$.

Доказана

Теорема 3. *Структурные уравнения ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ могут быть приведены к виду (47), где величины $a^\xi_{\eta\zeta}$ образуют структурный тензор группы Ли, порождающей эту ткань, а формы $\underset{\mu}{\theta}{}^\xi_\eta$ и $\underset{s}{\vartheta}{}^\xi_\eta$ имеют вид (48) и удовлетворяют уравнениям (49).*

5.2. Выясним алгебраический смысл величин $\underset{\mu s}{b}{}^\xi_{\eta\zeta}$. Для этого рассмотрим в касательном пространстве к подмногообразию $M_{(\mu,s)} \subset \mathcal{M}$ операцию

$$\underset{\mu s}{z}{}^\xi = \underset{\mu s}{b}{}^\xi_{\eta\zeta}\underset{\mu}{x}{}^\eta\underset{s}{y}{}^\zeta.$$

Назовем ее $\underset{\mu s}{B}$-алгеброй три-ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$.

Предложение 5. $\underset{\mu s}{B}$-алгебра три-ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$

a) коммутативна и ассоциативна;

b) определяется своим значением в какой-либо одной точке многообразия $M_{(\mu,s)}$.

Доказательство. Свойство a) непосредственно вытекает из соотношений (43) и (53).

Докажем свойство b). Из структурных уравнений (41), (44) три-ткани $W_{(\mu,s)}$ следует, что формы $\{\underset{\mu}{\bar\theta}{}^{\xi},\ \underset{s}{\bar\vartheta}{}^{\xi},\ \underset{\mu s}{\omega}{}^{\xi}_{\eta}\}$ определяют на многообразии $M_{(\mu,s)}$ аффинную связность без кривизны, обозначим ее $\underset{\mu s}{\Gamma}$. Из уравнений (42) в силу (45) и (38) получаем

$$\underset{\mu s}{\omega}{}^{\xi}_{\eta} = \underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\eta\zeta}(\underset{\mu}{\bar\theta}{}^{\zeta} + \underset{s}{\bar\vartheta}{}^{\zeta}), \tag{54}$$

Далее, из уравнений (51) с учетом (38), (54) и (53) имеем

$$\underset{\mu s}{\nabla}\, \underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\eta\zeta} \equiv d\,\underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\eta\zeta} - \underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\eta\rho}\underset{\mu s}{\omega}{}^{\rho}_{\zeta} - \underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\rho\zeta}\underset{\mu s}{\omega}{}^{\rho}_{\eta} + \underset{\mu s}{b}{}^{\rho}_{\eta\zeta}\underset{\mu s}{\omega}{}^{\xi}_{\rho} = 0, \tag{55}$$

где $\underset{\mu s}{\nabla}$ — оператор ковариантного дифференцирования в связности $\underset{\mu s}{\Gamma}$. Условия ковариантного постоянства (55) означают, что $\underset{\mu s}{B}$-алгебра определяется значением тензора $\underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\eta\zeta}$ в какой-либо одной точке P многообразия $M_{(\mu,s)}$.

6. Конечные уравнения обобщенной три-ткани Рейдемейстера, порождаемой абелевой группой Ли. Найдем конечные уравнения три-ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ в случае, если группа G является абелевой. Обозначим эту ткань
$WR_0(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$. Для такой ткани $a^{\xi}_{\eta\zeta} = 0$, поэтому структурные уравнения (47) принимают вид

$$d\underset{\mu}{\theta}{}^{\xi} = \underset{\mu}{\theta}{}^{\eta} \wedge \underset{\mu}{\theta}{}^{\xi}_{\eta};\quad d\underset{s}{\vartheta}{}^{\xi} = \underset{s}{\vartheta}{}^{\eta} \wedge \underset{s}{\vartheta}{}^{\xi}_{\eta};\quad d\Theta^{\xi} = 0. \tag{56}$$

Отсюда находим, что

$$\Theta^{\xi} = dw^{\xi}. \tag{57}$$

Предложение 6. Существуют невырожденные матрицы $\underset{\mu}{A}{}^{\xi}_{\eta}$ и $\underset{s}{B}{}^{\xi}_{\eta}$ такие, что

$$\underset{\mu}{\theta}{}^{\xi} = \underset{\mu}{A}{}^{\xi}_{\eta} d\underset{\mu}{u}{}^{\eta},\quad \underset{s}{\vartheta}{}^{\xi} = \underset{s}{B}{}^{\xi}_{\eta} d\underset{s}{v}{}^{\eta}, \tag{58}$$

$$\underset{\mu}{\tilde\theta}{}^{\xi}_{\eta} \equiv d\underset{\mu}{A}{}^{\xi}_{\eta} + \underset{\mu}{A}{}^{\zeta}_{\eta}\underset{\mu}{\theta}{}^{\xi}_{\zeta} = 0,\quad \underset{s}{\tilde\vartheta}{}^{\xi}_{\eta} \equiv d\underset{s}{B}{}^{\xi}_{\eta} + \underset{s}{B}{}^{\zeta}_{\eta}\underset{s}{\vartheta}{}^{\xi}_{\zeta} = 0. \tag{59}$$

Доказательство. В самом деле, дифференцируя (58) и пользуясь уравнениями (56), получим условия интегрируемости системы (58) в виде

$$\underset{\mu}{\tilde\theta}{}^{\xi}_{\eta} \wedge d\underset{\mu}{u}{}^{\eta} = 0,\quad \underset{s}{\tilde\vartheta}{}^{\xi}_{\eta} \wedge d\underset{s}{v}{}^{\eta} = 0.$$

Дифференцируя (59) и учитывая (48), (53) и (49), придем к уравнениям

$$d\underset{\mu}{\tilde\theta}{}^{\xi}_{\eta} = \underset{\mu}{\tilde\theta}{}^{\zeta}_{\eta} \wedge \underset{\mu}{\theta}{}^{\xi}_{\zeta},\quad d\underset{s}{\tilde\vartheta}{}^{\xi}_{\eta} = \underset{s}{\tilde\vartheta}{}^{\zeta}_{\eta} \wedge \underset{s}{\vartheta}{}^{\xi}_{\zeta}.$$

Внешнее дифференцирование последних уравнений приводит к тождествам, следовательно, система уравнений (58), (59) замкнута, что и доказывает Предложение.

Найдем формы $\underset{\mu}{\theta}{}^{\xi}$ и $\underset{s}{\vartheta}{}^{\xi}$. Уравнения (59) с учетом (48) и (58) примут вид

$$d\underset{\mu}{A}{}^{\xi}_{\eta} = \sum_s \underset{\mu s}{\bar C}{}^{\xi}_{\eta\zeta}\, d\underset{s}{v}{}^{\zeta}, \quad d\underset{s}{B}{}^{\xi}_{\eta} = \sum_{\mu} \underset{\mu s}{\bar C}{}^{\xi}_{\zeta\eta}\, d\underset{\mu}{u}{}^{\zeta}, \tag{60}$$

где обозначено

$$\underset{\mu s}{\bar C}{}^{\xi}_{\eta\zeta} = -\underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\rho\sigma}\underset{\mu}{A}{}^{\rho}_{\eta}\underset{s}{B}{}^{\sigma}_{\zeta}. \tag{61}$$

Дифференцируя (61) и пользуясь уравнениями (51), (60), (53) и (58), получаем, что величины $\underset{\mu s}{\bar C}{}^{\xi}_{\eta\zeta}$ являются постоянными. Поэтому, интегрируя (60), находим $\underset{\mu}{A}{}^{\xi}_{\eta}$ и $\underset{s}{B}{}^{\xi}_{\eta}$:

$$\underset{\mu}{A}{}^{\xi}_{\eta} = \sum_s \underset{\mu s}{\bar C}{}^{\xi}_{\eta\zeta}\underset{s}{v}{}^{\zeta} + \underset{1,\mu}{C}{}^{\xi}_{\eta}, \quad \underset{s}{B}{}^{\xi}_{\eta} = \sum_{\mu} \underset{\mu s}{\bar C}{}^{\xi}_{\zeta\eta}\underset{\mu}{u}{}^{\zeta} + \underset{2,s}{C}{}^{\xi}_{\eta}, \tag{62}$$

где $\underset{1,\mu}{C}{}^{\xi}_{\eta}$ и $\underset{2,s}{C}{}^{\xi}_{\eta}$ — также постоянные. Подставляя (62) в (58), находим формы $\underset{\mu}{\theta}{}^{\xi}$ и $\underset{s}{\vartheta}{}^{\xi}$:

$$\underset{\mu}{\theta}{}^{\xi} = (\sum_s \underset{\mu s}{\bar C}{}^{\xi}_{\eta\zeta}\underset{s}{v}{}^{\zeta} + \underset{1,\mu}{C}{}^{\xi}_{\eta})\, d\underset{\mu}{u}{}^{\eta}, \quad \underset{s}{\vartheta}{}^{\xi} = (\sum_{\mu} \underset{\mu s}{\bar C}{}^{\xi}_{\zeta\eta}\underset{\mu}{u}{}^{\zeta} + \underset{2,s}{C}{}^{\xi}_{\eta})\, d\underset{s}{v}{}^{\eta}. \tag{63}$$

Теперь найдем уравнения слоев три-ткани $WR_0(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$. Слоения ткани определяются уравнениями (27), или, в силу (57) и (63), уравнениями

$$\lambda_1 :\ d\underset{\mu}{u}{}^{\xi} = 0,\ \mu = \overline{1,m}; \quad \lambda_2 :\ d\underset{s}{v}{}^{\xi} = 0,\ s = \overline{1,l}; \quad \lambda_3 :\ dw^{\xi} = 0,$$

где

$$dw^{\xi} = \sum_{\mu}(\sum_s \underset{\mu s}{\bar C}{}^{\xi}_{\eta\zeta}\underset{s}{v}{}^{\zeta} + \underset{1,\mu}{C}{}^{\xi}_{\eta})\, d\underset{\mu}{u}{}^{\eta} + \sum_s(\sum_{\mu} \underset{\mu s}{\bar C}{}^{\xi}_{\zeta\eta}\underset{\mu}{u}{}^{\zeta} + \underset{2,s}{C}{}^{\xi}_{\eta})\, d\underset{s}{v}{}^{\eta}.$$

Интегрируя эти уравнения, находим:

$$\lambda_1 :\ \underset{\mu}{u}{}^{\xi} = \underset{\mu}{x}{}^{\xi},\ \mu = \overline{1,m}; \quad \lambda_2 :\ \underset{s}{v}{}^{\xi} = \underset{s}{y}{}^{\xi},\ s = \overline{1,l}; \quad \lambda_3 :\ w^{\xi} = z^{\xi}, \tag{64}$$

$$w^{\xi} = \sum_{\mu,s} \underset{\mu s}{\bar C}{}^{\xi}_{\eta\zeta}\underset{\mu}{u}{}^{\eta}\underset{s}{v}{}^{\zeta} + \sum_{\mu} \underset{1,\mu}{C}{}^{\xi}_{\eta}\underset{\mu}{u}{}^{\eta} + \sum_s \underset{2,s}{C}{}^{\xi}_{\eta}\underset{s}{v}{}^{\eta} + C^{\xi}, \tag{65}$$

(здесь $\underset{\mu}{x}{}^{\xi}$, $\underset{s}{y}{}^{\xi}$, z^{ξ} и C^{ξ} — постоянные интегрирования). Исключая из уравнений (64) и (65) локальные координаты $\underset{\mu}{u}{}^{\xi}$, $\underset{s}{v}{}^{\xi}$ и параметры w^{ξ}, найдем уравнения, связывающие параметры слоев ткани, проходящих через одну точку, то есть конечные уравнения рассматриваемой три-ткани:

$$z^{\xi} = \sum_{\mu,s} \underset{\mu s}{\bar C}{}^{\xi}_{\eta\zeta}\underset{\mu}{x}{}^{\eta}\underset{s}{y}{}^{\zeta} + \sum_{\mu} \underset{1,\mu}{C}{}^{\xi}_{\eta}\underset{\mu}{x}{}^{\eta} + \sum_s \underset{2,s}{C}{}^{\xi}_{\eta}\underset{s}{y}{}^{\eta} + C^{\xi}. \tag{66}$$

Преобразуем эти уравнения, используя допустимые (изотопические) преобразования. Пусть точка $P_0 = P(0,0)$ находится в области определения рассматриваемой три-ткани $WR_0(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$. Из равенств (62) получаем

$$\underset{\mu}{A}{}^{\xi}_{\eta}(P_0) = \underset{1,\mu}{C}{}^{\xi}_{\eta}, \quad \underset{s}{B}{}^{\xi}_{\eta}(P_0) = \underset{2,s}{C}{}^{\xi}_{\eta}. \tag{67}$$

Так как в любой точке области определения матрицы $\underset{\mu}{A}{}^{\xi}_{\eta}$ и $\underset{s}{B}{}^{\xi}_{\eta}$ должны быть невырожденными, то $|\underset{1,\mu}{C}{}^{\xi}_{\eta}| \neq 0$ и $|\underset{2,s}{C}{}^{\xi}_{\eta}| \neq 0$. Изотопическим преобразованием

$$\underset{\mu}{\tilde{x}}{}^{\xi} = \underset{1,\mu}{C}{}^{\xi}_{\eta}\underset{\mu}{x}{}^{\eta}, \quad \underset{s}{\tilde{y}}{}^{\xi} = \underset{2,s}{C}{}^{\xi}_{\eta}\underset{s}{y}{}^{\eta}, \quad \tilde{z}^{\xi} = z^{\xi} - C^{\xi}$$

уравнения (66) приводятся к виду

$$\tilde{z}^{\xi} = \sum_{\mu,s}\underset{\mu s}{C}{}^{\xi}_{\eta\zeta}\underset{\mu}{\tilde{x}}{}^{\eta}\underset{s}{\tilde{y}}{}^{\zeta} + \sum_{\mu}\underset{\mu}{\tilde{x}}{}^{\xi} + \sum_{s}\underset{s}{\tilde{y}}{}^{\xi}, \tag{68}$$

где

$$\underset{\mu s}{C}{}^{\xi}_{\eta\zeta} = \underset{\mu s}{\bar{C}}{}^{\xi}_{\rho\sigma}\underset{1,\mu}{\tilde{C}}{}^{\rho}_{\eta}\underset{2,s}{\tilde{C}}{}^{\sigma}_{\zeta}, \tag{69}$$

а $\underset{1,\mu}{\tilde{C}}{}^{\xi}_{\eta}$ и $\underset{2,s}{\tilde{C}}{}^{\xi}_{\eta}$ — матрицы, обратные соответственно матрицам $\underset{1,\mu}{C}{}^{\xi}_{\eta}$ и $\underset{2,s}{C}{}^{\xi}_{\eta}$.

Покажем, что величины $\underset{\mu s}{C}{}^{\xi}_{\eta\zeta}$ образуют структурный тензор коммутативной и ассоциативной $\underset{\mu s}{B}$-алгебры ткани $WR_0(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$.

В самом деле, согласно Предложению 5 $\underset{\mu s}{B}$-алгебра определяется значением тензора $\underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\eta\zeta}$ в какой-либо одной точке P многообразия $M_{(\mu,s)}$. Из равенств (61) следует, что $\underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\eta\zeta}(P) = -\underset{\mu s}{\bar{C}}{}^{\xi}_{\rho\sigma}\underset{\mu}{\tilde{A}}{}^{\rho}_{\eta}(P)\underset{s}{\tilde{B}}{}^{\sigma}_{\zeta}(P)$ в любой точке P. В частности, в точке P_0 в силу (67) и (69) имеем $\underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\eta\zeta}(P_0) = -\underset{\mu s}{C}{}^{\xi}_{\eta\zeta}$. Из (43) и (53) получаем условия коммутативности и ассоциативности $\underset{\mu s}{B}$-алгебры соответственно в виде

$$\underset{\mu s}{C}{}^{\xi}_{\eta\zeta} = \underset{\mu s}{C}{}^{\xi}_{\zeta\eta}, \quad \underset{\mu s}{C}{}^{\xi}_{\zeta\sigma}\underset{\mu s}{C}{}^{\zeta}_{\eta\rho} = \underset{\mu s}{C}{}^{\xi}_{\zeta\rho}\underset{\mu s}{C}{}^{\zeta}_{\eta\sigma}. \tag{70}$$

Тем самым доказана

Теорема 4. *Конечные уравнения три-ткани $WR_0(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, порождаемой абелевой группой G, могут быть приведены к виду (68), где величины $\underset{\mu s}{C}{}^{\xi}_{\eta\zeta}$ являются постоянными и образуют структурный тензор некоторой коммутативной и ассоциативной алгебры.*

Замечание 1. При $\lambda = 1$ три-ткань $WR_0(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ является тканью $WR(p,q)$, конечные уравнения которой найдены в [9], см. также [8]. С другой стороны, уравнения ткани $WR(p,q)$ могут быть получены из найденных уравнений (68). Действительно, при $\lambda = 1$ система (68) состоит из одного уравнения вида

$$\tilde{z} = \sum_{\mu,s}\underset{\mu s}{C}\underset{\mu}{\tilde{x}}\underset{s}{\tilde{y}} + \sum_{\mu}\underset{\mu}{\tilde{x}} + \sum_{s}\underset{s}{\tilde{y}}, \tag{71}$$

где $\mu = \overline{1,q}$, $s = \overline{1,p}$. Рассмотрим два возможных случая:
1) $rank(\underset{\mu s}{C}) = p$; 2) $rank(\underset{\mu s}{C}) = p-1$.

1) Пусть $rank(\underset{\mu s}{C}) = p$, $\mid \underset{ts}{C} \mid \neq 0$ и $(\underset{ts}{\tilde{C}})$ — обратная матрица для $(\underset{ts}{C})$. В этом случае изотопическим преобразованием

$$\underset{s}{x} = \sum_{\mu} \underset{\mu s}{C} \underset{\mu}{\tilde{x}} + 1, \quad \underset{s}{y} = \underset{s}{\tilde{y}} + \sum_{t} \underset{st}{\tilde{C}}, \quad z = \tilde{z} + \sum_{s,t} \underset{ts}{\tilde{C}}$$

уравнение (71) приводится к виду

$$z = \sum_{s} \underset{s}{x} \underset{s}{y} + \sum_{\hat{\mu}} \underset{\hat{\mu}}{C} \underset{\hat{\mu}}{\tilde{x}}, \tag{72}$$

где $\underset{\breve{\mu}}{C} = 1 - \sum_{s,t} \underset{ts}{\tilde{C}} \underset{\breve{\mu} t}{C}$, $\breve{\mu} = \overline{p+1, q}$.

a) Если хотя бы одна из величин $\underset{\breve{\mu}}{C} \neq 0$, то, полагая $\underset{p+1}{x} = \sum_{\breve{\mu}} \underset{\breve{\mu}}{C} \underset{\breve{\mu}}{\tilde{x}}$, приведем уравнение (72) к виду

$$z = \underset{1}{x} \underset{1}{y} + ... + \underset{p}{x} \underset{p}{y} + \underset{p+1}{x}. \tag{73}$$

b) Если $\underset{\breve{\mu}}{C} = 0$, то уравнение (72) приводится к следующему виду

$$z = \underset{1}{x} \underset{1}{y} + ... + \underset{p}{x} \underset{p}{y}. \tag{74}$$

2) Пусть $rank(\underset{\mu s}{C}) = p - 1$. В этом случае изотопическим преобразованием

$$\underset{a}{x} = \sum_{\mu} \underset{\mu a}{C} \underset{\mu}{\tilde{x}}, \quad \underset{p}{x} = \sum_{\mu} \underset{\mu}{\tilde{x}}, \quad \underset{p}{y} = \sum_{s} \underset{s}{\tilde{y}},$$

где $a = \overline{1, p-1}$, уравнение (71) приводится к виду

$$z = \underset{1}{x} \underset{1}{y} + ... + \underset{p-1}{x} \underset{p-1}{y} + \underset{p}{x} + \underset{p}{y}. \tag{75}$$

Замечание 2. Уравнения (73), (74), (75), с другой стороны, определяют классы физических структур, найденные ранее Г.Г. Михайличенко в [6] методами теории физических структур. Об эквивалентности некоторых понятий теории три-тканей и теории физических структур см. в [8]-[10].

Замечание 3. При $l = m = 1$ уравнения (68) принимают вид

$$z^\xi = C^\xi_{\eta\zeta} x^\eta y^\zeta + x^\xi + y^\xi \tag{76}$$

и определяют классическую три-ткань $W(\lambda, \lambda, \lambda)$. С другой стороны, эти уравнения определяют лупу с единицей $e = (0, ..., 0)$, которая в силу (70) является коммутативной и ассоциативной, а потому является группой. Следовательно, рассматриваемая три-ткань $W(\lambda, \lambda, \lambda)$ — групповая и, значит, на ней должны замыкаться конфигурации R [2]. Согласно [9] любая ткань R обладает сердцевиной, поэтому сердцевина существует и для ткани, определяемой уравнениями (76).

Предложение 7. Сердцевина три-ткани $W(\lambda, \lambda, \lambda)$, определяемой уравнениями (76), задается уравнениями

$$C^\xi_{\eta\zeta} z^\eta_{11} z^\zeta_{22} + z^\xi_{11} + z^\xi_{22} = C^\xi_{\eta\zeta} z^\eta_{12} z^\zeta_{21} + z^\xi_{12} + z^\xi_{21}, \tag{77}$$

где z_{ij} — параметры наклонных слоев, входящих в произвольную конфигурацию R, $z_{ij} = x_i \cdot y_j$, $i, j = 1, 2$.

Доказательство. Согласно [9] сердцевина произвольной три-ткани R, порождаемой группой $G(\cdot)$, определяется уравнением

$$z_{11}/z_{12} = z_{21}/z_{22},$$

где «/» — правая обратная операция для $(\cdot)$. Обозначим $z_{11}/z_{12} = z_{21}/z_{22} = v$, тогда $z_{12} = z_{11} \cdot v$, $z_{22} = z_{21} \cdot v$. Отсюда следует, что

$$z_{22} \cdot (z_{11} \cdot v) = (z_{21} \cdot v) \cdot z_{12}. \tag{78}$$

В силу коммутативности и ассоциативности операции $(\cdot)$ получаем

$$\begin{aligned} &z_{22} \cdot (z_{11} \cdot v) = (z_{22} \cdot z_{11}) \cdot v, \\ &(z_{21} \cdot v) \cdot z_{12} = (v \cdot z_{21}) \cdot z_{12} = v \cdot (z_{21} \cdot z_{12}) = (z_{21} \cdot z_{12}) \cdot v. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (78) имеем $z_{11} \cdot z_{22} = z_{12} \cdot z_{21}$. Из последнего уравнения в силу (76) получаем уравнения сердцевины рассматриваемой три-ткани в виде (77).

Список литературы

[1] Акивис М.А., Гольдберг В.В. О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей. // Докл. АН СССР, 1972. Т. 203, № 2, с. 263–266.

[2] Akivis M.A., Shelekhov A.M. Algebra and Geometry of Multidimensional Three-Webs. // Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/ Boston/ London, 1992. xvii+358 pp.

[3] Гольдберг В.В. О $(n+1)$-тканях многомерных поверхностей. // Докл. АН СССР, 1973. Т. 210, № 4, с. 756–759.

[4] Гольдберг В.В. Трансверсально-геодезические, шестиугольные и групповые три-ткани, образованные поверхностями разных размерностей. // Сб. статей по диферен. геом. Калинин, 1974. С. 52–64.

[5] Гольдберг В.В. О приводимых, групповых и $(2n+2)$-эдричных $(n+1)$-тканях многомерных поверхностей. // Сиб. мат. ж., 1976. № 1, с. 44–57.

[6] Михайличенко Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур. // Докл. АН СССР, 1972. Т. 206, № 5, с. 1056–1058.

[7] Tolstikhina G.A. On associative smooth monoids. // Webs and Quasigroups. Tver, 2002. P. 53–59.

[8] Толстихина Г.А. Алгебра и геометрия три-тканей, образованных слоениями разных размерностей. // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современная математика и ее приложения. Т. 32 (2005), с. 29-116.

[9] Толстихина Г.А., Шелехов А.М. О три-тканях $W(p, q, p+q-1)$, на которых замыкаются обобщенные конфигурации Рейдемейстера. // Деп. в ВИНИТИ 13.08.2001. №1869-В2001.

[10] Толстихина Г.А., Шелехов А.М. Обобщенная ассоциативность в гладких группоидах. // Докл. РАН, 2002. Т. 383, № 1, с. 32–33.