УДК 539.3

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ОБ ОБРАЗОВАНИИ КОНЦЕНТРАТОРА НАПРЯЖЕНИЙ В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАГРУЖЕННОМ ВЯЗКОУПРУГОМ ТЕЛЕ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Людский В.А.
Кафедра вычислительной математики

Поступила в редакцию 3.04.2007, после переработки 15.06.2007.

В статье рассматривается решение задач теории наложения больших деформаций для тел конечных размеров и алгоритм решения линеаризованной задачи.

The method of stress analysis is presented for the problem of loaded ending size bodies with interacting holes is considered under finite deformations. The problem is formulated and solved using the theory of superimposed large deformations.

Ключевые слова: теория упругости, большие деформации, линеаризованная задача.
Keywords: theory of elasticity, superimposed large deformations, linear problem.

Введение. В рамках нелинейной вязкоупругости представляют интерес задачи о поэтапном нагружении тел при больших деформациях. Постановки и решения этих задач могут быть получены на основе теории наложения больших упругих и вязкоупругих деформаций. Эта теория была применена к решению ряда квазистатических плоских и осесимметричных задач о концентрации напряжений около отверстий, образованных в предварительно нагруженном теле [1]. Ранее такие задачи были решены только для бесконечно протяженных тел, поэтому решение подобных задач для тел конечных размеров ново и представляет отдельный интерес. В данной статье предлагается развитие подхода, использованного для бесконечно протяженных тел на случай, когда тело имеет конечные размеры [5].

1. Постановка задачи. Постановка задачи осуществляется с помощью теории многократного наложения больших деформаций [1]. Пусть тело из вязкоупругого материала под действием внешних сил приобрело к моменту времени t_1 начальные большие плоские деформации. Далее в теле образуется отверстие. Используется следующая упрощенная модель, описывающая образование отверстия: в момент времени t_1 намечается некоторый контур, и часть тела, ограниченная им, удаляется, а действие извлеченной части на оставшуюся заменяется по принципу освобождаемости от связей силами, действующими по вновь образованной граничной поверхности. При этом внутренние напряжения переходят в разряд внешних сил.

Далее (в тот же момент времени t_1) эти силы мгновенно изменяются до нуля, считается, что это не вызывает деформирования тела в динамическом режиме. И тело, приобретая (теряя) дополнительные большие деформации, переходит в следующее промежуточное состояние.

Затем, в некоторый момент времени t_2, когда в теле, благодаря вязкоупругим процессам, происходящим в материале тела, накоплены дополнительные большие деформации, в нем образуется подобным образом второе отверстие. Форма каждого отверстия известна в момент его образования, то есть форма первого отверстия задана в первом промежуточном состоянии (в момент времени t_1), а второго – во втором промежуточном состоянии в момент времени t_2.

Основные обозначения:

τ_k — момент образования k-го отверстия;

$\overset{k}{\nabla}$ — градиент в базисе k-го состояния;

∇ — градиент в базисе того состояния, в координатах которого решается задача;

$f^{(i)}(t)$— вектор «фиктивных» массовых сил для i-го приближения в момент времени t;

$Q_j^{(i)}(t)$— вектор «фиктивных» поверхностных сил на контуре j-го отверстия для i-го приближения в момент времени t;

$\overset{k}{\underset{i}{\gamma}}$-го отверстия в k-м состоянии, $\overset{k}{\underset{i}{N}}$ — нормаль к $\overset{k}{\underset{i}{\gamma}}$.

Через $\sigma(t)$ обозначим тензор полных истинных напряжений в момент времени t, $\sigma^{(i)}(t)$ — поправка от учета эффектов $(i+1)$-го порядка для тензора $\sigma(t)$.

Через $\Psi(\tau, t)$ обозначим аффинор деформаций, накопленных в течение промежутка времени от τ до t, $\Psi^{(i)}(\tau, t)$ — поправка от учета эффектов $(i{+}1)$-го порядка для тензора $\Psi(\tau, t)$.

Тензорная мера $G(t)$, характеризующая полные деформации, накопленные в момент времени t (соответствует мере Грина):

$$G(t) = \Psi(0, t) \cdot \Psi^*(0, t), \tag{1}$$

где $*$ — знак транспонирования.

Тензор $\overset{k}{\sum}(\mathrm{t})$ обобщенных полных (в момент времени t) напряжений, относящихся к базису k-го состояния:

$$\overset{k}{\sum}(\mathrm{t}) = [\det\Psi(0,\mathrm{t})]^{-1}\, \Psi^*(\tau_{\mathrm{k}}^-, \mathrm{t}) \cdot \sigma(t) \cdot \Psi(\tau_{\mathrm{k}}^-, \mathrm{t}) \tag{2}$$

Через $u(t)$ обозначим вектор перемещений относительно начального состояния в момент времени t, $u^{(i)}(t)$— поправка от учета эффектов $(i{+}1)$-го порядка для вектора перемещений $u(t)$.

Поскольку в моменты времени τ_i перемещения меняются скачкообразно, условимся обозначать через $u(\tau_i^-)$ предел $u(t)$при $t{-}{>}\tau_i$ слева, а через $u(\tau_i^+)$- предел $u(t)$при $t{-}{>}\tau_i$ справа. Учитывая, что тело находится в i-м состоянии в момент времени τ_i перед образованием i-го отверстия, вектор перемещений из (i-1)-го в $i-e$состояние может быть определен по формуле $u_i = u(\tau_i^-) - u(\tau_{i-1}^-)$. Аналогичные обозначения будем использовать и для других величин. Рассмотрим постановку и решение задачи об образовании k-го отверстия в координатах k-го состояния.

Основные уравнения (в случае плоской деформации)

Уравнение несжимаемости может быть записано в виде:

$$\det \Psi(0,t) = 1 \tag{3}$$

Граничные условия могут быть представлены в виде ($j = 1, \ldots, k$, где $j = 1$ соответствует внешнему контуру, остальные — контурам отверстий):

$$\overset{k}{N}_j \cdot \overset{k}{\sum}(\mathrm{t}) \Bigg|_{\substack{k\\ \gamma_j}} = -P\,\overset{k}{N}_j \cdot \left[\Psi^*(\tau_k^-, t)\right]^{-1} \cdot \left[\Psi(\tau_k^-, t)\right]^{-1} (t \geq \tau_j) \tag{4}$$

Геометрические соотношения имеют вид:

$$\Psi(0,t) = \Psi(0,\tau_k^-) \cdot \Psi(\tau_k^-, t) \tag{5}$$

$$\Psi(\tau_k^-, t) = I + \overset{k}{\nabla}\mathrm{u}(\mathrm{t}) - \overset{k}{\nabla}\mathrm{u}(\tau_k^-), \tag{6}$$

где

$$\Psi(0,\tau_k^-) = \left[I - \overset{k}{\nabla}\mathrm{u}(\tau_k^-)\right]^{-1} \tag{7}$$

Уравнение равновесия и определяющие соотношения [4] могут быть представлены в виде:

$$\overset{k}{\nabla} \cdot \left\{ \left[\Psi^*(\tau_k^-, t)\right]^{-1} \cdot \sigma(t) \right\} = 0 \tag{8}$$

$$\sigma(t) = \Psi^*(0,t) \cdot \overline{\mu} \left[I - \frac{1}{3} \left[G(t) : I\right] \left[G(t)\right]^{-1} \right] \cdot \Psi(0,t) - p(t) I \tag{9}$$

2. Постановка задачи в приближениях. Для решения задачи использован метод последовательных приближений. В качестве параметра q выбрано отношение p/μ_0.

Решение задачи отыскивается в перемещениях в виде рядов для перемещений и давления:

$$u(t) = u^{(0)} + u^{(1)} + \ldots, \quad u^{(i)} \sim q^{i-1} \tag{10}$$

$$p(t) = p^{(0)} + p^{(1)} + \ldots, \quad p^{(i)} \sim q^{i-1} \tag{11}$$

Постановка задачи в приближениях в общем виде для первого и второго приближений (верхний индекс в круглых скобках справа от символа означает номер приближения, запись граничных условий включает уравнения как для контура каждого отверстия, так и для внешнего контура):

Линеаризованное уравнение равновесия (в приближениях)

$$\nabla \cdot L_3 \left[u^{(i)}(t), p^{(i)}(t)\right] = f^{(i)}(t), \tag{12}$$

Линеаризованное условие несжимаемости (в приближениях)

$$\nabla \cdot u^{(i)} = H^{(i)}(t), \tag{13}$$

Линеаризованное граничное условие (j = 1,...k, где j = 1 соответствует внешнему контуру, остальные - контурам отверстий)

$$N_j \cdot L_3 \left[u^{(i)}(t), p^{(i)}(t)\right] |_{\gamma_j} = Q_j^{(i)}(t), \quad (t \geq \tau_j, j = 1, ..., k), \tag{14}$$

где [1]

$$H^{(1)}(t) = -\tilde{\Psi}^{(1)}(0,t) : I + \frac{1}{2}\left[\Psi^{(0)}(0,t) : \Psi^{(0)}(0,t)\right], \tag{15}$$

$$\tilde{\Psi}^{(1)}(0,t) = \tilde{\Psi}^{(1)}(0,\tau_k^-) + \tilde{\Psi}^{(0)}(0,\tau_k^-) \cdot \tilde{\Psi}^{(0)}(\tau_k^-, t), \tag{16}$$

$$Q_j^{(1)}(t) = -\left\{N_j \cdot \sum^{k}{}^{(1)}\ (t) - PN_j \cdot \left[\Psi^{(0)}(\tau_k^-, t) + \Psi^{(0)*}(\tau_k^-, t)\right]\ \right\} |_{\gamma_j}, (t \geq \tau_j) \tag{17}$$

$$f^{(0)}(t) = 0 \tag{18}$$

$$Q_j^{(0)}(t) = -PN_j (j = 1, ..., k) \tag{19}$$

$u^{(o)}(t)$ и $p^{(o)}(t)$ могут быть предствлены в виде:

$$u^{(o)}(t) = C_{0,0}(t)U^{(0,0)} + C_{0,1}(t)U^{(0,1)} + ...C_{0,k}(t)U^{(0,k)}, \tag{20}$$

$$p^{(o)}(t) = D_{0,0}(t)P^{(0,0)} + D_{0,1}(t)P^{(0,1)} + ...D_{0,k}(t)P^{(0,k)}, \tag{21}$$

где $U^{(0,j)}$, $P^{(0,j)}$ - решения краевых задач, имеющие вид:

Для $j = 1$

$$\nabla \cdot \mathrm{L}^* \left[\mathrm{U}^{(0,1)}, P^{(0,1)}\right] = 0 \tag{22}$$

$$\nabla \cdot \mathrm{U}^{(0,1)} = 0 \tag{23}$$

$$N_1 \cdot L^* \left[\mathrm{U}^{(0,1)}, P^{(0,1)}\right] |_{\gamma 1} = -N_1 \cdot \left\{L^* \left[\mathrm{U}^{(0,0)}, P^{(0,0)}\right] + PI\right\} |_{\gamma 1} \tag{24}$$

где

$$L^* \left[\mathrm{U}, P\right] = \mu_0 \left[(\nabla U + U\nabla) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot U)I\right] - PI. \tag{25}$$

(21)-(25) представляют собой частный случай линеаризованной упругой задачи для несжимаемого материала.

Для $j \geq 2$

$$\nabla \cdot \mathrm{L}^* \left[\mathrm{U}^{(0,\mathrm{j})}, P^{(0,j)}\right] = 0 \tag{26}$$

$$\nabla \cdot \mathrm{U}^{(0,\mathrm{j})} = 0 \tag{27}$$

$$N_i \cdot L^* \left[\mathrm{U}^{(0,\mathrm{j})}, P^{(0,\mathrm{j})}\right] \Big|_{\gamma\mathrm{i}} = 0 \ \ (\mathrm{l} = 1, \ldots . \mathrm{j} \text{ - } 1) \tag{28}$$

$$N_j \cdot L^* \left[\mathrm{U}^{(0,\mathrm{j})}, P^{(0,\mathrm{j})}\right] \Big|_{\gamma\mathrm{i}} = -N_j \left\{ \sum_{v=0}^{\mathrm{j} - 1} L^* \left[U^{(0,v)},\ P^{(0,v)}\right] + PI \right\} \Big|_{\gamma\mathrm{j}} . \tag{29}$$

Уравнения (26)-(29) представляют собой частный случай линеаризованной упругой задачи для несжимаемого материала.

Итак, решение задачи (12)-(14) для нулевого приближения может быть сведено к решению конечного числа линеаризованных упругих задач с постоянными (не зависящими от времени) коэффициентами. После того, как эти задачи решены, окончательное решение может быть получено по формулам (21)-(29) для нулевого приближения. Подобным образом может быть построено решение и для приближений более высокого порядка.

3. Алгоритм решения линеаризованной задачи теории упругости. Соотношения для несжимаемых материалов (в случае плоской деформации):

$$\nabla \cdot L_2[u, p] = f, \tag{30}$$

$$\nabla \cdot u = h \tag{31}$$

$$N \cdot L_2[u, p]\,|_{\Gamma} = \mathrm{Q}, \tag{32}$$

$$N \cdot L_2[u, p]\,|_{\Gamma_{\text{ВН}}} = \mathrm{Q}_{\text{ВН}}, \tag{33}$$

где индекс «вн» означает внешнюю границу тела, и

$$L_2[u, p] = \mu(1 - \beta)(\nabla \cdot u)I + \mu(\nabla u - u\nabla) - pI \tag{34}$$

Обозначим через T_I, T_{II} следующие комбинации компонент (в декартовой системе координат) некоторого тензора второго ранга:

$$T_{\mathrm{I}} = T_{11} + T_{22} + i(T_{21} - T_{21})$$
$$T_{\mathrm{II}} = T_{11} - T_{22} + i(T_{12} + T_{21})$$

С учетом приведенных обозначений уравнения и граничные условия линеаризованной задачи могут быть записаны в комплексной форме следующим образом (используется метод Колосова-Мусхелишвили [3]):

$$\frac{\partial \mathrm{S}_{\mathrm{II}}}{\partial z} + \frac{\partial S_I}{\partial \bar{z}} = 2F \tag{35}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathrm{z}} + \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \bar{z}} = H \tag{36}$$

$$\mathrm{NS}_{\mathrm{I}} + \overline{\mathrm{N}}\mathrm{S}_{\mathrm{II}}\,|\Gamma = 2\mathrm{Q}\,|\Gamma \tag{37}$$

$$\mathrm{NS_I} + \overline{\mathrm{N}}\mathrm{S_{II}} \mid \Gamma_{\text{вн}} = 2\mathrm{Q} \mid \Gamma_{\text{вн}}. \tag{38}$$

$$\mathrm{S_I} = 2\mu(2-\beta)\left(\frac{\partial\omega}{\partial \mathrm{z}} + \frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{z}}\right) - 2p, \mathrm{S_{II}} = 4\mu\left(\frac{\partial\omega}{\partial\overline{z}}\right) \tag{39}$$

Решение линеаризованной краевой задачи отыскивается в виде:

$$\begin{aligned} &\omega = \omega_H + \omega_{\text{ОДН}},\ p = p_H + p_{\text{ОДН}}, \\ &\mathrm{S} = S_H + S_{\text{ОДН}}, \end{aligned} \tag{40}$$

где ω_H, p_H, S_H - некоторое частное решение линеаризованной задачи, $\omega_{\text{ОДН}}$, $p_{\text{ОДН}}$, $S_{\text{ОДН}}$- решение линеаризованной задачи для однородной системы уравнений.

В случае плоской деформации несжимаемого материала частное решение может быть найдено по формулам:

$$p_H = \mu(3-\beta)H - \frac{1}{2}\left(\int F d\overline{z} + \int \overline{F} dz\right) \tag{41}$$

$$\omega_H = \frac{1}{4\mu}\left(\iint F dz d\overline{z} - \iint \overline{F} dz dz\right) + \frac{1}{2}\int H dz \tag{42}$$

$$S_{I_H} = 2\mu(2-\beta)H - 2p_H, S_{II_H} = 4\mu\frac{\partial\omega_H}{\partial\overline{z}} \tag{43}$$

Рассмотрим теперь решение линеаризованной краевой задачи для однородной системы уравнений. Это решение может быть найдено с помощью комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили $\Phi(z), \Psi(z)$ [3], которые являются аналитическими функциями комплексной переменной z в области, занимаемой телом, и определяются из граничных условий соответствующей краевой задачи. Выражения для напряжений через комплексные потенциалы имеют вид:

$$S_{I_{\text{ОДН}}} = 2\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right],\ S_{II_{\text{ОДН}}} = -2\left[\overline{\Psi(z)} + z\overline{\Phi'(z)}\right] \tag{44}$$

Комплексный вектор перемещений выражается через комплексные потенциалы следующим образом:

$$\omega_{\text{ОДН}} = \frac{1}{2G}\left[\int \Phi(z)dz - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\int \Psi(z)dz}\right], \tag{45}$$

Также:

$$p_{\text{ОДН}} = -\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right], \tag{46}$$

Граничные условия представляются в виде:

$$N(z)\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right] - \overline{N(z)}\left[\overline{\Psi(z)} + \overline{z\Phi'(z)}\right]\Gamma_{\text{вн}} = Q_{\text{вн}} \tag{47}$$

Вектор поверхностной силы на $\Gamma_{\text{ВН}}$:

$$F_{\mathrm{x}} + iF_y = (F_{\mathrm{n}} + iF_t)N, F_{\mathrm{n}} + iF_t = \bar{N}(F_{\mathrm{x}} + iF_y) \tag{48}$$

$$F_{\text{n}} + iF_t = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \overline{N^2(z)}\left[\overline{\Psi(z)} + \overline{z\Phi^{/}(z)}\right]\Gamma_{\text{вн}} \tag{49}$$

$$F_{\text{n}} + iF_t = \Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} - \frac{1}{\sigma^2\omega^{/}(\sigma)}\left[\overline{\omega^{/}(\sigma)\Psi(\sigma)} + \omega(\sigma)\overline{\Phi^{/}(\sigma)}\right] \tag{50}$$

где $z = \omega(\zeta) = c_1\zeta + c_2\zeta^2 + ...$ - функция, определяющая конформное отображение.

Комплексные потенциалы $\Phi(z), \Psi(z)$ находятся из выражений:

$$w^{/}(\zeta)\Phi(\zeta) + p_n^{/}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{F(\theta)}{\sigma-\zeta}d\sigma \tag{51}$$

$$w^{/}(\zeta)\Psi(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2}(\bar{w}^{/}(\frac{1}{\zeta})\Phi(\zeta) - \zeta^2\,\bar{w}(\frac{1}{\zeta})\Phi^{/}(\zeta) - \bar{p}_n^{/}(\frac{1}{\zeta})) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\bar{F}(\theta)}{\sigma^2(\sigma-\zeta)}d\sigma, \tag{3.22}$$

где $p_n^{/}(\zeta)$ - голоморфная часть функции $w(\zeta)\,\bar{\Phi}(\frac{1}{\zeta})$,

$$F(\theta) = (F_{\text{n}} + iF_t)\omega^{/}(\sigma),\ \bar{F}(\theta) = (F_{\text{n}} - iF_t)\,\bar{\omega}^{/}(\frac{1}{\sigma}) \tag{52}$$

Заключение. Таким образом, изложенный подход, основанный на методе малого параметра и на методе Колосова-Мусхелишвили, позволяет решать задачи теории наложения больших вязкоупругих деформаций для тел конечных размеров.

Список литературы

[1] Левин В.А. Зингерман К.М. Плоские задачи теории многократного наложения больших деформаций. Методы решения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

[2] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.

[3] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1953.

[4] Адамов А.А. Об идентефикации модели наследственной вязкоупругости при конечных деформациях. Структурная механика неоднородных сред. Свердловск, 1982, С. 8-11.

[5] Зингерман К. М., Людский В. А. О постановке и алгоритме решения задач теории наложения больших вязкоупругих деформаций для тел конечных размеров // Современные проблемы пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела. Тверь, 2006. – С. 38.