УДК 621.37.1:519.21

О СУЩЕСТВОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ УСЛОВИЯМ НА КОРРЕЛЯЦИОННУЮ ФУНКЦИЮ. СЛУЧАЙ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Бобышев В.Н.*, **Лавров А.М.****

*ТвГУ, кафедра математической статистики и эконометрики

**Рязанский государственный радиотехнический университет

Поступила в редакцию 17.04.2007, после переработки 20.05.2007.

Найдены три семейства стационарных в широком смысле непрерывных случайных процессов с нулевым мат. ожиданием, для которых кинетическое уравнение со второй производной по времени в левой части получается из соответствующего уравнения с первой производной (уравнения Павулы) дифференцированием по времени.

Three sets of stationary in the wide sence continuous stochastic process with zero average of distribution are found. The kinetic equation with a second derivative with respect to time in left hand side for these sets results from a corresponding equation with first derivative (Pavul's equation) by differentiation on a time.

Ключевые слова: непрерывные случайные процессы, кинетическое уравнение, уравнение Павулы.
Keywords: continuous stochastic process, the kinetic equation, Pavul's equation.

В связи с выводом новых кинетических уравнений [1, 2] возникает ряд проблем для исследования, и первая среди них — такая: не является ли простейшее из них – уравнение со второй производной по времени в левой части [2]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (B_n w) -$$

следствием уравнения Павулы [1]

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (A_n w) ,$$

полученным из него дифференцированием по t?

Оказалось, что во всех рассмотренных ранее моделях стационарных случайных процессов (гауссовский процесс [3], рэлеевский процесс [4], процесс с пироновскими плотностями [5] и др.) это имеет место тогда и только тогда, когда порождающая нормированная корреляционная функция (сокращенно – н.к.ф.) $r(\tau)$ рассматриваемого процесса удовлетворяет соотношению

$$r''(+0) = [r'(+0)]^2. \tag{1}$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что для н.к.ф.

$$r(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \quad (\lambda > 0), \tag{2}$$

соответствующей Марковскому гауссовскому случайному процессу, условие (1) выполняется.

Оказалось также, что ни одна из н.к.ф. распространённых моделей радиотехнических сообщений, помимо (3) (см., например, обширный список корреляционных функций в [6, 7] и др.), условию (1) не удовлетворяет. Проведённые ранее исследования [8] показали также, что условию (1) не будет удовлетворять ни одна из н.к.ф. вида

$$r(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|} + be^{-\beta|\tau|} \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \tag{3}$$

В то же время н.к.ф.

$$r(\tau) = e^{-|\tau|} - 3e^{-2|\tau|} + 3e^{-3|\tau|} \tag{4}$$

удовлетворяет соотношению (1), в чем легко убедиться непосредственно. Поэтому возникает задача нахождения по возможности более широкого класса н.к.ф., для которых выполняется условие (1). В работе [9] эта задача решена для функций вида

$$r(\tau) = ae^{-\lambda|\tau|} + be^{-2\lambda|\tau|} + ce^{-3\lambda|\tau|}. \tag{5}$$

В данной работе рассматриваются функции вида

$$r(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|} + be^{-\beta|\tau|} + ce^{-\gamma|\tau|}, \tag{6}$$

где для определенности $0 < \alpha < \beta < \gamma$.

Функции (3) - (7) входят в это семейство как частный случай.

Заметим, что автокорреляционные функции вида

$$r(\tau) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\alpha_k|\tau|} \quad (\alpha_k > 0)$$

представляют особый интерес, например, применительно к медленно изменяющимся случайным процессам, описывающим самооптимизирующиеся регуляторы, как линейные, так и нелинейные [10].

Напомним, что корреляционная функция $R(\tau)$ произвольного вещественного *стационарного* непрерывного случайного процесса $\xi(t)$ с нулевым мат. ожиданием определяется формулой

$$R(\tau) = M[\xi(t+\tau) \cdot \xi(t)]$$

и обладает рядом фундаментальных свойств, среди которых отметим неотрицательность её преобразования Фурье:

$$\forall\omega \in R \quad F\left[R\left(\tau\right)\right]\left(\omega\right) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} R\left(\tau\right)\; e^{-i\omega\tau}\, d\tau \geq 0.$$

Это свойство является характеристическим для класса всех корреляционных функций: если какая-нибудь функция $R\left(\tau\right)$ обладает этим свойством, то существует стационарный в широком смысле случайный процесс, для которого она будет являться корреляционной.

Тем самым поставленная задача свелась к следующей: найти функцию $r\left(\tau\right)$ вида (6), обладающую такими свойствами:
a) $r\left(0\right) = 1$,
b) $r''\left(+0\right) = \left[r'\left(+0\right)\right]^{\,2}$,
c) $\forall\omega \in R \quad F\left[r\left(\tau\right)\right]\;\left(\omega\right) \geq 0$.

Условие нормировки 0 дает

$$a + b + c = 1\,, \tag{7}$$

а так как при $\tau > 0 \quad r\left(\tau\right) = a\, e^{-\alpha\tau} + b\, e^{-\beta\tau} + c\, e^{-\gamma\tau}$, то $r'(+0) \;=\; -(\alpha\; a \;+\beta\; b \;+ \gamma\; c)$; $\quad r''(+0) \;=\; \alpha^2 a \;+\; \beta^2 b \;+\; \gamma^2 c$ и условие $r''\;(+0) \;= [r'(+0)]^2$ переходит в

$$(\alpha a \;+\beta b \;+\; \gamma c)^2 \;=\; \alpha^2 a \;+\beta^2 b \;+\; \gamma^2 c. \tag{8}$$

Далее рассмотрим три случая, выражая из соотношения (8) последовательно a, b или c.

1. Подставляя в (8) $a = 1 - b - c$ и раскрывая скобки, получаем

$$(\beta - \alpha)^2 (b^2 - b) + (\gamma - \alpha)^2 (c^2 - c) + 2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) bc = 0. \tag{9}$$

Далее можно пойти еще двумя путями

1.1. Запишем соотношение (9) как квадратный трехчлен относительно переменной c:

$$(\gamma - \alpha)^2 c^2 - (\gamma - \alpha)\left[(\gamma - \alpha) - 2b(\beta - \alpha)\right]\, c - (\beta - \alpha)^2 (b - b^2) = 0.$$

Дискриминант этого квадратного трехчлена

$$D_{c/b} = (\gamma - \alpha)^2 \left[(\gamma - \alpha)^2 - 4b(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)\right];$$

условие неотрицательности дискриминанта дает

$$b \leq \frac{(\gamma - \alpha)^2}{4(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)}.$$

Если

$$b = b_{\max} = \frac{(\gamma - \alpha)^2}{4(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)}, \tag{10}$$

то $D_{c/b} = 0$ и $c = \frac{(\gamma - \alpha)[(\gamma - \alpha) - 2b_{\max}(\beta - \alpha)]}{2(\gamma - \alpha)^2}$, откуда

$$c = \frac{\gamma + \alpha - 2\beta}{4(\gamma - \beta)}; \tag{11}$$

$$a = 1 - b_{\max} - c = \frac{2\beta - \alpha - \gamma}{4(\beta - \alpha)} \tag{12}$$

Вычислим далее преобразование Фурье функции

$$r(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|} + be^{-\beta|\tau|} + ce^{-\gamma|\tau|}$$

и найдём условия его неотрицательности в терминах величин α, β, γ.

Так как при $\lambda > 0$

$$F\left[e^{-\lambda|\tau|}\right](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|\tau| - i\omega\tau} d\tau = \frac{2\lambda}{\omega^2 + \lambda^2},$$

то

$$F[r(\tau)](\omega) = a\frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} + b\frac{2\beta}{\omega^2 + \beta^2} + c\frac{2\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} = \frac{2(A\omega^4 + B\omega^2 + C)}{(\omega^2 + \alpha^2)(\omega^2 + \beta^2)(\omega^2 + \gamma^2)},$$

где

$$A = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

$$B = \alpha\left(\beta^2 + \gamma^2\right)a + \beta\left(\alpha^2 + \gamma^2\right)b + \gamma\left(\alpha^2 + \beta^2\right)c, \tag{13}$$

$$C = \alpha\beta\gamma\,(\beta\gamma a + \alpha\gamma b + \alpha\beta c);$$

в терминах коэффициентов A, B, C необходимые и достаточные условия неотрицательности функции $F\left[r(\tau)\right](\omega)$ выглядят так [9]:

$$(A \geq 0)\,\&\,(C \geq 0)\,\&\left[(B \geq 0) \vee \left(B^2 - 4AC \leq 0\right)\right]. \tag{14}$$

Исследуем условие (14) при найденных значениях a (12), b (10) и c (11).

В соответствии с (13) имеем:

$$A = \alpha\frac{2\beta - \alpha - \gamma}{4(\beta - \alpha)} + \beta\frac{(\gamma - \alpha)^2}{4(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)} + \gamma\frac{\gamma + \alpha - 2\beta}{4(\gamma - \beta)} = \frac{\alpha + \gamma}{2} > 0;$$

$$B = \alpha(\beta^2 + \gamma^2)\frac{2\beta - \alpha - \gamma}{4(\beta - \alpha)} + \beta(\alpha^2 + \gamma^2)\,\frac{(\gamma - \alpha)^2}{4(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)} +$$

$$+\gamma\,\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\,\frac{\gamma + \alpha - 2\beta}{4(\gamma - \beta)} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[2\,(\alpha + \gamma)\beta^2 + (\gamma - \alpha)^2\beta + (\gamma + \alpha)(\gamma^2 + \alpha^2)\right] > 0;$$

$$C = \alpha\beta\gamma \left[\beta\gamma\frac{2\beta-\alpha-\gamma}{4(\beta-\alpha)} + \alpha\gamma\frac{(\gamma-\alpha)^2}{4(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)} + \alpha\beta\frac{\gamma+\alpha-2\beta}{4(\gamma-\beta)}\right] =$$

$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{4}\left(2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma - \alpha^2 - \gamma^2\right);$$

условие $C \geq 0$ дает

$$\gamma^2 - 2(\alpha+\beta)\gamma - 2\alpha\beta + \alpha^2 \leq 0 \qquad (15)$$

Корни квадратного трехчлена в левой части (15) (относительно переменной γ)

$$\gamma_{1,2} = \alpha + \beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\beta}$$

следовательно, (15) эквивалентно

$$\alpha + \beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\beta} \leq \gamma \leq \alpha + \beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\beta}$$

а так как

$$\alpha + \beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\beta} < \beta,$$

то, задав произвольно $0 < \alpha < \beta$ и выбрав $\gamma \in \left(\beta;\ \ \alpha + \beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\beta}\right]$, получим $C \geq 0$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Любая функция вида

$$r(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|} + be^{-\beta|\tau|} + ce^{-\gamma|\tau|}$$

с коэффициентами a (12), b (10) и c (11), т.е. функция

$$r(\tau) = \frac{2\beta-\alpha-\gamma}{4(\beta-\alpha)}e^{-\alpha|\tau|} + \frac{(\gamma-\alpha)^2}{4(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)}e^{-\beta|\tau|} + \frac{\gamma+\alpha-2\beta}{4(\gamma-\beta)}e^{-\gamma|\tau|}$$

при любых $0 < \alpha < \beta$ и $\gamma \in \left(\beta;\ \ \alpha + \beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\beta}\right]$ является н.к.ф. некоторого стационарного в широком смысле непрерывного случайного процесса, удовлетворяющего дополнительному условию

$$r''(+0) = \left[r'(+0)\right]^2.$$

В частности, при $\alpha = \lambda/2$, $\beta = \lambda$ и $\gamma = 3\lambda/2$ получаем: $a = c = 0$, $b = 1$ и $r(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}$.

1.2. Запишем левую часть (9) как квадратный трехчлен относительно переменной b:

$$(\beta-\alpha)^2 b^2 - (\beta-\alpha)\left[(\beta-\alpha) - 2c(\gamma-\alpha)\right] b - (\gamma-\alpha)^2(c - c^2) = 0.$$

Дискриминант этого квадратного трехчлена

$$D_{b/c} = (\beta-\alpha)^2\left[(\beta-\alpha)^2 + 4c(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\right];$$

условие неотрицательности дискриминанта дает

$$c \geq -\frac{(\beta-\alpha)^2}{4(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

Если

$$c = c_{\min} = -\frac{(\beta-\alpha)^2}{4(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}, \tag{16}$$

то $b = \frac{(\beta-\alpha)[\beta-\alpha-2c_{\min}(\gamma-\alpha)]}{2(\beta-\alpha)^2}$, откуда

$$b = \frac{2\gamma-\beta-\alpha}{4(\gamma-\beta)}; \tag{17}$$

$$a = 1 - b - c_{\min} = \frac{2\gamma-\alpha-\beta}{4(\gamma-\alpha)}. \tag{18}$$

Исследуем условие (14) при найденных значениях a (18), b (17) и c (16).

В соответствии с (13) имеем:

$$A = \alpha\frac{2\gamma-\alpha-\beta}{4(\gamma-\alpha)} + \beta\frac{2\gamma-\beta-\alpha}{4(\gamma-\beta)} - \gamma\frac{(\beta-\alpha)^2}{4(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} = \frac{\alpha+\beta}{2} > 0;$$

$$B = \alpha(\beta^2+\gamma^2)\cdot\frac{2\gamma-\alpha-\beta}{4(\gamma-\alpha)} + \beta(\alpha^2+\gamma^2)\cdot\frac{2\gamma-\beta-\alpha}{4(\gamma-\beta)} -$$

$$-\gamma(\alpha^2+\beta^2)\cdot\frac{(\beta-\alpha)^2}{4(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[2\,(\alpha+\beta)\gamma^2 + (\beta-\alpha)^2\gamma + (\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)\right] > 0;$$

$$C = \alpha\beta\gamma\left[\beta\gamma\cdot\frac{2\gamma-\alpha-\beta}{4(\gamma-\alpha)} + \alpha\gamma\frac{2\gamma-\beta-\alpha}{4(\gamma-\beta)} - \alpha\beta\cdot\frac{(\beta-\alpha)^2}{4(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)}\right] =$$

$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{4}\left[\alpha(2\gamma-\alpha) + \beta(2\gamma-\beta) + 2\alpha\beta\right] > 0.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Любая функция вида

$$r\,(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|} + be^{-\beta|\tau|} + ce^{-\gamma|\tau|}$$

с коэффициентами a (18), b (17) и c (16), т.е. функция

$$r\,(\tau) = \frac{2\gamma-\alpha-\beta}{4(\gamma-\alpha)}e^{-\alpha|\tau|} + \frac{2\gamma-\beta-\alpha}{4(\gamma-\beta)}e^{-\beta|\tau|} - \frac{(\beta-\alpha)^2}{4(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}e^{-\gamma|\tau|}$$

при любых $0 < \alpha < \beta < \gamma$ является н.к.ф. некоторого стационарного в широком смысле непрерывного случайного процесса, удовлетворяющего дополнительному условию

$$r''(+0) = \left[r'(+0)\right]^2.$$

В частности, при $\alpha = \lambda$, $\beta = 2\lambda$ и $\gamma = 3\lambda$ получаем $a = \frac{3}{8}$, $b = \frac{3}{4}$, $c = -\frac{1}{8}$ и

$$r(\tau) = \frac{3}{8}e^{-\lambda|\tau|} + \frac{3}{4}e^{-2\lambda|\tau|} - \frac{1}{8}e^{-3\lambda|\tau|}.$$

2. Подставляя в (8) $b = 1 - a - c$и раскрывая скобки, получаем

$$(\beta-\alpha)^2(a^2-a) + (\gamma-\beta)^2(c^2-c) - 2(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)ac = 0 \tag{19}$$

2.1. Запишем левую часть (19) как квадратный трехчлен относительно переменной c:

$$(\gamma-\beta)^2c^2 - (\gamma-\beta)\left[2a(\beta-\alpha) + (\gamma-\beta)\right] c - (\beta-\alpha)^2(a-a^2) = 0$$

Дискриминант этого квадратного трехчлена

$$D_{c/a} = (\gamma-\beta)^2\left[(\gamma-\beta)^2 + 4a(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\right];$$

условие неотрицательности дискриминанта дает

$$a \geq -\frac{(\gamma-\beta)^2}{4(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}.$$

Если

$$a = a_{\min} = -\frac{(\gamma-\beta)^2}{4(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}, \tag{20}$$

то $D_{c/a} = 0$ и $c = \frac{(\gamma-\beta)[2a_{\min}(\beta-\alpha)+(\gamma-\alpha)]}{2(\gamma-\beta)^2}$, откуда

$$c = \frac{\gamma+\beta-2\alpha}{4(\gamma-\beta)}; \tag{21}$$

$$b = 1 - a_{\min} - c = \frac{\gamma+\beta-2\alpha}{4(\beta-\alpha)} \tag{22}$$

Исследуем условие (14) при найденных значениях a (20), b (22) и c (21).

В соответствии с (13) имеем:

$$A = -\alpha\frac{(\gamma-\beta)^2}{4(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \beta\frac{\gamma+\beta-2\alpha}{4(\beta-\alpha)} + \gamma\frac{\gamma+\beta-2\alpha}{4(\gamma-\beta)} = \frac{\beta+\gamma}{2} > 0;$$

$$B = -\alpha\left(\beta^2+\gamma^2\right)\frac{(\gamma-\beta)^2}{4(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \beta(\alpha^2+\gamma^2)\,\frac{\gamma+\beta-2\alpha}{4(\beta-\alpha)} +$$

$$+\gamma\,\left(\alpha^2+\beta^2\right)\,\frac{\gamma+\beta-2\alpha}{4(\gamma-\beta)} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[2\,(\alpha+\gamma)\beta^2 + (\gamma-\alpha)^2\beta + (\gamma+\alpha)(\gamma^2+\alpha^2)\right] > 0;$$

$$C = \alpha\beta\gamma\ \left[-\beta\gamma\frac{(\gamma-\beta)^2}{4(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} \quad + \alpha\gamma\frac{\gamma+\beta-2\alpha}{4(\beta-\alpha)} + \alpha\beta\frac{\gamma+\beta-2\alpha}{4(\gamma-\beta)}\right] =$$

$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{4}\left(2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma - \beta^2 - \gamma^2\right);$$

условие $C \geq 0$ дает

$$\gamma^2 - 2(\alpha+\beta)\gamma - 2\alpha\beta + \alpha^2 \leq 0. \tag{23}$$

Корни квадратного трехчлена в левой части (23) (относительно переменной γ)

$$\gamma_{1,2} = \alpha + \beta \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha\beta},$$

следовательно, (23) эквивалентно

$$\alpha + \beta - \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha\beta} \leq \gamma \leq \alpha + \beta + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha\beta},$$

а так как

$$\alpha + \beta - \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha\beta} < \beta,$$

то, задав произвольно $0 < \alpha < \beta$ и выбрав $\gamma \in \left(\beta;\ \ \alpha + \beta + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha\beta}\right]$, получим $C \geq 0$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3. Любая функция вида

$$r\,(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|} + be^{-\beta|\tau|} + ce^{-\gamma|\tau|}$$

с коэффициентами a (20), b (22) и c (21), т.е. функция

$$r\,(\tau) = -\frac{(\gamma-\beta)^2}{4(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}e^{-\alpha|\tau|} + \frac{\gamma+\beta-2\alpha}{4(\beta-\alpha)}e^{-\beta|\tau|} + \frac{\gamma+\beta-2\alpha}{4(\gamma-\beta)}e^{-\gamma|\tau|}$$

при любых $0 < \alpha < \beta$ и $\gamma \in \left(\beta;\ \ \alpha + \beta + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha\beta}\right]$ является н.к.ф. некоторого стационарного в широком смысле непрерывного случайного процесса, удовлетворяющего дополнительному условию

$$r''\,(+0) = \left[r'\,(+0)\right]^2.$$

В частности, при $\alpha = \lambda$, $\beta = 2\lambda$ и $\gamma = 3\lambda$ получаем $a = -\frac{1}{8}$, $b = \frac{3}{4}$, $c = \frac{3}{8}$ и

$$r\,(\tau) = -\frac{1}{8}e^{-\lambda|\tau|} + \frac{3}{4}e^{-2\lambda|\tau|} + \frac{3}{8}e^{-3\lambda|\tau|}.$$

2.2. Запишем левую часть (19) как квадратный трехчлен относительно переменной a:

$$(\beta-\alpha)^2a^2-(\beta-\alpha)\left[(\beta-\alpha)+2c(\gamma-\beta)\right]a-(\gamma-\beta)^2(c-c^2)=0.$$

Дискриминант этого квадратного трехчлена

$$D_{a/c}=(\beta-\alpha)^2\left[(\beta-\alpha)^2+4c(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\right];$$

условие неотрицательности дискриминанта дает

$$c\geq-\frac{(\beta-\alpha)^2}{4(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

Если $c=c_{\min}=-\frac{(\beta-\alpha)^2}{4(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$, то $D_{a/c}=0$ и $a=\frac{(\beta-\alpha)[(\beta-\alpha)+2c_{\min}(\gamma-\beta)]}{2(\beta-\alpha)^2}=\frac{2\gamma-\beta-\alpha}{4(\gamma-\beta)}$;

$$b=1-a-c_{\min}=\frac{2\gamma-\alpha-\beta}{4(\gamma-\beta)},$$

а этот случай разработан выше в п.1.2.

3. Подставляя в (8) $c=1-a-b$ и раскрывая скобки, получаем

$$(\gamma-\alpha)^2(a^2-a)+(\gamma-\beta)^2(b^2-b)++2(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)ab=0 \tag{24}$$

3.1. Запишем соотношение (24) как квадратный трехчлен относительно переменной a:

$$(\gamma-\alpha)^2a^2-(\gamma-\alpha)\left[(\gamma-\alpha)-2b(\beta-\alpha)\right]c-(\gamma-\beta)^2(b-b^2)=0.$$

Дискриминант этого квадратного трехчлена

$$D_{a/b}=(\gamma-\alpha)^2\left[(\gamma-\alpha)^2-4b(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)\right];$$

условие неотрицательности дискриминанта дает

$$b\leq\frac{(\gamma-\alpha)^2}{4(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

Если $b=b_{\max}=\frac{(\gamma-\alpha)^2}{4(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)}$, то $D_{a/b}=0$ и $a=\frac{(\gamma-\alpha)[(\gamma-\alpha)-2b_{\max}(\gamma-\beta)]}{2(\gamma-\alpha)^2}=\frac{2\beta-\alpha-\gamma}{4(\beta-\alpha)}$; $c=1-a-b_{\max}=\frac{\gamma+\alpha-2\beta}{4(\gamma-\beta)}$, а этот случай разобран выше в п. 1.1.

3.2. Запишем левую часть (24) как квадратный трехчлен относительно переменной b:

$$(\gamma-\beta)^2b^2-(\gamma-\beta)\left[(\beta-\alpha)-2a(\gamma-\alpha)\right]b-(\gamma-\alpha)^2(a-a^2)=0.$$

Дискриминант этого квадратного трехчлена

$$D_{b/a}=(\gamma-\beta)^2\left[(\gamma-\beta)^2+4a(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)\right];$$

условие неотрицательности дискриминанта дает

$$a\geq-\frac{(\gamma-\beta)^2}{4(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}.$$

Если $a = a_{\min} = -\frac{(\gamma-\beta)^2}{4(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}$, то $b = \frac{(\gamma-\beta)[(\gamma-\beta)-2a_{\min}(\gamma-\alpha)]}{2(\gamma-\beta)^2} = \frac{\gamma+\beta-2\alpha}{4(\beta-\alpha)}$;

$$c = 1 - a_{\min} - b = \frac{\gamma+\beta-2\alpha}{4(\gamma-\alpha)},$$

а этот случай разработан выше в п.2.1.

Вывод. Найдены три семейства нормированных корреляционных функций, для которых выполняется условие $r''(+0) = [r'(+0)]^2$, выражающее связь между кинетическим уравнением со второй производной по времени в левой части и соответствующим уравнением с первой производной (уравнением Павулы) через дифференцирование. Случай, когда один из коэффициентов a, b, c в формуле (6) принимает экстремальное значение, исследован полностью.

Список литературы

[1] Pawula R.F. Generalizations and Extensions of Fokker-Plank-Kolmogorov Equations // IEEE Trans. On Information Theory. 1967. V. IT-13. № 1. P. 33 - 41.

[2] Казаков В.А. Кинетические уравнения для плотностей вероятности немарковских процессов. Эволюция моментных и кумулянтных функций // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. № 11. С. 1309 - 1320.

[3] Казаков В.А., Лавров А.М. О связи между кинетическими уравнениями различных видов // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36. № 10. С. 944 - 948.

[4] Лавров А.М. Связь между кинетическими уравнениями различных видов для рэлеевского процесса // Вестник РГРТА. Вып. 3. Рязань, 1997. С. 28 - 32.

[5] Казаков В.А., Лавров А.М. Кинетические уравнения для немарковских процессов с пирсоновскими распределениями // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38. № 7. С. 695 - 704.

[6] Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Радио и связь. 1982. 624 с.

[7] Тихонов В.И., Хименко В.И. Выбросы траекторий случайных процессов. М.: Наука. 1987. 304 с.

[8] Гришина В.В., Лавров А.М. Исследование условия, определяющего связь между кинетическими уравнениями первого и второго порядка по времени через дифференцирование // Математические методы в научных исследованиях. Сб. научных трудов. Рязань, РГРТА, 2004. С. 44 – 51.

[9] Лавров А.М. О существовании стационарных случайных процессов, удовлетворяющих дополнительным условиям определенного типа // Вестник РГРТА. Вып. 16. Рязань, 2005. С. 19 - 23.

[10] Прасад Т., Синха В.П. Цифровой метод исследования случайных процессов в нелинейных системах // Труды II Международного конгресса ИФАК (Швейцария). Оптимальные системы. Статистические методы. М.: Наука, 1965. с. 357 – 367.