МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

УДК 519.834

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ КОАЛИЦИЙ В КООПЕРАТИВНЫХ ИГРАХ

Колесник Г.В.
Кафедра системного и экономико-математического анализа

Поступила в редакцию 12.03.2007, после переработки 28.05.2007.

Исследуется расширение классической постановки кооперативной игры, отражающее наличие неопределенности в результатах переговоров по формированию коалиций между игроками. Для такой задачи сформулированы понятия ядра и значения, установлена их связь со сбалансированностью исходной кооперативной игры.

The extension of the classic coalitional game is considered which reflects a priori uncertainty in the results of the negotiations among the players. For this problem the concepts of the core and the value are formulated and their connection with the balancedness of the original game is studied.

Ключевые слова: кооперативная игра, коалиция, неопределенность, переговоры, коалиционная структура, ядро, значение игры.
Keywords: cooperative game, coalition, uncertainty, negotiations, coalitional structure, core, game value.

Введение. Одним из предположений задачи кооперативной теории игр в классической постановке является возможность формирования в исследуемой системе любой коалиции на множестве игроков.

Однако, в реальности имеются различные препятствия для возникновения произвольных коалиций. Функционирование любой коалиции требует координации деятельности ее участников, что влечет дополнительные издержки. Для коалиций большого размера данные издержки могут быть чересчур высокими [5], что приводит к снижению вероятности их возникновения по сравнению с коалициями меньшего размера.

Частично проблема учета в кооперативной игре препятствий для формирования коалиций решается рассмотрением постановок игр с различного рода запретами на их образование, например, игр с априорно заданной организационной структурой [1 – 4]. Однако данные постановки соответствуют ситуациям, когда часть коалиций в системе не может образовываться в принципе. В то же время, наличие неопределенности при образовании коалиций в данных постановках не исследуется.

В настоящей работе рассматривается расширение классической постановки кооперативной игры, отражающее наличие неопределенности в результатах переговоров по формированию коалиций между игроками. Для такой задачи сформулированы понятия ядра и значения, а также исследована их связь со сбалансированностью исходной кооперативной игры.

1. Модель. Рассмотрим кооперативную игру $\Gamma = <N, v>$, где N – множество игроков, $v : 2^N \to R$ — характеристическая функция игры. Будем предполагать, что в результате переговоров участников игры будет возникать некоторая коалиционная структура B, т.е. разбиение множества игроков N на непересекающиеся подмножества (коалиции). Обозначим множество всех возможных коалиционных структур игроков из множества K через B_K. При этом исход переговоров является случайной величиной на множестве коалиционных структур, вероятность возникновения структуры $B \in \mathrm{B}_K$ в результате переговоров игроков из K обозначим через $p(B \mid K)$.

Тройку $\Gamma_p = <N, v, p>$ будем называть кооперативной игрой с неопределенностью. Такая постановка задачи отражает наличие априорной неопределенности относительно коалиций, которые будут образованы в результате переговоров игроков. В этом случае, формируя свои стратегии поведения, игроки уже не смогут ориентироваться на гарантированные выигрыши коалиций $v(K)$, а только лишь на ожидаемый выигрыш, который может быть определен как

$$u(K) = E\{\sum_{R\in B} v(R), B \in B_K\} = \sum_{B\in B_K} p(B|K) \sum_{R\in B} v(R). \tag{1}$$

Если задано априорное распределение $p(B \mid K)$, то вероятность того, что в процессе переговоров участников из K образуется некоторая коалиция S, может быть определена как

$$q(S|K) = \sum_{\substack{B \in B_K \\ B \ni S}} p(B|K).$$

Отметим свойство, которому должна удовлетворять вероятность $q(S \mid K)$:

$$\forall K \subseteq N \quad \forall i \in K \qquad \sum_{\substack{S \subseteq K \\ S \ni i}} q(S|K) = 1.$$

Используя данную вероятность, ожидаемый выигрыш коалиции можно записать в виде

$$u(K) = \sum_{B\in B_K} p(B|K) \sum_{R\in B} v(R) = \sum_{S\subseteq K} q(S|K)v(S). \tag{2}$$

Изучим, каким образом изменится понятие ядра в такой постановке игры. Как известно, ядро кооперативной игры представляет собой принцип оптимальности, основанный на устойчивости предлагаемого распределения выигрыша к отклонениям подмножеств участников. В условиях неопределенности ожидаемые выигрыши участников при отклонении будут изменяться, в связи с чем изменится и ядро игры.

Действительно, предположим, что участники тотальной коалиции N договариваются о некотором распределении выигрыша x. Любое подмножество участников K может принять решение о выходе из коалиции. Однако в этом случае выигрыш отделившегося подмножества участников будет определяться результатом новых переговоров, в результате которых не обязательно появится коалиция K, а может быть сформирована некоторая коалиционная структура на множестве K.

Учитывая это, условия выгодности выхода подмножества K из тотальной коалиции запишется следующим образом

$$u(K) > \sum_{i \in K} x_i.$$

Ядром игры с неопределенностью **C** будем называть множество распределений выигрыша x, отклонение от которых не выгодно никакому подмножеству участников:

$$x \in \mathbf{C} \Leftrightarrow \forall K \subset N \quad u(K) \leq \sum_{i \in K} x_i. \tag{3}$$

Отметим, что в классической постановке кооперативной игры предполагается, что после отделения коалиция K не распадается и получает свой выигрыш $v(K)$, то есть вероятность образования коалиционных структур в игре имеет вид

$$p(B|K) = \begin{cases} 1, & B = \{K\}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что для этой ситуации сформулированное выше определение совпадает со стандартным определением ядра кооперативной игры.

Естественно предположить, что уменьшение возможностей по получению выигрыша в результате отделения приведет к тому, что подмножества участников будут менее требовательны по отношению к получаемому выигрышу. В связи с этим ядро в играх с неопределенностью будет существовать для более широкого класса условий, нежели в классическом случае.

Определим необходимые и достаточные условия существования ядра в этой задаче. Сопоставим игре с неопределенностью $\Gamma_p = <N, v, p>$ коалиционную игру $\mathrm{G} = <N, g>$, характеристическая функция которой определяется как

$$g(K) = \begin{cases} u(K), & K \subset N, \\ v(N), & K = N. \end{cases}$$

Воспользуемся необходимыми и достаточными условиями существования ядра в кооперативной игре G [6]: для любого сбалансированного покрытия $\lambda = \{\lambda_K\}_{K \subset N}$ выполнено

$$\sum_{K \subset N} \lambda_K g(K) \leq g(N). \tag{5}$$

Пользуясь определением функции g и выражением (2) для ожидаемого выигрыша коалиций, данное условие можно переписать в виде

$$\sum_{K \subset N} \lambda_K \sum_{S \subseteq K} q(S|K) v(S) \leq v(N),$$

что после преобразований дает

$$\sum_{S\subset N} v(S) \sum_{K\supseteq S} \lambda_K q(S|K) \le v(N).$$

Обозначая

$$\mu_S = \sum_{K\supseteq S} \lambda_K q(S|K), \tag{6}$$

окончательно получим

$$\sum_{S\subset N} \mu_S v(S) \le v(N). \tag{7}$$

Нетрудно показать, что набор $\mu = \{\mu_S\}_{S\subset N}$ также представляет собой сбалансированное покрытие множества N. Таким образом, общий вид условий существования ядра в игре при наличии неопределенности сохраняется, изменяется лишь количество ограничений, которым должна удовлетворять характеристическая функция: неравенства (7) должны выполняться не для произвольных сбалансированных покрытий, а лишь для покрытий, удовлетворяющих условиям (6) для некоторого λ.

Сокращение количества накладываемых на характеристическую функцию игры условий приводит к тому, что класс игр, имеющих непустое ядро, расширяется. В частности, любая кооперативная игра, имеющая непустое ядро, также будет иметь непустое ядро при наличии неопределенности.

Рассмотрим ситуацию, в которой затруднено образование нетривиальных коалиций. Она может быть формализована следующим образом. Обозначим через $<K>$ коалиционную структуру на множестве K, состоящую из тривиальных (одноэлементных) коалиций. Тогда величина $p(<K>|K)$ представляет собой вероятность ситуации, в которой игрокам из K не удается договориться об образовании какой бы то ни было коалиции.

Справедливо следующее утверждение. Для любой существенной кооперативной игры v ядро соответствующей игры с неопределенностью непусто при $p(<K>|K) \to 1\ \forall\ K$.

Действительно, пусть $M = \max\{\sum_{R\in B} v(R) \quad | \ \forall B \in \mathrm{B}_K \quad \forall K \subseteq N\}$. Тогда

$$u(K) = \sum_{B\in B_K} p(B|K) \sum_{R\in B} v(R) \le p(< K >|K) \sum_{i\in K} v(\{i\}) + (1-p(< K >|K))M.$$

При $p(<K>|K) \to 1$ первое слагаемое стремится к $\sum_{i\in K} v(\{i\})$, второе слагаемое стремится к 0. Тогда левая часть условий (5) запишется как

$$\sum_{K\subset N} \lambda_K u(K) \to \sum_{K\subset N} \lambda_K \sum_{i\in K} v(\{i\}) = \sum_{K\subset N} \sum_{i\in K} \lambda_K v(\{i\}) = \sum_{i\in N} v(\{i\}) \sum_{\substack{K\subset N\\ K\ni i}} \lambda_K = \sum_{i\in N} v(\{i\}),$$

и из существенности игры следует выполнение (5).

Отметим, что в предельном случае, когда $\forall\ Kp(<K>\ |K) = 1$, ядро будет совпадать с множеством дележей в рассматриваемой игре.

Таким образом, при уменьшении вероятности формирования нетривиальных коалиций участники переговоров о распределении выигрыша будут более охотно идти на компромисс, что приводит к возникновению непустого ядра в соответствующей кооперативной игре.

Заметим, что приведенное утверждение не накладывает на игру никаких требований, кроме существенности. В частности, даже если тотальная коалиция неэффективна, достаточно жесткие условия для объединения могут препятствовать образованию более эффективных коалиционных структур.

В качестве примера рассмотрим следующую ситуацию: две страны, обозначим их R и U, ведут переговоры о вступлении в торговый блок W. Характеристическая функция соответствующей коалиционной игры трех лиц, описывающая экономические выгоды, которые получат стороны от объединения, представлена в следующей таблице.

Коалиция, K	**Выгоды, $v(K)$**
$\{i\}$, $i = R, U, W$	0
$\{RW\}$, $\{UW\}$	0,6
$\{RU\}$	1
N	0,8

Данная игра не является супераддитивной, в связи с чем образование тотальной коалиции в ней не выгодно. Эффективной в данном случае будет являться коалиционная структура $\{\{RU\}, \{W\}\}$.

Теперь предположим, что формирование коалиции стран $\{UR\}$ по каким-то причинам (например, политическим), затруднено. То есть, в результате переговоров участников любого подмножества $K \quad \neq \{UR\}$, априорная вероятность $p(\{K\}|\ K) = 1$, тогда как $p(\{\{UR\}\}|\ \{UR\ \}) = \alpha < 1$, $p(\{\{U\}, \{R\}\}|\ \{UR\ \}) = 1 - \alpha$.

В этом случае коэффициенты μ_S, соответствующие сбалансированному покрытию λ в необходимом и достаточном условии существования ядра в игре с неопределенностью (7), будут иметь вид, представленный в приведенной ниже таблице.

Коалиция, S	**Коэффициент, μ_S**
$\{R\}$	$\lambda_R + (1 - \alpha)\lambda_{UR}$
$\{U\}$	$\lambda_U + (1 - \alpha)\lambda_{UR}$
$\{W\}$	λ_W
$\{RU\}$	$\alpha\lambda_{UR}$
$\{RW\}$	λ_{RW}
$\{UW\}$	λ_{UW}

Для соответствующей кооперативной игры трех лиц G необходимым и достаточным условием существования ядра является неравенство

$$g(\{RW\}) + g(\{UW\}) + g(\{UR\}) \leq 2g(N), \tag{8}$$

соответствующее сбалансированному покрытию $\lambda = (0,\ 0,\ 0,\ 1/2,\ 1/2,\ 1/2)$ [6].

Данному сбалансированному покрытию будет соответствовать вектор коэффициентов $\mu = (\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}, 0, \frac{\alpha}{2}, 1/2, 1/2)$. Проверка условия (6) для него показывает, что игра с неопределенностью будет иметь непустое ядро при $\alpha \leq 2/5$.

Физически это означает, что игроки R и U в процессе переговоров о распределении выигрыша в рамках тотальной коалиции будут менее требовательны, нежели в условиях определенности. Результатом переговоров при этом будет являться неэффективная структура, состоящая из тотальной коалиции.

Отметим, что данная ситуация выгодна третьему участнику переговоров, так как при малых α ядро будет содержать распределения, дающие ему положительный выигрыш. Поэтому, при наличии у него возможностей по воздействию на величину α, он может применять различные меры по ее снижению.

Данный результат позволяет объяснить с экономических позиций, например, поддержку западными странами антироссийских настроений в государствах-членах СНГ в рамках программы «развития демократии». Очевидно, что формирование работоспособной коалиции этих государств значительно упрочило бы их переговорные позиции, в частности, по вопросам вступления в ВТО, позволив заключать более выгодные для себя соглашения. В связи с этим развитым западным странам становится выгодным поддерживать разногласия между ними, которые снижали бы вероятность формирования подобного блока.

2. Значение некооперативной игры с неопределенностью. Несмотря на свою интуитивную привлекательность, ядро кооперативной игры во многих случаях не может рассматриваться в качестве приемлемого ее решения, так как оно представляет собой множественный принцип оптимальности, который каждой игре ставит в соответствие некоторое множество решений. В результате этого лицо, принимающее решения, вновь сталкивается с проблемой выбора точки из данного множества. Кроме того, во многих практически важных ситуациях ядро может быть пустым. Поэтому естественным является желание сформулировать такой принцип оптимальности, который в любой коалиционной игре позволял бы выбрать ровно одно оптимальное решение. Наиболее распространенным принципом оптимальности такого рода является значение игры [6], основанное на получении игроками выигрыша, равного их ожидаемому вкладу в благосостояние коалиций.

Концепция значения естественным образом обобщается на случай игр с неопределенностью.

Значением игры с неопределенностью назовем оператор ϕ, ставящий в соответствие любой игре с неопределенностью $\Gamma_p = <N, v, p>$ и любому игроку $i \in N$ действительное число $\phi_i(\Gamma_p) = \phi_i(u)$, где $\phi(u)$ – вектор Шепли кооперативной игры с характеристической функцией u, определяемой согласно (1).

Значение игры представляет в этом случае ожидаемый вклад игрока в коалиции, формируемые в процессе переговоров, с учетом того, что их образование не равновероятно.

Отметим, что для классической постановки, когда вероятность задается в виде (4), данная величина совпадает со значением игры $\phi(v)$.

Так как ожидаемые выигрыши коалиций в условиях неопределенности зависят не только от значений характеристической функции игры, но и от вероятностей формирования соответствующей коалиции, изменяется аксиоматика значения игры.

В частности, в рассмотренном случае должна быть переопределена концепция нулевого игрока. В классической постановке нулевой игрок – это игрок, не оказывающий воздействия на выигрыш коалиции при присоединении к ней. В результате этого ожидаемый вклад такого игрока, а, следовательно, и значение игры для него будет нулевым. Однако, в условиях неопределенности даже игроки, не вносящие вклада в выигрыш коалиций, могут, тем не менее, оказывать воздействие на вероятности их формирования.

В качестве примера такого взаимодействия рассмотрим игру трех участников: продавца (S), покупателя (B) и посредника (I). Предположим, что продавец владеет предметом, не представляющим для него никакой ценности, но имеющим для покупателя ценность 1. В этом случае сделка между продавцом и покупателем, которую мы будем отождествлять с формированием коалиции $\{B,\, S\}$, будет генерировать полезность 1. Остальные взаимодействия в данном контексте не генерируют дополнительной полезности, т.е. характеристическая функция игры будет иметь вид:

$$v(i) = 0;\; i = I,\, B,\, S;\; v(I,\, B) = v(I,\, S) = 0;\; v(B,\, S) = v(I,\, B,\, S) = 1.$$

В такой постановке игры посредник является нулевым игроком, а следовательно, $\phi_I(v) = 0$. Таким образом, постановка кооперативной игры в условиях определенности отказывает посредникам в праве на получение прибыли. Это связано с тем, что классические условия не отражают трансакционных издержек сделок, в том числе, не учитывают возможности того, что сделка может не состояться.

Проанализируем данную возможность, предположив, что без участия посредника сделка между игроками происходит с меньшей вероятностью, нежели в случае, когда в ней участвует посредник. Пусть $p(\{K\}|\, K) = 1$, если $K \neq \{B,\, S\}$ и $p(\{\{B,\, S\}\}|\{B,\, S\}) = a < 1$.

Нетрудно получить, что значение такой игры с неопределенностью составит $(\frac{1-a}{3}, \frac{2+a}{6}, \frac{2+a}{6})$, то есть, в данном случае посредник будет получать ненулевую прибыль в связи с тем, что его участие в тотальной коалиции приводит к повышению ее ожидаемого выигрыша. При этом, с ростом трансакционных издержек, т.е. при $a \to 0$, выигрыш посредника в данной задаче возрастает, в пределе достигая ${}^1/_3$ общего выигрыша коалиции.

Таким образом, нулевым игроком в игре с неопределенностью естественно называть игрока, который не вносит вклада ни в какую коалицию и, кроме того, не влияет на вероятности формирования коалиционных структур в игре. Для такого игрока выполнено: $\forall K \not\ni i \quad u(K) = u(K \cup \{i\})$, а следовательно $\phi_i(\Gamma_p) = 0$. Это условие представляет собой расширение аксиомы носителя для кооперативной игры с неопределенностью.

Аксиома симметричности для игр с неопределенностью примет следующий вид:

Для любой игры Γ_p, для любой перестановки игроков из множества N π и для любого игрока $i \in N$ $\phi_{\pi(i)}(\pi\Gamma_p) = \phi_i(\Gamma_p)$, где $\pi\Gamma_p = <\pi(N),\, \pi v,\, \pi p>$, такая, что $\forall K \subseteq N$ $\pi v(\pi(K)) = v(K)$ и $\forall\, \pi B \in \mathrm{B}_{\pi(K)}$, $\pi p(\pi B \mid \pi(K)) = p(B \mid K)$, где $B \in \mathrm{B}_K$ такая, что $\forall\, C_j \in \pi B$ найдется $B_k \in B$: $C_j = \pi(B_k)$.

Значение игры с неопределенностью будет симметричным, так как $\phi_i(\Gamma_p) = \phi_i(u)$ и математическое ожидание инвариантно относительно перестановок игроков.

Аксиома линейности не будет выполняться для произвольных игр с неопределенностью, так как множество таких игр не замкнуто относительно операции сложения. Значение игры с неопределенностью будет удовлетворять двум более слабым аксиомам: линейности по вероятности и линейности по характеристической функции игры.

Линейность по характеристической функции: *Для любых двух игр* Γ и Γ', *определенных на одном и том же множестве игроков, таких, что* $p(B|K) = p'(B|K) \quad \forall K \quad \forall B \in \mathrm{B}_K$, *любого числа* $0 \leq \beta \leq 1$ *и для любого игрока* $i \in N$

$\phi_i(\beta\Gamma + (1-\beta)\Gamma') = \beta\phi_i(\Gamma) + (1-\beta)\phi_i(\Gamma')$,

где $(\beta\Gamma + (1-\beta)\Gamma') = <N, \beta v + (1-\beta)v', p>$.

Аксиома линейности по вероятности формулируется аналогично для таких игр Γ и Γ′, что $v(K) = v'(K)$ и сумма игр определяется как $(\beta\Gamma + (1-\beta)\Gamma') = <N, v, \beta p + (1-\beta)p'>$.

Следует также сделать замечание относительно эффективности получаемого распределения выигрыша. Значение кооперативной игры является эффективным для супераддитивной характеристической функции, так как $\sum\limits_{i\in N} \phi_i(v) = v(N)$. В ситуациях, когда тотальная коалиция не является эффективной, значение игры уже не обеспечивает эффективного распределения выигрыша. Ситуация еще более осложняется при наличии неопределенности, так как в этом случае даже супераддитивность характеристической функции уже не является достаточным условием эффективности. Значение супераддитивной кооперативной игры с неопределенностью будет являться эффективным распределением (т.е. $\sum\limits_{i\in N} \varphi_i(\Gamma_p) = v(N)$), если $p(\{N\}| \quad N) = 1$, то есть, когда предполагается, что тотальная коалиция образуется наверняка.

Наличие данного ограничения уже не позволяет рассматривать компоненты значения игры как руководство к распределению выигрыша между ее участниками, а скорее как меру переговорной силы каждого из участников некоторого уже сложившегося альянса, возможности кооперации в рамках которого описываются игрой с неопределенностью Γ.

Заключение. В работе исследована ситуация, когда исход переговоров между участниками в процессе формирования коалиций не детерминирован, а представляет собой случайную величину на коалиционных структурах.

Для этой ситуации сформулированы понятия ядра и значения игры и исследованы их свойства. Показано, что при наличии неопределенности возможности подмножеств участников по получению выигрыша уменьшаются, что приводит к расширению ядра игры.

Разработанный математический аппарат может использоваться при анализе экономических систем с трансакционными издержками, к которым неприменимы классические модели формирования коалиций.

Список литературы

[1] Boros E., Gurvich V., Vasin A. Stable Families of Coalitions and Normal Hypergraphs // DIMACS Tech. Rep. 96-33 – August, 1996.

[2] Greenberg J., Weber S. Stable Coalition Structures in Consecutive Games // In: Binmore K., Kirman A., Tani P. (eds.) "Frontiers of Games Theory". – Cambridge and London: MIT Press, 1993. – P. 103 – 115.

[3] Hart S., Kurz M. Endogenous formation of coalitions // Econometrica. – 1983. – Vol. 51. – № 4. – P. 1047 – 1064.

[4] Herings P.J.J., van der Laan G., Talman D. Cooperative Games in Graph Structure // CER w.p. № 2000-90. – October, 2000.

[5] Keren M., Levhari D. The Internal Organization of the Firm and the Shape of Average Costs // The Bell Journal of Economics. – 1983. – Vol. 14. – № 2. – P. 474 – 486.

[6] Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. Учебное пособие. – М.: МАКС-Принт, 2005.