УДК 330.322

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ В УСЛОВИЯХ РИСКА

Нефедов А.Н.
Кафедра системного и экономико-математического анализа

Поступила в редакцию 20.03.2007, после переработки 14.06.2007.

Рассматривается задача выбора инвестиционных проектов в условиях риска. Вводятся понятия инвестиционного коридора и ожидаемой траектории реализации проекта. Предлагается метод решения задачи с применением имитационного моделирования. Производится оценка вероятности провала проекта. Дается описание процедуры компенсации, для сравнения проектов на основе их ожидаемых траекторий.

The problem of a choice of investment projects under probabilistic uncertainty is being considered. Investment corridor and an expected trajectory of realization of the project are defined. The method of the decision of a problem with application of imitation modeling is offered. The estimation probability of a failure project is made. The description of procedure of indemnification, for comparison projects is given on the basis of their expected trajectories.

Ключевые слова: капитализация, инвестиционный горизонт, функция полезности, случайный процесс, имитационное моделирование.
Keywords: capitalization, investment passage, utility function, stochastic process, simulation.

Введение. Одним из приложений теории принятия решений является задача выбора инвестиционного проекта в условиях вероятностной неопределенности. Известные подходы к решению данной задачи, опираются на достаточно сильные предположения о вероятностном распределении количественного показателя оценки проекта, а также выдвигают жесткие требования к свойствам предпочтений индивида (см. например [1, 2]). Как следствие, применение этих методов может привести к ошибочным результатам и выводам. Изложенные обстоятельства определяют необходимость развития данных методов путем ослабления исходных допущений.

В работе рассматривается задача выбора инвестиционного проекта в условиях неизвестности вероятностного распределения показателя остаточной стоимости (капитализации) проекта. Предлагается метод решения, основанный на анализе неопределенности на уровне факторов инвестиционной среды, обуславливающих итоговую капитализацию проекта. Предполягается, что инвестор в состоянии задать пессимистичный и оптимистичный сценарии развития проекта в рамках инвестиционного горизонта. На основе предоставленной информации оценивается динамика реализации проекта и риск его провала. Расчеты осуществляются при помощи имитационного моделирования на базе вероятностных моделей для параметров, неопределенных на момент анализа проекта. Оценка инвестиционного проекта производится при помощи функции полезности, определенной на показателях итоговой капитализации, оценки динамики и риска провала проекта.

1. Постановка задачи. Рассмотрим инвестора, имеющего некоторый объем финансовых средств и множество $\mathbf{I} = \{I_1, I_2, ..., I_N\}$, $N \geq 2$ альтернатив действий (инвестиционных проектов) по их использованию, включая альтернативу отказа.

В качестве инвестора рассматривается лицо, принимающее решения (ЛПР) и не имеющее иных интересов, кроме стремления к максимизации своего благосостояния на момент достижения инвестиционного горизонта T.

Инвестиционный проект $I_j(x) \in \mathbf{I}$ представляется как функция от вектора факторов $x = (x_1, ..., x_n)$, влияющих на исход проекта (кредитные ставки, уровень инфляции и т.п.), часть из которых являются случайными. Не ограничивая общности, будем считать таковыми первые k элементов вектора $x = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_k, x_{k+1}, ..., x_n)$. Тогда исход проекта $C_t\left(I_j(x)\right)$ также будет случайной величиной $\forall t \in [1, T]$. Вид функции $C_t\left(I_j(x)\right)$ определяется используемой инвестиционной моделью расчета (например, метод чистой сегодняшней стоимости [3]).

Будем полагать, что инвестор, на этапе планирования проекта, способен указать инвестиционный коридор, в рамках которого он ожидает видеть реализацию I_j. Инвестиционный коридор для проекта I_j представляет собой множество пар

$$\mathrm{K}(I_j) = \left\{ \left[\underline{C}_t(I_j), \overline{C}_t(I_j)\right], \ \forall t \in [1, T] \right\},$$

где $\underline{C}_t(I_j)$ — минимально допустимый уровень благосостояния инвестора на момент времени t, а $\bar{C}_t(I_j)$ — желаемый (ориентировочный) уровень благосостояния. Момент времени $t = 0$ не рассматривается, так как исход C_0 детерминирован и определяется самим инвестором в момент принятия решения. Будем считать, что исход проекта I_j в момент времени t негативен для инвестора, если математическое ожидание результата проекта $M\left\{\tilde{C}_t(I_j)\right\} < \underline{C}_t(I_j)$. Естественно предположить, что чем меньше негативных исходов в ожидаемой траектории проекта, тем более предпочтительным проект является для инвестора. То есть величина

$$q\left(I_j\right) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} J\left(M\left\{\tilde{C}_t(I_j)\right\}, \underline{C}_t(I_j)\right) \tag{1}$$

является оценкой динамики инвестиционного проекта. Здесь

$$J\left(M\left\{\tilde{C}_t(I_j)\right\}, \underline{C}_t(I_j)\right) = \begin{cases} 1, \text{ если } M\left\{\tilde{C}_t(I_j)\right\} < \underline{C}_t(I_j), \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Под ожидаемой траекторией проекта I_j понимается $\left\{M\left\{\tilde{C}_t(I_j)\right\}, \ \forall t \in [1, T]\right\}$. Таким образом, опираясь на q, инвестор может ранжировать по предпочтению проекты, приносящие одинаковый ожидаемый результат $M\{\tilde{C}_T\}$.

При анализе проектов естественно учесть возможности инвестора по привлечению заемных средств. Необходимость в этом возникает, когда $\Delta\underline{\tilde{C}}_t = \tilde{C}_t - \underline{C}_t < 0$. Величина $|\Delta\underline{\tilde{C}}_t|$, характеризующая объем заимствования, является случайной величиной $\forall t \in [1, T]$. Весьма нереалистично предполагать, что инвестор в любой момент времени может брать в долг неограниченную сумму. Поэтому необходимо учитывать, что кредитные возможности ЛПР лимитированы некоторой величиной L. Тогда существует вероятность p_L того, что необходимый займ в момент времени t превысит лимит, и дальнейшая реализация проекта будет невозможна. Иными словами инвестиционный проект I_j считается нереализуемым, если

$$\exists t \in [1,T]: \quad \left|\Delta \underline{\tilde{C}}_t\left(I_j\right)\right| > L. \tag{2}$$

Выбор оптимальных, с точки зрения ЛПР, инвестиционных проектов осуществляется с использованием функции полезности u, отражающей предпочтения ЛПР и определенной на показателях ожидаемой капитализации, оценки динамики реализации и риска провала проекта. Тогда задача выбора инвестиционных проектов, с учетом перечисленных показателей имеет вид:

$$\mathbf{I}^{opt} = Arg \max_{j=\overline{1,N}} \left\{ u\left(M\left\{ \tilde{C}_T(I_j) \right\}, q(I_j), p_L(I_j) \right) \right\}. \tag{3}$$

Для решения данной задачи необходимо построить функцию полезности инвестора, а также оценить ожидаемую траекторию, ее свойства и риск провала проекта. Проблема получения оценок связана с тем, что функциональное преобразование $C_T\left(I_j(x)\right)$ при больших значениях T оказывается таким, что получить распределение с.в. $\tilde{C}_T(I_j)$ аналитически не представляется возможным.

2. Метод решения. Общая схема метода состоит в следующем:

1. Выявляются предпочтения ЛПР и строится функция полезности.
2. Определяется перечень (вектор) параметров, будущие значения которых не определены на момент принятия решения: $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_k)$.
3. Для каждого параметра строится вероятностная модель.
4. Осуществляется имитационное моделирование реализации проекта I_j, $\forall j = \overline{1,N}$ на базе построенных моделей для случайных параметров.
5. Рассчитывается оценка ожидаемой траектории $\left\{ M\left\{ \tilde{C}_t(I_j) \right\},\ \forall t \in [1,T] \right\}$ реализации проекта и оценки $q(I_j),\ p_L(I_j)$.
6. На основе (4) формируется множество оптимальных инвестиционных альтернатив.

Восстановление функции полезности производится с использованием методов, изложенных в [4].

Рассмотрим динамику состояния инвестиционной среды в анализируемый период как векторный процесс $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), ..., x_k(t))$, в предположении, что каждый процесс стационарен [5] и описывается моделью грубых ошибок [6] с плотностью распределения:

$$\rho(\tilde{x}_i) = (1-\varepsilon_i)N(a_i, \sigma_i^2) + \varepsilon_i \varphi(\tilde{x}_i), \tag{4}$$

где $N(a_i, \sigma_i^2)$ — плотность нормального распределения с математическим ожиданием a_i и дисперсией σ_i^2 , $\varphi(\tilde{x}_i)$ — плотность равномерного распределения на отрезке $[a_i - 3\sigma_i, a_i + 3\sigma_i]$, а $\varepsilon_i \in [0,1]$ — доля равномерного распределения в распределении $\rho(\tilde{x}_i)$, и, соответственно, $(1-\varepsilon_i)$ — доля нормального распределения, $i = \overline{1,k}$.

Так как факторы инвестиционной среды являются экономическими показателями, естественно предположить наличие для них статистических данных (см., например, [7,8]). На их основе оцениваются параметры модели. Вычисляется выборочное среднее и дисперсия. Проверяется гипотеза о нормальности распределения, с использованием непараметрических критериев согласия. Производится поиск порогового значения величины ε_i, при переходе через которое проверяемая гипотеза отвергается. Найденная величина соответствует достижимому уровню значимости [9] для применяемого критерия согласия.

Для получения реализации $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ осуществляется имитация поведения случайных показателей в рамках инвестиционного горизонта T проекта $I_j \in \mathbf{I}$. На основе полученных данных, вычисляется $\tilde{C}_T\left(I_j(\tilde{x})\right)$ при помощи используемой модели расчета. Повторив процесс имитации m раз, получим набор случайных величин $\tilde{C}_T^1(I_j), ..., \tilde{C}_T^s(I_j)$, где $s \leq m$. Размер выборки меньший числа имитаций объясняется тем, что для ряда возможных состояний инвестиционных сред проект может быть неосуществим, то есть в этих случаях выполнялось (3). Тогда величина $p_L(I_j) = \frac{m-s}{m}$ представляет собой оценку вероятности того, что проект окажется нефинансируемым, или меру риска провала рассматриваемого проекта. Количество имитаций определяется с позиций оценки вероятности $p_L\left(I_j\right)$ провала проекта I_j, то есть доли ситуаций, при которых проект I_j нереализуем. Предлагается использовать следующее соотношение [10]:

$$m = \frac{Z^2 p_L\left(1-p_L\right)}{\Delta_p},$$

где Z — критическое значение стандартизированного нормального распределения, определяемое заданным доверительным уровнем, Δ_p — допустимая ошибка. Так как эмпирическая оценка p_L неизвестна, то для исключения недооценки объема выборки $p_L = 0,5$.

Вычисляется ожидаемая траектория $\left\{M\left\{\tilde{C}_t(I_j)\right\},\ \forall t \in [1,T]\right\}$ и оценка $q(I_j)$. Рассчитав критерии оценки для каждой инвестиционной альтернативы, формируем $\mathbf{I}^{opt}$, используя соотношение (4).

3. Критический анализ подхода. При вычислении оценки q никак не учитываются величины выхода за границы инвестиционного коридора. Рассмотрим два инвестиционных проекта — I_1 и I_2, для которых $q(I_1) = q(I_2) = 0,5$, $p_L(I_1) = p_L(I_2)$ и $M\left\{\tilde{C}_T(I_1)\right\} = M\left\{\tilde{C}_T(I_2)\right\}$, где $T = 8$. Для примера положим, что инвестор задал одинаковый инвестиционный коридор для обоих проектов, имеющий постоянные границы. Ожидаемые реализации проектов изображены на рис. 1.

Оба проекта по рассматриваемым критериям характеризуются одинаково, но как видно из рисунка проект I_2 будет более предпочтителен для ЛПР, так как ожидаемые результаты проекта I_2 в периоды (5, 6 и 7) лучше, чем у I_1 . Следовательно, необходимо учитывать величины отклонений от границ инвестиционного коридора при оценке инвестиционного проекта.

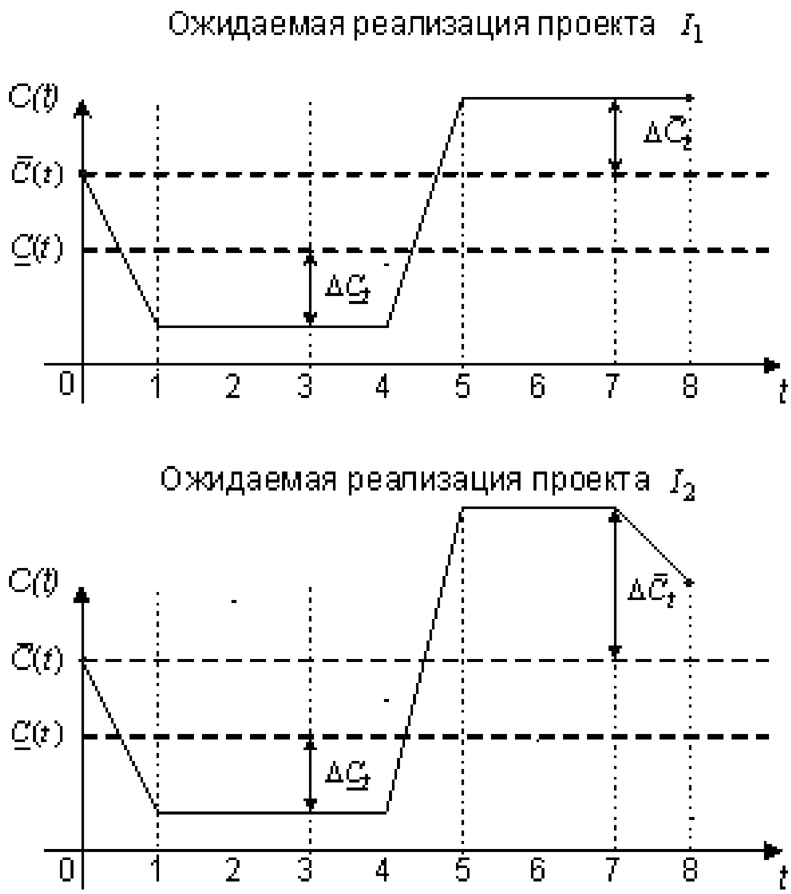

Рис. 1

4. Алгоритм компенсации. Алгоритм компенсации основан на идее получения эквивалентной реализации инвестиционного проекта, путем перераспределения средств между периодами времени $t: \ \Delta\bar{C}_t > 0, \ t \in [1, T-1]$ и $\tau: \ \Delta\underline{C}_\tau < 0, \ \tau \in [1, T-1]$, где $\Delta\bar{C}_t = M\{\tilde{C}_t\} - \bar{C}_t$ и $\Delta\underline{C}_\tau = M\{\tilde{C}_\tau\} - \underline{C}_\tau$ (рис. 1). Последний период ($t = T$) не затрагивается, так как величина $M\{\tilde{C}_T\}$, характеризующая итоговый результат реализации проекта, является критерием для его оценки и не должна корректироваться. Алгоритм применим, если выполнены следующие необходимые условия:

a) $T > 3$;

b) $\exists t: \ \Delta\bar{C}_t > 0, \ t \in [1, T-1]$;

c) $\exists\tau: \ \Delta\underline{C}_\tau < 0, \ \tau \in [1, T-1]$;

d) $\tau < t$.

Процедура работы алгоритма состоит в следующем:

1. Производится поиск $t: \ \Delta\bar{C}_t > 0, \ t \in [1, T-1]$.

2. Производится поиск наиболее раннего периода времени $\tau: \ \tau < t, \ \Delta\underline{C}_\tau < 0, \ \tau \in [1, t-1]$.

3. Осуществляется процедура поиска объема компенсации, при которой полученная реализация проекта будет эквивалентна исходной. Поиск осуществляется итеративно, с заданной степенью точности, путем пересчета реализации проекта с использованием компенсированных величин на участке $[\tau, t]$. Максимально допустимый объем компенсации не может превышать величины

$$\Delta C_{t\to\tau} = \min\{\Delta\bar{C}_t, |\Delta\underline{C}_\tau|\}. \qquad (5)$$

4. Проверяются условия дальнейшей применимости алгоритма (b), (c) и (d). Если дальнейшие итерации возможны, осуществляется переход к шагу 1. В противном случае алгоритм останавливается.

Стоимость капитала $\Delta C_{t\to\tau}$ в момент времени t меньше, чем в момент времени τ. Причины этого явления подробно обсуждаются в [11]. Поэтому при определении величины $\Delta C_{t\to\tau}$ следует учитывать дисконтированные отклонения периодов τ. Тогда

$$\Delta C_{t\to\tau} = \alpha_t(\tau)\min\{\Delta\bar{C}_t, |\Delta\underline{C}_\tau|\}, \qquad (6)$$

где $\alpha_t(\tau) = \prod\limits_{l=\tau}^{t} \alpha(l)$, а $\alpha(l)$ — дисконтированное отклонение периода l, а $\alpha_t(\tau)$ — совокупное дисконтированное отклонение периода τ относительно периода t.

Для расчета коэффициента дисконтирования предлагается использовать уравнение Фишера [11]:

$$\alpha(t) = r(t) + i(t) + r(t)i(t),$$

где $r(t)$ — процентная ставка по заимствованию, а $i(t)$ — уровень инфляции.

Таким образом, на основе скорректированных при помощи алгоритма реализаций проектов из $\mathbf{I}$, формируются новые оценки $\hat{q}(I_j)$, которые используются в (4).

Ожидаемые траектории проектов I_1 и I_2 (рис. 1) после применения алгоритма компенсации имеют вид (рис. 2):

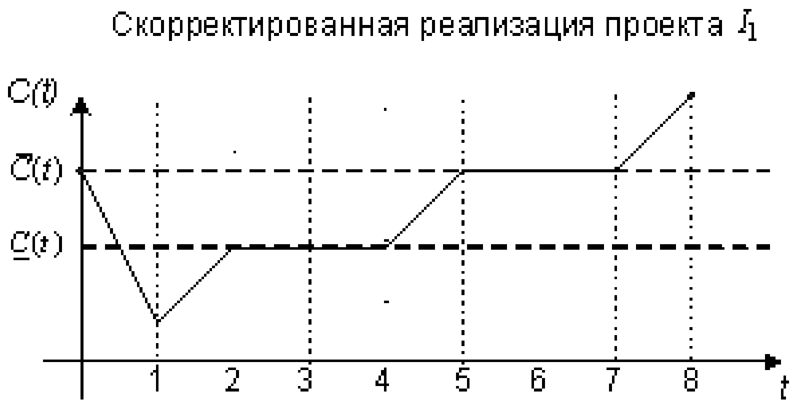

Рис. 2

Новые оценки равны $\hat{q}(I_1) = 0,125$ и $\hat{q}(I_2) = 0$.

Заключение. Предложенный метод, основанный на имитационном моделировании, позволяет произвести оценку инвестиционных проектов в условиях неопределенности и сформировать множество оптимальных, с точки зрения инвестора, альтернатив. Точность изложенного метода зависит от качества построенных вероятностных моделей для имитируемых показателей. Если временные ряды, служащие базой для построения модели показателя x_i, $i = \overline{1, s}$, объединяют в себе несколько однородных подсовокупностей, то целесообразно вместо модели (6) рассматривать модель, описанную в виде смеси нормальных распределений:

$$\rho(r) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i N(a_i, \sigma_i^2),$$

где $\varepsilon_i > 0 \ \forall i = \overline{1, n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 1$, а n — число подвыборок.

В качестве инвестиционной модели расчета можно пользоваться методом чистой сегодняшней стоимости или моделями, предложенными, например, в [2] и [12].

Список литературы

[1] Касимов Ю.Ф. Основы теории оптимального портфеля ценных бумаг. Москва, 1998 г.

[2] Крушвиц Л. Инвестиционные расчеты. — СПб: Питер, 2001.

[3] Шарп У.Ф., Александер Г. Дж., Бэйли Дж.В. Инвестиции. — М.: Инфра-М, 2003.

[4] Кини Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. — М.: Радио и связь, 1981.

[5] Вентцель А.Д. Теория случайных процессов. — М.: Наука, 1975.

[6] Хьюбер П. Робастность в статистике: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984.

[7] Центральный банк РФ. http://www.cbr.ru

[8] Федеральная служба государственной статистики. http://www.gmcgks.ru

[9] Боровков А.А. Математическая статистика. — М.: Наука, 1984.

[10] Ефимова М.Р., Петрова Е.В., Румянцев В.Н. Общая теория статистики. — М.: ИНФРА-М, 1998.

[11] Графова Г.Ф., Аврашков Л.Я. О норме дисконта при отборе инвестиционных проектов для финансирования. // Финансы. 1998. №3.

[12] Лившиц С.В. О методологии оценки эффективности производственных инвестиционных проектов в Российской переходной экономике. Экономика и математические методы. 2004. Т. 35, вып. 1.