УДК 514.763.7

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕНЗОРОВ КРУЧЕНИЯ И КРИВИЗНЫ ШЕСТИМЕРНЫХ ШЕСТИУГОЛЬНЫХ ТРИ-ТКАНЕЙ H_S^1 И H_S^2

Шестакова М.А.
Кафедра функционального анализа и геометрии

Поступила в редакцию 10.04.2007, после переработки 8.06.2007.

Показано, что при главной изотопии компоненты тензоров кручения и кривизны три-ткани испытывают только изотропическое преобразование переменных. Вычислены тензоры кручения и кривизны нетривиальных шестимерных тканей H_s.

It is proved that the components of the torsion tensor and curvature tensor to a three-web have only isotopical transform for the main isotopie. The torsion and curvature tensors to non- trivial six-dimensional webs H_s are calculated.

Ключевые слова: шестиугольная три-ткань, изотопия, тензор кручения, тензор кривизны, квазигруппа, структурные уравнения.
Keywords: hexagonal three-web, isotopie, torsion tensor, curvature tensor, quasigroup, structure equations.

Введение. Теория три-тканей, основанная В. Бляшке и поддержанная Черном на базе метода внешних форм Картана, в послевоенные годы получила законченное структурное описание в рамках современной теории $G-$структур и в терминах соответствующих структурных уравнений. На последующем этапе изучения различных специальных типов три-тканей инициатива перешла к советской геометрической школе С.П. Фиников (М. Акивис, В. Гольдберг, А. Шелехов и др.). С помощью канонической связности, полученной для тканей Черном, были даны тензорные характеристики ряда специальных тканей. При изотопической замене переменных в конечных уравнениях ткани компоненты тензоров кручения и кривизны ткани, вообще говоря, меняются. Поэтому компоненты тензора кручения и кривизны тканей, вычисленные в тех локальных координатах, в которых записаны их конечные уравнения, отличаются от компонент тензоров, входящих в уравнения этих тканей. В настоящей работе рассматриваются шестимерные шестиугольные три-ткани с постулируемой заранее частичной симметрией тензора кривизны связности Черна. Для нетривиальных классов этих тканей найдены компоненты тензора кручения и кривизны в таких локальных координатах, в которых уравнения ткани являются уравнениями соответствующей локальной координатной лупы с единицей, имеющей нулевые координаты.

1. Пусть три-ткань $W(3,r)$, заданная на аналитическом многообразии M размерности $2r$ образована тремя гладкими слоениями λ_α $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$ коразмерности r, находящимися в общем положении. Каждое слоение λ_α задается на M

вполне интегрируемой системой форм Пфаффа $\underset{\alpha}{\omega}^i$, где $i, j, k = 1, ..., r$. Уравнения структуры три-ткани имеют вид [2]:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k,$$
$$d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \tag{1}$$

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + b^i_{jk\ell}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell. \tag{2}$$

Величины a^i_{jk} образуют кососимметричный по нижним индексам тензор, называемый тензором кручения ткани $W(3, r)$, а величины $b^i_{jk\ell}$ образуют тензор, который называется тензором кривизны ткани $W(3, 2, r)$. Тензоры кручения и кривизны три-ткани $W(3, 2, r)$ связаны конечными и дифференциальными соотношениями, получающимися при дифференцировании уравнений (1) и (2):

$$b^i_{[jk\ell]} = 2a^m_{[jk}a^i_{|m|\ell]},$$
$$\nabla a^i_{jk} = b^i_{[j|\ell|k]}\underset{1}{\omega}^\ell + b^i_{[jk]\ell}\ \underset{2}{\omega}^\ell,$$
$$\nabla b^i_{jk\ell} = \overline{C}^i_{jk\ell m}\underset{1}{\omega}^m + \widetilde{C}^i_{jk\ell m}\underset{2}{\omega}^m.$$

Здесь ∇ — оператор ковариантного дифференцирования в связности Γ, структурные уравнения которой есть уравнения (1)-(2).

В теории многомерных тканей большое место занимает изучение специальных классов тканей, которые характеризуются различными условиями на тензоры кручения и кривизны. Одним из таких классов являются шестимерные шестиугольные три-ткани, тензор кривизны которых частично симметричен (ткани H_s). G-структура ткани (H_s) является замкнутой структурой третьего порядка. Тензор кручения таких тканей удовлетворяет тождеству Якоби, а тензор кривизны характеризуется следующими условиями:

$$b^i_{(jk\ell)} = 0, \quad b^i_{j[k\ell]} = 0.$$

С точностью до изотопии существует всего две нетривиальных ткани H_s (H^1_s и H^2_s), каждая из которых определяется некоторой трехмерной алгеброй Ли с ненулевым коммутантом.

2. Сначала найдем, как преобразуются компоненты тензора кривизны и кручения произвольной три-ткани при замене переменных.

Пусть $W(3, r)$ — произвольная три-ткань, уравнения которой в окрестности U_p точки p в некоторых локальных координатах имеют вид:

$$z = f(x, y) \overset{def}{=} x \cdot y, \tag{3}$$

$x \in X \subset \mathbb{R}^r$, $y \in Y \subset \mathbb{R}^r$, $z \in Z \subset \mathbb{R}^r$. Как известно [2], если ввести формы $\underset{1}{\omega} = f_x dx$ и $\underset{2}{\omega} = f_y dy$, то они будут удовлетворять структурным уравнениям ткани. Здесь $\underset{1}{\omega}$ и $\underset{2}{\omega}$ — векторнозначные формы,

$$\underset{1}{\omega} = (\underset{1}{\omega}^i), \quad \underset{1}{\omega} = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}dx^j, \quad \underset{2}{\omega} = (\underset{2}{\omega}^i), \quad \underset{2}{\omega} = \frac{\partial f^i}{\partial y^j}dy^j.$$

Переменные, входящие в уравнение (3), допускают изотопическое преобразование

$$x = \alpha(\overline{x}), \quad y = \beta(\overline{y}), \quad z = \gamma(\overline{z}). \tag{4}$$

В результате этих преобразований уравнение (3) переходит в уравнение

$$\overline{z} = \gamma^{-1} \circ f(\alpha(\overline{x})), \beta(\overline{y})) = \overline{f}(\overline{x}, \overline{y}), \tag{5}$$

а формы $\underset{1}{\omega}$ и $\underset{2}{\omega}$ перейдут в формы

$$\underset{1}{\overline{\omega}} = \overline{f}_{\overline{x}} dx, \quad \underset{2}{\overline{\omega}} = \overline{f}_{\overline{y}} dy. \tag{6}$$

Найдем связь между формами $\underset{1}{\omega}$, $\underset{2}{\omega}$, $\underset{1}{\overline{\omega}}$ и $\underset{2}{\overline{\omega}}$. Продифференцировав уравнение (5), получим

$$\overline{f}_{\overline{x}} dx = \overline{f}_{\overline{y}} dy = d\gamma^{-1} \circ (f_x \alpha' d\overline{x} + f_y \beta' d\overline{y}).$$

Учитывая обозначения (6), а также равенства

$$dx = \alpha' d\overline{x}, \quad dy = \beta' d\overline{y},$$

которые вытекают из (4), последнее соотношение перепишем следующим образом:

$$\underset{1}{\overline{\omega}} + \underset{2}{\overline{\omega}} = d\gamma^{-1} \circ (f_x dx + f_y dy) = d\gamma^{-1} \circ (\underset{1}{\omega} + \underset{2}{\omega}).$$

Отсюда получаем закон преобразования форм при изотопии (4):

$$\underset{1}{\overline{\omega}} = d\gamma^{-1} \circ \underset{1}{\omega}, \quad \underset{2}{\overline{\omega}} = d\gamma^{-1} \circ \underset{2}{\omega}. \tag{7}$$

Следовательно, при главной изотопии ($\gamma = id$), формы преобразуются следующим образом:

$$\underset{1}{\omega} = \underset{1}{\overline{\omega}}, \quad \underset{2}{\omega} = \underset{2}{\overline{\omega}}.$$

Согласно [1], структурные уравнения ткани сохраняют свой вид при следующих синхронных преобразованиях форм

$$\underset{1,2}{\overline{\omega}} = A \underset{1,2}{\omega}.$$

Сравнивая с (7), получаем $(A^i_{i'}) = d\gamma^{-1}$, и при главной изотопии $(A^i_{i'}) = id$. Но матрица $(A^i_{i'})$ задает также преобразование основных тензоров ткани — тензора кручения и тензора кривизны при соответствующем изотопическом преобразовании:

$$a^i_{jk}(x,y) = A^i_{i'} A^{j'}_j A^{k'}_k \overline{a}^{i'}_{j'k'}(\overline{x}, \overline{y}),$$
$$b^i_{jk\ell}(x,y) = A^i_{i'} A^{j'}_j A^{k'}_k A^{\ell'}_\ell \overline{b}^{i'}_{j'k'\ell'}(\overline{x}, \overline{y}).$$

В случае главной изотопии получаем:

$$\begin{aligned} a^i_{jk}(x,y) &= \overline{a}^i_{jk}(\overline{x}, \overline{y}) = a^i_{jk}(\alpha(\overline{x}), \beta(\overline{y})), \\ b^i_{jk\ell}(x,y) &= \overline{b}^i_{jk\ell}(\overline{x}, \overline{y}) = b^i_{jk\ell}(\alpha(\overline{x}), \beta(\overline{y}). \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, при главной изотопии компоненты тензоров кривизны и кручения испытывают только изотопическое преобразование переменных. С другой стороны, известно, что с каждой точкой (x, y) три-ткани связана координатная лупа $\ell_{x,y}(\bullet)$, главноизотопная координатной квазигруппе $x \cdot y$, причем изотопия имеет следующий вид:

$$u \bullet v = R_b^{-1}(u) \cdot L_a^{-1}(v),$$

где $L_a(y) = a \cdot y$, $R_b(x) = x \cdot b$. Рассмотрим еще одну координатную лупу $\ell_{\overline{a}\overline{b}}(*)$, где

$$u * v = R_{\overline{b}}^{-1}(u) \cdot L_{\overline{a}}^{-1}(v).$$

Найдем связь между операциями $\bullet$ и $*$. Имеем:

$$\begin{aligned} u * v &= R_{\overline{b}}^{-1}(u) \cdot L_{\overline{a}}^{-1}(v) = R_b^{-1} \circ R_b \circ R_{\overline{b}}^{-1}(u) \cdot L_a^{-1} \circ L_a \circ L_{\overline{a}}^{-1}(v) = \\ &= (R_b \circ R_{\overline{b}}^{-1})(u) \bullet (L_a \circ L_{\overline{a}}^{-1})(v). \end{aligned}$$

Итак, любые две координатные лупы ткани главноизотопны, причем изотопия (α, β) имеет вид

$$\alpha = R_b \circ R_{\overline{b}}^{-1}, \quad \beta = L_a \circ L_{\overline{a}}^{-1}.$$

При этой изотопии формулы (8) принимают вид

$$\begin{aligned} a^i_{jk}(x, y) &= \overline{a}^i_{jk}(\overline{x}, \overline{y}) = a^i_{jk}(R_b \circ R_{\overline{b}}^{-1}(\overline{x}), L_a \circ L_{\overline{a}}^{-1}(\overline{y})), \\ b^i_{jk\ell}(x, y) &= \overline{b}^i_{jk\ell}(\overline{x}, \overline{y}) = b^i_{jk\ell}(R_b \circ R_{\overline{b}}^{-1}(\overline{x}), L_a \circ L_{\overline{a}}^{-1}(\overline{y})). \end{aligned}$$

Эти формулы показывают, как связаны между собой соответствующие тензоры координатных луп $\ell_{x,y}$ и $\ell_{\overline{x},\overline{y}}$.

Пусть исходная квазигруппа $z = x \cdot y$ является лупой с единицей e, и пусть она совпадает с координатной лупой $\ell_{e,e}$. Тогда $L_e = R_e = id$ и предыдущие формулы принимают вид:

$$\begin{aligned} a^i_{jk}(x, y) &= \overline{a}^i_{jk}(\overline{x}, \overline{y}) = a^i_{jk}(R_{\overline{b}}^{-1}(\overline{x}), L_{\overline{a}}^{-1}(\overline{y})), \\ b^i_{jk\ell}(x, y) &= \overline{b}^i_{jk\ell}(\overline{x}, \overline{y}) = b^i_{jk\ell}(R_{\overline{b}}^{-1}(\overline{x}), L_{\overline{a}}^{-1}(\overline{y})). \end{aligned}$$

Если $\overline{a} = \overline{b} = e$, то мы получаем исходную лупу $\ell_{e,e}$ $(\cdot)$.

В силу локальности рассмотрения точку $(\overline{a}, \overline{b})$ можно соединить с точкой (e, e) непрерывным путем $\overline{a} = \overline{a}(t)$, $\overline{b} = \overline{b}(t)$, где $\overline{a}(0) = e$, $\overline{b}(0) = e$, поэтому можно считать, что тензорные поля $a^i_{jk}(R_{\overline{b}}^{-1}(x), L_{\overline{a}}^{-1}(y))$, $b^i_{jk\ell}(R_{\overline{b}}^{-1}(x), L_{\overline{a}}^{-1}(y))$ получаются деформацией соответствующих тензорных полей $a^i_{jk}(e, e)$, $b^i_{jk\ell}(e, e)$, связанных с координатной лупой $\ell_{e,e}$.

3. Найдем основные тензоры тканей H_s^1 и H_s^2.

Для вычисления компонент тензора кручения и кривизны воспользуемся известными формулами [2]:

$$a^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} b^i_{jk\ell} = \quad & \left(\frac{\partial^3 f^i}{\partial x^m \partial y^n \partial y^p} \tilde{g}^n_j - \frac{\partial^3 f^i}{\partial x^m \partial x^n \partial y^p} \overline{g}^n_j\right) \overline{g}^m_k \tilde{g}^p_\ell + \Gamma^i_{kp} \frac{\partial^2 f^p}{\partial y^m \partial y^n} \tilde{g}^m_j \tilde{g}^n_\ell - \\ & - \Gamma^i_{p\ell} \frac{\partial^2 f^p}{\partial x^m \partial x^n} \overline{g}^m_j \overline{g}^n_k + \Gamma^m_{j\ell} \Gamma^i_{km} - \Gamma^m_{rj} \Gamma^i_{m\ell}. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь f^i – функции, определяющие ткань на многообразии,

$$\Gamma^i_{jk} = -\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^\ell \partial y^m}\overline{g}^\ell_j \tilde{g}^m_k, \tag{11}$$

$(\overline{g}^i_j)$ и $(\tilde{g}^i_j)$ – матрицы, обратные к $(\overline{f}^i_j)$ и $(\tilde{f}^i_j)$ – соответственно, причем

$$\overline{f}^i_j = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad \tilde{f}^i_j = \frac{\partial f^i}{\partial y^j}. \tag{12}$$

Рассмотрим сначала ткань H^2_s, определяемую уравнениями [5]:

$$\begin{aligned}
&z^1 = f^1 = x^1 e^{-y^3} - 2ax^2y^2e^{x^3-y^3} + y_1 e^{x^3} + 2by^2e^{-y^3} - 2bx^2e^{x^3},\\
&z^2 = f^2 = x^2 + y^2e^{-x^3-y^3},\\
&z^3 = f^3 = x^3 + y^3.
\end{aligned} \tag{13}$$

Найдем компоненты матриц $(\overline{f}^i_j)$ и $(\tilde{f}^i_j)$, используя формулы (12):

$$(\overline{f}^i_j) = \begin{pmatrix} e^{-y^3} & -2ay^2e^{x^3-y^3} - 2be^{x^3} & -2ax^2y^2e^{x^3-y^3} + y_1e^{x^3} - 2bx^2e^{x^3} \\ 0 & 1 & -y^2e^{-x^3-y^3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\tilde{f}^i_j) = \begin{pmatrix} e^{x^3} & -2ax^2e^{x^3-y^3} + 2be^{-y^3} & -x^1e^{-y^3} + 2ax^2y^2e^{x^3-y^3} - 2by^2e^{-y^3} \\ 0 & e^{-x^3-y^3} & -y^2e^{-x^3-y^3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь матрицы $(\overline{g}^i_j)$ и $(\tilde{g}^i_j)$, обратные к указанным

$$(\overline{g}^i_j) = \begin{pmatrix} e^{y^3} & 2ay^2e^{x^3} + 2be^{x^3+y^3} & \begin{matrix} 2a(y^2)^2e^{-y^3} & +2by^2 + 2ax^2y^2e^{x^3} - \\ -y^1e^{x^3+y^3} & +2bx^2e^{x^3+y^3} \end{matrix} \\ 0 & 1 & y^2e^{-x^3-y^3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\tilde{g}^i_j) = \begin{pmatrix} e^{-x^3} & 2ae^{x^3} - 2b & x^1e^{-x^3-y^3} \\ 0 & e^{x^3+y^3} & y^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем ненулевые компоненты тензора Γ^i_{jk}, используя (11). В результате получаем:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{13} = 1, \quad \Gamma^1_{22} = 2ae^{2x^3}, \quad \Gamma^1_{23} = 2ay^2e^{x^3-y^3} + 2be^{x^3},\\
&\Gamma^1_{31} = -1, \quad \Gamma^1_{32} = 2ay^2e^{x^3-y^3} + 2be^{x^3}, \quad \Gamma^2_{32} = 1,\\
&\Gamma^1_{33} = -x^1e^{-y^3} - y^1e^{x^3} + 2a(y^2)^2e^{-2y^3} - 2a(y^2)^2e^{x^3-y^3} + 2by^2e^{-y^3} + 2bx^2e^{x^3}.
\end{aligned}$$

Найдем ненулевые компоненты тензора кручения, используя (9). Имеем:

$$a^1_{13} = 1, \quad a^1_{31} = -1, \quad a^2_{23} = -\frac{1}{2}, \quad a^2_{32} = \frac{1}{2}.$$

Используя (10), найдем компоненты тензора кривизны:

$$\begin{aligned}&b^1_{223}=b^1_{232}=-2ae^{2x^3},\quad b^1_{322}=4ae^{2x^3},\\&b^1_{323}=b^1_{332}=2be^{x^3}+2ay^2e^{x^3-y^3},\\&b^1_{233}=-4ay^2e^{x^3-y^3}-4be^{x^3}.\end{aligned}$$

Как показано в [5], при замене

$$\begin{aligned}&x^2=u^2,\quad x^3=u^3,\quad x^1=u^1+2be^{u^3}u^2,\\&y^1=v^1-2be^{v^3-u^3}v^2,\quad y^2=v^2e^{v^3},\quad y^3=v^3\end{aligned}$$

уравнения координатной квазигруппы (13) перейдут в уравнения координатной лупы

$$\begin{aligned}z^1&=u^1e^{-v^3}+v^1e^{u^3}-2ae^{u^3}u^2v^2-2be^{u^3}(u^2+v^2)+\\&\quad+2be^{-v^3+u^3}u^2+2bv^2,\\z^2&=u^2+v^2e^{-u^3},\\z^3&=u^3+v^3.\end{aligned}\tag{14}$$

При этой же замене вычисленные выше компоненты тензора кривизны преобразуются к виду:

$$\begin{aligned}&b^1_{223}=b^1_{232}=-2ae^{2u^3},\\&b^1_{322}=4ae^{2u^3},\\&b^1_{323}=b^1_{332}=2be^{u^3}+2av^2e^{v^3}e^{u^3-v^3}=2(b+av^2)e^{u^3},\\&b^1_{233}=-4av^2e^{v^3}e^{u^3-v^3}-4be^{u^3}=-4(av^2+b)e^{u^3}.\end{aligned}$$

Тот же результат получается, если вычислять компоненты тензора кривизны непосредственно, пользуясь формулами (14).

Рассмотрим теперь три-ткань H^1_s, определяемую уравнениями [4]:

$$\begin{aligned}&z^1=u^1+v^1+(u^2+v^2)(u^3v^2-u^2v^3),\\&z^2=u^2+v^2,\\&z^3=u^3+v^3.\end{aligned}$$

Найдем компоненты матриц $(\overline{f}^i_j)$ и $(\tilde{f}^i_j)$, используя (12):

$$(\overline{f}^i_j)=\begin{pmatrix}1 & v^2(u^3-v^3)-2u^2v^3 & v^2(u^2+v^2)\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$(\tilde{f}^i_j)=\begin{pmatrix}1 & u^2(u^3-v^3)+2u^3v^2 & -u^2(u^2+v^2)\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Найдем матрицы $(\overline{g}^i_j)$ и $(\tilde{g}^i_j)$, обратные к матрицам $(\overline{f}^i_j)$ и $(\tilde{f}^i_j)$ соответственно.

$$(\overline{g}^i_j)=\begin{pmatrix}1 & v^2(u^3-v^3)-2u^2v^3 & v^2(u^2+v^2)\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$(\tilde{g}^i_j) = \begin{pmatrix} 1 & u^2(u^3 - v^3) + 2u^3v^2 & -u^2(u^2+v^2) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем ненулевые компоненты тензора Γ^i_{jk}, используя (11). В результате получаем:

$$\Gamma^1_{22} = -u^3 + v^3, \quad \Gamma^1_{23} = 2u^2 + v^2, \quad \Gamma^1_{32} = -u^2 - 2v^2.$$

Тензор кручения имеет единственную ненулевую компоненту

$$a^1_{23} = \frac{1}{2}(2u^2 + v^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{3}{2}(u^2 + v^2) = \frac{3}{2}z^2.$$

Используя формулы (10), найдем ненулевые компоненты тензора кривизны:

$$b^1_{223} = b^1_{232} = 1, \quad b^1_{322} = -2.$$

Заключение. При главной изотопии компоненты тензоров кручения и кривизны три-ткани испытывают только изотопическое преобразование переменных.

Список литературы

[1] Акивис М. А. Дифференциальная геометрия тканей. Проблемы геометрии. // Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР 15, М., 1983, с. 187–213.

[2] Акивис М. А. О три-тканях многомерных поверхностей. // Тр. геом. сем. М., 1969, т. 2, с. 7.

[3] Акивис М. А., Шелехов А. М. Основы теории тканей. // Калинин, 1981.

[4] Шестакова М. А. Пример шестиугольной три-ткани с частично симметричным тензором кривизны. // Ткани и квазигруппы, Калинин, 1990, с. 22–29.

[5] Шестакова М. А. On the theory of six-dimensional hexagonal three-webs. // Webs and Quasigroups, 1993, Tver, Tver State University, p. 56–62.