

МОДЕЛИ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
(ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ)

УДК 517.94:519.6

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ  
О ПЛОСКОМ СТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ  
СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Могилевский И.Ш., Охота В.И.  
Кафедра функционального анализа

---

*Поступила в редакцию 22.03.2007, после переработки 25.04.2007.*

---

Предложен способ численного исследования задачи об установившемся плоском течении ограниченного объема вязкой несжимаемой жидкости с частично свободной поверхностью. Используются метод последовательных приближений и метод конечных элементов.

The numerical approach to the plane steady flow of a bounded volume of a viscous incompressible fluid with partially free boundary is proposed. The successive approximations and finite element method are used.

**Ключевые слова:** уравнения Навье-Стокса, плоское стационарное течение со свободной границей, метод конечных элементов.

**Keywords:** Navier-Stokes equations, plane stationary free boundary flow, finite element method.

**1. Введение. Постановка задачи.** Рассматривается задача об установившемся движении двумерного потока вязкой несжимаемой жидкости с частично свободной поверхностью. Область  $\Omega$ , занимаемая жидкостью, расположена в плоскости  $(x_1, x_2)$  и ограничена линиями  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = l$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_2 = \phi(x_1)$ . Предполагается, что  $\phi(x_1) > 0$ . Движение жидкости характеризуется вектором скорости  $\bar{v}(x) = (v_1(x), v_2(x))$  и давлением  $p(x)$ .

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_2 = \{0 < x_1 < l, x_2 = \phi(x_1)\},$$

$$\Gamma_1 = \{x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq \phi(0)\} \cup \{x_1 = l, 0 \leq x_2 \leq \phi(l)\} \cup \{0 \leq x_1 \leq l, x_2 = 0\}.$$

$\Gamma_1$  – фиксированная часть границы области, заполненной жидкостью,  $\Gamma_2$  – свободная граница, которая подлежит определению. Область  $\Omega$  изображена на рисунке 1.

Искомой является тройка функций  $(\bar{v}, p, \phi)$ , удовлетворяющая краевой задаче

$$-\nu\Delta\bar{v} + \sum_{i=1}^2 v_i \frac{\partial\bar{v}}{\partial x_i} + \nabla p = \bar{f}, \quad \operatorname{div}\bar{v} = 0, \quad x \in \Omega \quad (1)$$

$$\bar{v}|_{\Gamma_1} = 0, \quad (2)$$

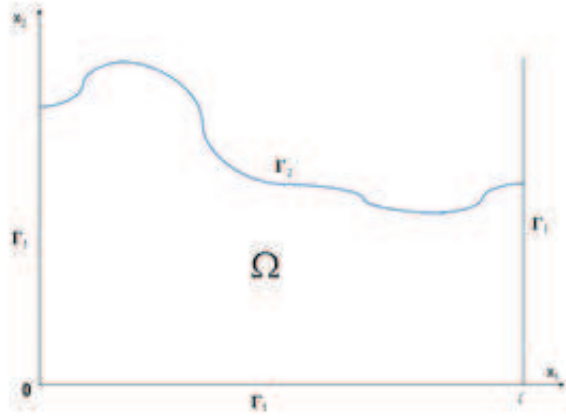


Рис. 1

$$\bar{v} \cdot \bar{n}|_{\Gamma_2} = 0, \quad T(\bar{v}, p)\bar{n}|_{\Gamma_2} = \sigma H\bar{n}, \quad (3)$$

$$\bar{m} \cdot \bar{n} = \cos \gamma \quad \text{в точках} \quad (x_1 = 0, x_2 = \phi(0)), \quad (x_1 = l, x_2 = \phi(l)). \quad (4)$$

Кроме того, предполагается, что объем жидкости, заполняющей область  $\Omega$ , фиксирован. Это означает, что

$$\int_0^l \phi(x_1) dx_1 = V_0, \quad (5)$$

где  $V_0$  – заданное положительное число. В формулах (1), (3) и (4)  $\nu = \text{const} > 0$  – кинематический коэффициент вязкости,  $\sigma = \text{const} > 0$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $\bar{f}$  – заданная вектор-функция, характеризующая внешние силы, действующие на жидкость,  $\bar{n}$  – единичный вектор внешней нормали к линии  $\Gamma_2$ ,  $\bar{m}$  – единичный вектор внешней нормали к фиксированной части границы  $\Gamma_1$ ,  $\gamma$  – угол смачивания, т.е. угол между свободной поверхностью жидкости и твердой стенкой сосуда,  $T$  – тензор напряжений

$$T(\bar{v}, p) = -pI + \nu S(\bar{v}), \quad S_{i,j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

$H$  – удвоенная кривизна кривой  $\Gamma_2$ .

$$\bar{n} = \left( -\frac{\phi'}{\sqrt{1+\phi'^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+\phi'^2}} \right), \quad H = \frac{2\phi''}{\sqrt{(1+\phi'^2)^3}}, \quad (6)$$

$$\bar{m} = (-1, 0) \quad \text{в точке} \quad (x_1 = 0, x_2 = \phi(0)),$$

$$\bar{m} = (1, 0) \quad \text{в точке} \quad (x_1 = l, x_2 = \phi(l)).$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ .

**2. Решение задачи методом последовательных приближений.** Задача (1), (2), (3), (5) была подробно проанализирована с точки зрения принципиальной разрешимости и единственности в 1970-х годах в работах [2, 3, 4].

Изложим кратко метод, предложенный в указанных работах. Решение  $(\bar{v}, p, \phi)$  ищется методом последовательных приближений. Пусть известно  $k$ -е приближение  $(\bar{v}^{(k)}, p^{(k)}, \phi^{(k)})$ . Определим  $k+1$ -е приближение. Положим  $(\bar{v}^{(k+1)}, p^{(k+1)})$  решением следующей краевой задачи в фиксированной области  $\Omega^{(k)}$  с границей

$$\partial\Omega^{(k)} = \{x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq \phi^{(k)}(0); x_2 = 0, 0 \leq x_1 \leq l; \\ x_1 = l, 0 \leq x_2 \leq \phi^{(k)}(l); 0 \leq x_1 \leq l, x_2 = \phi^{(k)}(x_1)\}$$

$$-\nu \Delta \bar{v}^{(k+1)} + \sum_{i=1}^2 v_i^{(k+1)} \frac{\partial \bar{v}^{(k+1)}}{\partial x_i} + \nabla p^{(k+1)} = \bar{f}, \quad \operatorname{div} \bar{v}^{(k+1)} = 0, \quad x \in \Omega^{(k)} \quad (7)$$

$$\bar{v}^{(k+1)}|_{x_1=0} = 0, \quad \bar{v}^{(k+1)}|_{x_1=l} = 0, \quad \bar{v}^{(k+1)}|_{x_2=0} = 0, \quad (8)$$

$$\bar{v}^{(k+1)} \cdot \bar{n}^{(k)}|_{x_2=\phi^{(k)}(x_1)} = 0, \quad T(\bar{v}^{(k+1)}, p^{(k+1)}) \bar{n}^{(k)} \cdot \bar{\tau}^{(k)}|_{x_2=\phi^{(k)}(x_1)} = 0, \quad (9)$$

$$\int_{\Omega^{(k)}} p^{(k+1)}(x) dx = 0. \quad (10)$$

Здесь  $\bar{n}^{(k)}$  и  $\bar{\tau}^{(k)}$  соответственно нормальный и касательный векторы к кривой  $\Gamma_2^{(k)} = \{0 < x_1 < l, x_2 = \phi^{(k)}(x_1)\}$ .  $\bar{\tau}^{(k)} = \left( \frac{1}{\sqrt{1+(\phi^{(k)})'^2}}, \frac{(\phi^{(k)})'}{\sqrt{1+(\phi^{(k)})'^2}} \right)$ . Затем вычислим величину  $H^{(k+1)}$  по формуле

$$H^{(k+1)} = \frac{1}{\sigma} T(\bar{v}^{(k+1)}, p^{(k+1)}) \bar{n}^{(k)} \cdot \bar{n}^{(k)}|_{x_2=\phi^{(k)}(x_1)} \quad (11)$$

и определим функцию  $\phi^{(k+1)}$  как решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$(\phi^{(k+1)})'' = \frac{1}{2} H^{(k+1)} \sqrt{(1+(\phi^{(k+1)})'^2)^3}, \quad 0 < x_1 < l, \quad (12)$$

$$\phi^{(k+1)}(0) = a_{k+1}, \quad (\phi^{(k+1)})'(0) = b_{k+1}, \quad (13)$$

где числа  $a_{k+1}$  и  $b_{k+1}$  находятся из условия

$$\int_0^l \phi^{(k+1)}(x_1) dx_1 = V_0.$$

Запишем задачу (12), (13) в ином виде, принимая во внимание, что

$$\frac{\phi''}{(1+\phi'^2)^{3/2}} = \left( \frac{\phi'}{\sqrt{1+\phi'^2}} \right)'$$

Тогда уравнение (12) примет вид

$$\left( \frac{\phi'}{\sqrt{1+\phi'^2}} \right)' = \frac{1}{2} H.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\phi'}{\sqrt{1+\phi'^2}} = \frac{1}{2} \int_0^{x_1} H(t) dt. \quad (14)$$

При такой форме записи уравнения естественным является начальное условие

$$\phi'(0) = 0.$$

Так как модуль левой части (14) меньше 1, то для всех приближений непременно должно выполняться условие

$$\left| \int_0^{x_1} H(t) dt \right| < 2, \quad 0 < x_1 \leq l. \quad (15)$$

Уравнение (14) легко интегрируется в квадратурах. Обозначим через  $g(x_1)$  правую часть этого уравнения

$$g(x_1) = \frac{1}{2} \int_0^{x_1} H(t) dt$$

и выразим  $\phi'(x_1)$  через  $g(x_1)$

$$\phi'(x_1) = \frac{g(x_1)}{\sqrt{1-g(x_1)^2}}.$$

Отсюда получаем

$$\phi(x_1) = \int_0^{x_1} \frac{g(t)}{\sqrt{1-g(t)^2}} dt + \phi(0).$$

Константу  $\phi(0)$  определим из условия (5):

$$\phi(0) = \frac{1}{l} \left[ V_0 - \int_0^l \int_0^{x_1} \frac{g(t)}{\sqrt{1-g(t)^2}} dt dx_1 \right].$$

Итак, функцию  $\phi^{(k+1)}$  определяем следующим образом:

$$\begin{aligned} \phi^{(k+1)}(x_1) = & \int_0^{x_1} \frac{g^{(k+1)}(t)}{\sqrt{1-(g^{(k+1)}(t))^2}} dt + \\ & \frac{1}{l} \left[ V_0 - \int_0^l \int_0^{x_1} \frac{g^{(k+1)}(t)}{\sqrt{1-(g^{(k+1)}(t))^2}} dt dx_1 \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$g^{(k+1)}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t H^{(k+1)}(y) dy.$$

При этом должно выполняться условие

$$|g^{(k+1)}(t)| < 1, \quad 0 < t \leq l, \quad k \geq 0. \quad (17)$$

Напомним, что функция  $H^{(k+1)}$  определена формулой (11).

В качестве начального приближения может быть выбрано следующее:

$$\phi^{(0)} = \text{const} = \frac{V_0}{l}, \quad (18)$$

$(\bar{v}^{(0)}, p^{(0)})$  есть решение краевой задачи для системы Стокса

$$-\nu \Delta \bar{v}^{(0)} + \nabla p^{(0)} = \bar{f}, \quad \text{div } \bar{v}^{(0)} = 0, \quad x \in \Omega_0, \quad (19)$$

$$\bar{v}^{(0)}|_{x_1=0} = 0, \quad \bar{v}^{(0)}|_{x_1=l} = 0, \quad \bar{v}^{(0)}|_{x_2=0} = 0, \quad (20)$$

$$v_2^{(0)}|_{x_2=V_0/l} = 0, \quad S_{12}(\bar{v}^{(0)})|_{x_2=V_0/l} = 0, \quad (21)$$

$$\int_{\Omega^{(0)}} p^{(0)}(x) dx = 0. \quad (22)$$

Таким образом, основной этап решения задачи (1), (2), (3), (5) это решение краевой задачи в фиксированной области  $\Omega$

$$-\nu \Delta \bar{u} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} + \nabla q = \bar{f}, \quad \text{div } \bar{u} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (23)$$

$$\bar{u}|_{x_1=0} = 0, \quad \bar{u}|_{x_1=l} = 0, \quad \bar{u}|_{x_2=0} = 0, \quad (24)$$

$$\bar{u} \cdot \bar{n}|_{x_2=\phi(x_1)} = 0, \quad S(\bar{u}) \bar{n} \cdot \bar{\tau}|_{x_2=\phi(x_1)} = 0, \quad (25)$$

$$\int_{\Omega} q(x) dx = 0. \quad (26)$$

Здесь мы учли, что

$$T(\bar{u}, q) \bar{n} \cdot \bar{\tau} = \nu S(\bar{u}) \bar{n} \cdot \bar{\tau},$$

а конвективный член записан в виде

$$\sum_{i=1}^2 u_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \equiv (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u}.$$

Принципиально важно, что в этой задаче функция  $\phi(x_1)$ , а значит и линия  $\Gamma_2$  известны.

**3. Решение вспомогательной задачи в области с фиксированной границей.** Задачу (23), (24), (25), (26) также будем решать методом последовательных приближений, при котором каждое приближение есть решение краевой задачи для линейной системы Стокса. Пусть известно  $m$ -ое приближение  $(\bar{u}^{(m)}, q^{(m)})$ . Определим  $m+1$ -ое приближение  $(\bar{u}^{(m+1)}, q^{(m+1)})$  как решение задачи

$$-\nu \Delta \bar{u}^{(m+1)} + \nabla q^{(m+1)} = \bar{f} - (\bar{u}^{(m)} \cdot \nabla) \bar{u}^{(m)}, \quad \text{div } \bar{u}^{(m+1)} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (27)$$

$$\bar{u}^{(m+1)}|_{x_1=0} = 0, \quad \bar{u}^{(m+1)}|_{x_1=l} = 0, \quad \bar{u}^{(m+1)}|_{x_2=0} = 0, \quad (28)$$

$$\bar{u}^{(m+1)} \cdot \bar{n}|_{x_2=\phi(x_1)} = 0, \quad S(\bar{u}^{(m+1)})\bar{n} \cdot \bar{\tau}|_{x_2=\phi(x_1)} = 0, \quad (29)$$

$$\int_{\Omega} q^{(m+1)}(x) dx = 0. \quad (30)$$

В качестве начального приближения  $(\bar{u}^{(0)}, q^{(0)})$  возьмем решение следующей краевой задачи

$$-\nu \Delta \bar{u}^{(0)} + \nabla q^{(0)} = \bar{f}, \quad \operatorname{div} \bar{u}^{(0)} = 0, \quad x \in \Omega \quad (31)$$

$$\bar{u}^{(0)}|_{x_1=0} = 0, \quad \bar{u}^{(0)}|_{x_1=l} = 0, \quad \bar{u}^{(0)}|_{x_2=0} = 0, \quad (32)$$

$$\bar{u}^{(0)} \cdot \bar{n}|_{x_2=\phi(x_1)} = 0, \quad S(\bar{u}^{(0)})\bar{n} \cdot \bar{\tau}|_{x_2=\phi(x_1)} = 0. \quad (33)$$

$$\int_{\Omega} q^{(0)}(x) dx = 0. \quad (34)$$

Сходимость последовательности  $(\bar{u}^{(m)}, q^{(m)})$  к решению нелинейной задачи (23), (24), (25), (26) доказывается так же, как это сделано в [1] для первого краевого условия.

**3.1. Линейная вспомогательная задача.** Рассмотрим линейную задачу (27), (28), (29), (30) для неизвестных функций  $(\bar{w}, r)$  в фиксированной области  $\Omega$ . Введем обозначения:

$$\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$

$$\Gamma_1 = \{x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq \phi(0)\} \cup \{x_2 = 0, 0 \leq x_1 \leq l\} \cup \{x_1 = l, 0 \leq x_2 \leq \phi(l)\},$$

$$\Gamma_2 = \{x_2 = \phi(x_1), 0 \leq x_1 \leq l\},$$

$$\operatorname{div} T = \left\{ \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} \right\}_{i=1}^2.$$

Если  $\operatorname{div} \bar{w} = 0$ , то  $\operatorname{div} T(\bar{w}, r) = \nu \Delta \bar{w} - \nabla r$ . Тогда задачу (27), (28), (29), (30) можно записать в виде

$$-\operatorname{div} T(\bar{w}, r) = \bar{h}, \quad \operatorname{div} \bar{w} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (35)$$

$$\bar{w}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \bar{w} \cdot \bar{n}|_{\Gamma_2} = 0, \quad T(\bar{w}, r)\bar{n} \cdot \tau|_{\Gamma_2} = 0, \quad (36)$$

$$\int_{\Omega} r(x) dx = 0. \quad (37)$$

Имея в виду применить метод Галеркина для решения задачи (35), (36), выведем интегральное тождество для этой задачи. Пусть  $\bar{\eta}(x) = (\eta_1, \eta_2)$  — пробный вектор, требования к которому будут сформулированы в процессе вывода. Умножим уравнение (35) скалярно на  $\bar{\eta}$ , проинтегрируем по  $\Omega$  и проведем интегрирование по частям, учитывая краевые условия (36). Получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \bar{h} \cdot \bar{\eta} dx &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} T(\bar{w}, r) \cdot \bar{\eta} dx = - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \eta_i dx = \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} T_{ij} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} dx - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma} T_{ij} \eta_i n_j d\Gamma. \end{aligned} \quad (38)$$

Учитывая, что

$$T\bar{n} = \left\{ \sum_{j=1}^2 T_{ij} n_j \right\}_{i=1}^2 \quad \text{и} \quad T\bar{n} = (T\bar{n} \cdot \bar{n})\bar{n} + (T\bar{n} \cdot \bar{\tau})\bar{\tau},$$

преобразуем поверхностный интеграл в правой части (38).

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma} T_{ij} \eta_i n_j d\Gamma = \int_{\Gamma} T\bar{n} \cdot \bar{\eta} d\Gamma = \\ & = \int_{\Gamma_1} T\bar{n} \cdot \bar{\eta} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (T\bar{n} \cdot \bar{n})(\bar{n} \cdot \bar{\eta}) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (T\bar{n} \cdot \bar{\tau})(\bar{\tau} \cdot \bar{\eta}) d\Gamma. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы вектор  $\bar{\eta}$  удовлетворял краевым условиям

$$\bar{\eta}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \bar{\eta} \cdot \bar{n}|_{\Gamma_2} = 0. \quad (39)$$

Тогда из условий (36<sub>3</sub>) и (39) следует, что поверхностный интеграл в правой части (38) обращается в ноль.

Рассмотрим теперь объемный интеграл в правой части (38):

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} T_{ij} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} dx = \\ & = - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} r \delta_{ij} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} dx + \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \nu \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} dx = \\ & = - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} r \frac{\partial \eta_i}{\partial x_i} dx + \nu \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} dx = \\ & = - \int_{\Omega} r \operatorname{div} \bar{\eta} dx + \nu \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} dx. \end{aligned}$$

Из последнего тождества и условий (39) следует, что равенство (38) принимает вид

$$- \int_{\Omega} r \operatorname{div} \bar{\eta} dx + \nu \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} \bar{h} \cdot \bar{\eta} dx. \quad (40)$$

Умножим теперь уравнение (35<sub>2</sub>) на пробную функцию  $\zeta$  и проинтегрируем по  $\Omega$ . Получим

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \bar{w}) \zeta dx = 0. \quad (41)$$

Теперь мы можем дать определение обобщенного решения задачи (35), (36).

**Определение 1.** Обобщенным решением задачи (35), (36) называется пара  $(\bar{w}, r)$  такая, что:

1.  $\bar{w} \in W_2^1(\Omega)$ ,  $r \in L_2(\Omega)$ ,
2.  $\bar{w}$  удовлетворяет граничным условиям (36<sub>1</sub>) и (36<sub>2</sub>),

3. для любых вектор-функции  $\bar{\eta} \in W_2^1(\Omega)$ , удовлетворяющей условиям (39), и скалярной функции  $\zeta \in L_2(\Omega)$  выполняются интегральные тождества (40) и (41).

**4. Разбиение области с фиксированной границей.** Численное решение задачи (35), (36), (37) мы будем искать методом конечных элементов (МКЭ). Теория МКЭ для уравнений Стокса и Навье-Стокса с первым краевым условием ( $\bar{v}|_{\partial\Omega} = 0$ ) изложена в [6]. Обзор современного состояния МКЭ для уравнений Навье-Стокса приведен в [5]. Применение МКЭ к решению задачи о движении вязкой жидкости со свободной границей обсуждено в [7].

Определим узлы в области  $\Omega \cup \Gamma_2 = \{0 < x_1 < l, 0 < x_2 \leq \phi(x_1)\}$ . Для этого выберем натуральное число  $m_1 \geq 2$  и положим

$$h_1 = \frac{l}{m_1 + 1}.$$

$h_1$  это шаг по горизонтальной оси  $x_1$ . Пусть

$$l_2 > \max_{0 \leq x_1 \leq l} \phi(x_1).$$

Выберем теперь натуральное число  $m_2 \geq 3$  и положим

$$h_2 = \frac{l_2}{m_2 + 1}.$$

$h_2$  это шаг по вертикальной оси  $x_2$ . Точки

$$x_k = (x_{k1}, x_{k2}), \text{ где } x_{k1} = ih_1, x_{k2} = jh_2, \quad i = 1, \dots, m_1, j = 1, \dots, m_2,$$

для которых  $x_{k2} \leq \phi(x_{k1})$  назовем узлами. Из определения узлов следует, что все узлы лежат в области  $\Omega \cup \Gamma_2$ . Узел  $x_k$  называется внутренним узлом, если

$$\phi(x_1) > x_{k2} + h_2 \text{ для } x_1 \in [x_{k1} - h_1, x_{k1} + h_1].$$

Множество номеров  $k$  внутренних узлов обозначим через  $\mathcal{I}$ . Определим также множества узлов, прилежащих к нижней границе, прилежащих к левой границе, и прилежащих к правой границе. Множества номеров узлов из указанных подмножеств обозначим соответственно  $\mathcal{BB}, \mathcal{BL}, \mathcal{BR}$ . Обозначим  $\mathcal{IN} = \mathcal{I} \setminus (\mathcal{BB} \cup \mathcal{BL} \cup \mathcal{BR})$ .  $k \in \mathcal{BB}$ , если  $x_{k2} = h_2$ ;  $k \in \mathcal{BL}$ , если  $x_{k1} = h_1$ ;  $k \in \mathcal{BR}$ , если  $x_{k1} = m_1 h_1$ . Точки

$$x_k = (x_{k1}, x_{k2}), \text{ где } x_{k1} = ih_1, x_{k2} = jh_2, \quad i = 1, \dots, m_1, j = 2, \dots, m_2$$

назовем узлами, прилежащими к верхней границе, если  $x_{k2} \leq \phi(x_{k1})$  и существует точка  $x_1 \in [x_{k1} - h_1, x_{k1} + h_1]$ , для которой  $\phi(x_1) \leq x_{k2} + h_2$ . Множество номеров  $k$  узлов, прилежащих к верхней границе, обозначим через  $\mathcal{BT}$ .  $\mathcal{BB} \subset \mathcal{I}$ ,  $\mathcal{I} \cap \mathcal{BT} = \emptyset$ ,  $\mathcal{BT} \cap \mathcal{BL} \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{BT} \cap \mathcal{BR} \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{BB} \cap \mathcal{BL} \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{BB} \cap \mathcal{BR} \neq \emptyset$ .

Каждому узлу  $x_k$  сопоставим прямоугольник

$$\Omega_k = \{(i-1)h_1 \leq x_1 \leq (i+1)h_1, (j-1)h_2 \leq x_2 \leq (j+1)h_2\}.$$

Очевидно, что

$$\Omega \cup \Gamma_2 \subset \bigcup_{k \in \mathcal{I} \cup \mathcal{BT}} \Omega_k, \quad \Gamma_2 \subset \bigcup_{k \in \mathcal{BT}} \Omega_k.$$



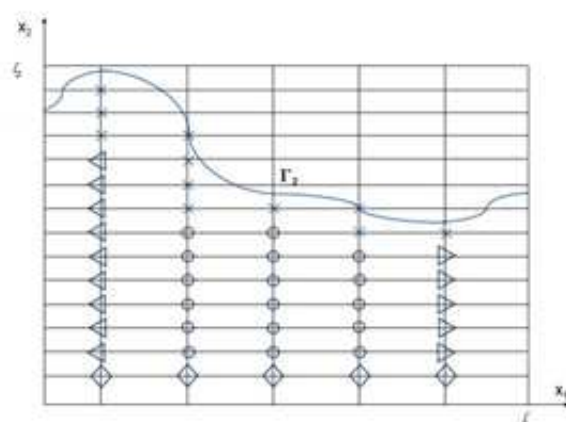


Рис. 2

На рисунке 2  $m_1 = 5, m_2 = 13$ , символом  $\triangleleft$  обозначаются узлы, чьи номера принадлежат  $\mathcal{BL} \setminus (\mathcal{BB} \cup \mathcal{BT})$ , символом  $\triangleright$  обозначаются узлы, чьи номера принадлежат  $\mathcal{BR} \setminus (\mathcal{BB} \cup \mathcal{BT})$ , символом  $\diamond$  обозначаются узлы, чьи номера принадлежат  $\mathcal{BB}$ , символом  $\times$  обозначаются узлы, прилежащие к верхней границе, символом  $\circ$  обозначаются строго внутренние узлы, не прилежащие ни к каким границам.

Зададим нумерацию узлов. Узлы с абсциссой  $x_1 = h_1$  имеют номера  $1, 2, \dots, N_1$ , где число  $N_1$  определяется из условий:  $N_1 h_2 \leq \phi(h_1), (N_1 + 1)h_2 > \phi(h_1)$ . Узлы с абсциссой  $x_1 = ih_1, i = 2, 3, \dots, m_1$  имеют номера

$$\sum_{s=1}^{i-1} N_s + 1, \sum_{s=1}^{i-1} N_s + 2, \dots, \sum_{s=1}^i N_s,$$

где число  $N_i$  определяется из условий:  $N_i h_2 \leq \phi(ih_1), (N_i + 1)h_2 > \phi(ih_1)$ . Таким образом, общее количество узлов

$$N = \sum_{s=1}^{m_1} N_s.$$

Обозначим через  $M_I$  количество элементов множества  $\mathcal{I}$ , а через  $M_B$  количество элементов множества  $\mathcal{BT}$ .  $M_I + M_B = N$ .

На рисунке 2  $N_1 = 13, N_2 = 11, N_3 = 8, N_4 = 8, N_5 = 7, N = 47$ . Множества  $\mathcal{BB}, \mathcal{BL}, \mathcal{BR}, \mathcal{BT}$  для этого примера суть следующие:

$$\mathcal{BB} = \{1, 14, 25, 33, 41\},$$

$$\mathcal{BL} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\},$$

$$\mathcal{BR} = \{41, 42, 43, 44, 45, 46, 47\},$$

$$\mathcal{BT} = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 24, 32, 39, 40, 47\}.$$

**5. Базисные функции, конечные элементы.** Каждому узлу  $x_k$  мы сопоставим две скалярные функции  $\psi_k(x_1, x_2)$  и  $\tilde{\psi}_k(x_1, x_2)$ , определенные во всей области  $\Omega$ . Эти функции мы определим так, чтобы их носители были сосредоточены в некоторой окрестности  $U_k$  узла  $x_k$ . Как правило, эти окрестности совпадают с множествами  $\Omega_k$ . Набор функций  $\{\psi_k\}_{k=1}^N$  используется для аппроксимации скорости, а набор функций  $\{\tilde{\psi}_k\}_{k=1}^N$  используется для аппроксимации давления. Совокупность узла  $x_k$ , множества  $U_k$  и функции  $\psi_k$  (или  $\tilde{\psi}_k$ ) называется конечным элементом.

Функции  $\psi_k$  и  $\tilde{\psi}_k$  совпадают, если узел  $x_k$  не примыкает к границе  $\Gamma_1 = \{x_1 = 0\} \cup \{x_1 = l\} \cup \{x_2 = 0\}$ , т.е. если  $k \in \mathcal{BL} \cup \mathcal{BB} \cup \mathcal{BR}$ .

**5.1. Функции  $\psi_k(x_1, x_2)$ .** Для всех узлов  $N$  положим

$$\psi_k(x_1, x_2) = \mu_k(x_1)\lambda_k(x_2),$$

$$\mu_k(x_1) = \begin{cases} 0, & x_1 \leq x_{k1} - h_1, \\ \frac{x_1 - x_{k1} + h_1}{h_1}, & x_{k1} - h_1 \leq x_1 \leq x_{k1}, \\ \frac{-x_1 + x_{k1} + h_1}{h_1}, & x_{k1} \leq x_1 \leq x_{k1} + h_1, \\ 0, & x_1 \geq x_{k1} + h_1, \end{cases}$$

$$\lambda_k(x_2) = \begin{cases} 0, & x_2 \leq x_{k2} - h_2, \\ \frac{x_2 - x_{k2} + h_2}{h_2}, & x_{k2} - h_2 \leq x_2 \leq x_{k2}, \\ \frac{-x_2 + x_{k2} + h_2}{h_2}, & x_{k2} \leq x_2 \leq x_{k2} + h_2, \\ 0, & x_2 \geq x_{k2} + h_2. \end{cases}$$

Отметим, что все функции  $\psi_k$  обращаются в ноль на границе  $\Gamma_1$ .

**5.2. Функции  $\tilde{\psi}_k(x_1, x_2)$ .** Определим теперь функции  $\tilde{\psi}_k$  для номеров  $k \in \mathcal{BL} \cup \mathcal{BB} \cup \mathcal{BR}$ , при которых  $\psi_k$  не совпадает с  $\tilde{\psi}_k$ . Это прежде всего номера узлов, лежащих на нижней горизонтали с номером  $j = 1$ , т.е.

$$k = 1, \quad k = \sum_{s=1}^{i-1} N_s + 1, \quad i = 2, 3, \dots, m_1.$$

Для  $k = 1$  положим

$$\tilde{\psi}_1(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2h_1 - x_1}{2h_1} \frac{2h_2 - x_2}{2h_2}, & 0 \leq x_1 \leq 2h_1, \quad 0 \leq x_2 \leq 2h_2, \\ 0, & x_1 \geq 2h_1 \text{ или } x_2 \geq 2h_2. \end{cases}$$

Для

$$k = \sum_{s=1}^{i-1} N_s + 1, \quad i = 2, 3, \dots, m_1 - 1$$

ПОЛОЖИМ

$$\tilde{\mu}_k(x_1) = \begin{cases} \frac{x_1 - (i-1)h_1}{h_1}, & (i-1)h_1 \leq x_1 \leq ih_1, \\ \frac{-x_1 + (i+1)h_1}{h_1}, & ih_1 \leq x_1 \leq (i+1)h_1, \\ 0, & x_1 \leq (i-1)h_1 \text{ или } x_1 \geq (i+1)h_1, \end{cases}$$

$$\tilde{\lambda}_k(x_2) = \begin{cases} \frac{2h_2 - x_2}{2h_2}, & 0 \leq x_2 \leq 2h_2, \\ 0, & x_2 \geq 2h_2, \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}_k(x_1, x_2) = \tilde{\mu}_k(x_1)\tilde{\lambda}_k(x_2).$$

Для правого нижнего узла с номером  $k = N - N_{m_1} + 1$  положим

$$\tilde{\mu}_k(x_1) = \begin{cases} \frac{x_1 - (m_1-1)h_1}{2h_1}, & (m_1-1)h_1 \leq x_1 \leq (m_1+1)h_1, \\ 0, & x_1 \leq (m_1-1)h_1, \end{cases}$$

$$\tilde{\lambda}_k(x_2) = \begin{cases} \frac{-x_2 + 2h_2}{2h_2}, & 0 \leq x_2 \leq 2h_2, \\ 0, & x_2 \geq 2h_2, \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}_k(x_1, x_2) = \tilde{\mu}_{m_1}(x_1)\tilde{\lambda}_{m_1}(x_2).$$

Узлы, лежащие на левой вертикали с абсциссой  $x_1 = h_1$ , имеют номера  $\{1, 2, \dots, N_1\} = \mathcal{V}\mathcal{L}$ . Функция  $\tilde{\psi}_1$  уже определена. Зададим теперь функции  $\tilde{\psi}_k$  для  $k = 2, 3, \dots, N_1$ .

$$\tilde{\mu}_k(x_1) = \begin{cases} \frac{2h_1 - x_1}{2h_1}, & 0 \leq x_1 \leq 2h_1, \\ 0, & x_1 \geq 2h_1, \end{cases}$$

$$\tilde{\lambda}_k(x_2) = \begin{cases} \frac{x_2 - (k-1)h_2}{h_2}, & (k-1)h_2 \leq x_2 \leq kh_2, \\ \frac{-x_2 + (k+1)h_2}{h_2}, & kh_2 \leq x_2 \leq (k+1)h_2, \\ 0, & x_2 \leq (k-1)h_2 \text{ или } x_2 \geq (k+1)h_2, \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}_k(x_1, x_2) = \tilde{\mu}_k(x_1)\tilde{\lambda}_k(x_2).$$

Рассмотрим теперь узлы, лежащие на крайней правой вертикали, имеющей номер  $i = m_1$ . Номера этих узлов составляют множество  $\mathcal{B}\mathcal{R}$  и  $x_{k_1} = m_1 h_1$ . Для

узла с номером  $k = N - N_{m1} + 1$  функция  $\tilde{\psi}_k$  уже определена. Определим теперь функции  $\tilde{\psi}_k$  для  $k = N - N_{m1} + j$  при  $j = 2, 3, \dots, N_1$ .

$$\tilde{\mu}_k(x_1) = \begin{cases} \frac{x_1 - (m_1 - 1)h_1}{2h_1}, & (m_1 - 1)h_1 \leq x_1 \leq (m_1 + 1)h_1, \\ 0, & x_1 < (m_1 - 1)h_1, \end{cases}$$

$$\tilde{\lambda}_k(x_2) = \begin{cases} \frac{x_2 - (j - 1)h_2}{h_2}, & (j - 1)h_2 \leq x_2 \leq jh_2, \\ \frac{-x_2 + (j + 1)h_2}{h_2}, & jh_2 \leq x_2 \leq (j + 1)h_2, \\ 0, & x_2 < (j - 1)h_2 \text{ или } x_2 > (j + 1)h_2, \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}_k(x_1, x_2) = \tilde{\mu}_k(x_1)\tilde{\lambda}_k(x_2).$$

**6. Приближенное решение линейной вспомогательной задачи.** Приближение скорости будем искать в виде линейной комбинации базисных векторов, а приближение давления – в виде линейной комбинации базисных функций  $\tilde{\psi}_k$ .

Определим базисные векторы, соответствующие каждому из  $N$  узлов. Для внутренних узлов с номерами из множества  $\mathcal{I}$  положим

$$\bar{u}_k^1 = (\psi_k, 0), \quad \bar{u}_k^2 = (0, \psi_k).$$

Эти векторы обращаются в ноль на всей границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ .

Для узлов, прилежащих к верхней границе, с номерами из множества  $\mathcal{BT}$  положим

$$\bar{u}_k(x_1, x_2) = \psi_k(x_1, x_2)\bar{\tau}(x_1),$$

где  $\bar{\tau}(x_1)$  – вектор, касательный к линии  $\Gamma_2$ . Ясно, что при таком выборе базисных векторов  $\bar{u}_k$

$$\bar{u}_k \cdot \bar{n}|_{\Gamma_2} = 0, \quad k \in \mathcal{BT}. \quad (42)$$

Векторы  $\bar{u}_k^1$  и  $\bar{u}_k^2$  также удовлетворяют условию (42). Так как все функции  $\psi_k$  обращаются в ноль на  $\Gamma_1$ , то

$$\bar{u}_k|_{\Gamma_1} = 0 \quad \text{для } k \in \mathcal{BT}.$$

Приближение скорости будем искать в виде

$$\bar{w}^N = \sum_{k \in \mathcal{I}} [a_{k1}\bar{u}_k^1 + a_{k2}\bar{u}_k^2] + \sum_{k \in \mathcal{BT}} b_k \bar{u}_k, \quad (43)$$

а приближение давления – в виде

$$r^N = \sum_{k=1}^N c_k \tilde{\psi}_k, \quad (44)$$

где коэффициенты  $a_{k1}$ ,  $a_{k2}$ ,  $b_k$ ,  $c_k$  подлежат определению. Отметим сразу, что вектор-функция  $\bar{w}^N$  удовлетворяет граничным условиям (36<sub>1</sub>) и (36<sub>2</sub>).

Подставим  $\bar{w}^N$  и  $r^N$  в интегральные тождества (40) и (41), взяв в качестве пробных вектор-функций в тождестве (40)  $\bar{u}_k^1, \bar{u}_k^2$  при  $k \in \mathcal{I}$  и  $\bar{u}_k$  при  $k \in \mathcal{BT}$ , а в качестве пробных функций в тождестве (41) – функции  $\tilde{\psi}_k, k = 1, \dots, N$ . Такой выбор возможен, так как функции  $\bar{u}_k^1, \bar{u}_k^2, \bar{u}_k$  удовлетворяют условиям (39). Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} r^N \operatorname{div} \bar{u}_k^\alpha dx + \nu \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w_i^N}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j^N}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_{ki}^\alpha}{\partial x_j} dx &= \int_{\Omega} \bar{h} \cdot \bar{u}_k^\alpha dx, \\ &\alpha = 1, 2, k \in \mathcal{I} \\ - \int_{\Omega} r^N \operatorname{div} \bar{u}_k dx + \nu \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w_i^N}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j^N}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_{ki}}{\partial x_j} dx &= \int_{\Omega} \bar{h} \cdot \bar{u}_k dx, \quad (45) \\ &k \in \mathcal{BT} \\ \int_{\Omega} (\operatorname{div} \bar{w}^N) \tilde{\psi}_t dx &= 0, \quad t = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

(45) есть система  $2M_I + M_B + N = 2N + M_I$  линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $a_{k1}, a_{k2}, b_k, c_k$ . Решив эту систему, подставим найденные коэффициенты  $a_{k1}, a_{k2}, b_k, c_k$  в формулы (43) и (44) и получим приближения к решению задачи (35), (36).

**Заключение.** В статье предложен метод численного решения задачи об установившемся двумерном течении вязкой несжимаемой жидкости, частично заполняющей сосуд с прямоугольным поперечным сечением. Метод основан на результатах о разрешимости основных задач гидродинамики, полученных в [1, 2, 3, 4]. Методом конечных элементов численно решается только вторая краевая задача для линейной системы Стокса.

### Список литературы

- [1] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
- [2] Пухначев В.В. Плоская стационарная задача со свободной границей для уравнений Навье-Стокса. // Журнал прикладной механики и техн. физики. 1972. № 3, с. 91–102.
- [3] Солонников В.А. Разрешимость задачи о плоском движении тяжелой вязкой несжимаемой капиллярной жидкости, частично заполняющей некоторый сосуд. // Известия АН СССР. 1979. Т. 43, с. 203–236.
- [4] Солонников В.А. Разрешимость трехмерной задачи со свободной границей для стационарной системы уравнений Навье-Стокса. // Записки научных семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР. 1979. Т. 84, с. 252–284.
- [5] Шайдуров В.В. Вычислительные методы для уравнений Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости. // Вестник Красноярского гос. университета. Серия «Физ.-мат. науки». 2004. № 3, с. 143–153.

- [6] Girault V., Raviart P.-A. Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms. — Berlin: Springer Verlag, 1986.
- [7] Peterson R.C., Jimack P.K., Kelmanson M.A. The solution of two-dimensional free-surface problems using automatic mesh generation. // International Journ. Num. Meth. Fluids. 1999. V. 31, pp. 937–960.